Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Rosa Bianca Ancora

Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 99-134
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__99_0>

PROBLEMI ANALITICI CONNESSI ALLA TEORIA DELLA PIASTRA ELASTICA APPOGGIATA

Memoria (*) *di* Rosa Bianca Ancora *(a Roma)*.

È noto che il problema dell'equilibrio di una piastra elastica sottile, che nella sua posizione iniziale sia schematizzabile in un dominio limitato piano D a lati rettilinei, appoggiata lungo il suo bordo e sottoposta ad un carico assegnato di cui indicherò con $\delta(P)$ la densità nel punto P, si traduce nel seguente problema analitico:

$$(A) \begin{cases} \Delta_4 w = \delta & \text{in } D - FD \\ w = \Delta_2 w = 0 & \text{su } FD \end{cases}$$

rappresentando $w(P)$ l'abbassamento del punto P della piastra sotto l'azione del carico.

Scopo del presente lavoro è una teoria completa, sia dal punto di vista quantitativo, che da quello esistenziale, del problema al contorno (A) relativo ad un dominio regolare limitato D, non necessariamente a lati rettilinei.

Se FD è costituita da una o più curve chiuse dotate di tangente e curvatura continue, come è noto, il teorema di esistenza si ottiene col metodo di Fredholm dell'equazioni integrali, ricavandolo da quello pel problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. Ma a tale procedimento sfugge il caso in cui FD sia dotata di angoli e quindi, in particolare, il caso di una piastra a lati rettilinei. Inoltre tale procedimento non si presta a fornire il calcolo numerico della soluzione.

(*) Pervenuta in Redazione il 31 luglio 1950.

Basandomi su procedimenti introdotti dal prof. PICONE nella teoria nei problemi al contorno per equazioni lineari alle derivate parziali, e successivamente sviluppati dai proff. AMERIO e FICHERA, verrò a dare teoremi che consentono il calcolo della soluzione del problema in discorso, in un dominio limitato qualsivoglia. Inoltre ispirandomi a procedimenti già seguiti dal prof. FICHERA darò un metodo per la maggiorazione dell'errore di approssimazione commesso impiegando uno dei detti metodi di calcolo, nonchè il teorema di esistenza, in un'opportuna classe funzionale, per un dominio la cui frontiera presenti qualsivoglia tipo di singolarità.

Alla fine del lavoro (nn. 6 e 7) illustrerò numericamente i risultati teorici stabiliti, considerando il caso di una piastra quadrata.

I risultati numerici ottenuti in questo caso sono pienamente soddisfacenti perchè, oltre a confermare quelli già in precedenza ottenuti da altri autori, rivelano l'efficacia dei procedimenti di integrazione approssimata sviluppati nella prima parte del lavoro, dato che l'applicazione delle formule di maggiorazione dell'errore dimostra che già fin dalle prime approssimazioni questa è di un ordine di grandezza da ritenersi trascurabile.

1. – Un teorema preliminare di completezza.

Dedicheremo questi due primi nn. allo studio di un problema al contorno per le funzioni bi-iperarmoniche, al quale si riconduce il problema precedentemente enunciato.

Il problema, a cui ci riferiamo, è quello che consiste nel ricercare una funzione bi-iperarmonica u in un dominio regolare e limitato D, avendo prescritto sulla frontiera di D, FD, i valori di u e di $\Delta_2 u$. Si tratta cioè di costruire una funzione u, la quale, dette f e g due assegnate funzioni dell'arco s di FD, verifichi le seguenti condizioni:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \Delta_4 u = 0 & \text{in } D - FD \\ u = f \,, \qquad \Delta_2 u = g & \text{su } FD \,. \end{cases}
$$

Verremo a seconda dei casi a precisare la classe delle funzioni bi-iperarmoniche, nella quale si ricerca la soluzione del soprascritto problema.

Sia infatti $w_0(P)$ una funzione tale che

$$\Delta_4 w_0 = \delta$$

ad esempio la funzione

$$w_0 = \frac{1}{8\pi} \int_D \delta\,(Q)\ \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}\ d_Q T .$$

Posto per ogni punto di FD:

$$f = w_0 \ , \qquad g = -\frac{d\,w_0}{dn} \ ,$$

se u è la soluzione del problema (1) con f e g, così definite, la funzione

$$W = u + w_0$$

è la soluzione di quello enunciato nell'introduzione.

Ci occuperemo prima di alcuni procedimenti per il calcolo della soluzione supposta già esistente. A questo proposito stabiliremo preliminarmente un teorema di completezza per un sistema di vettori a due componenti, definiti su FD. Premettiamo che, per semplicità, supporremo il dominio D semplicemente connesso. Indicheremo con $\{\omega_k\}$ una successione di polinomi omogenei bi-iperarmonici, linearmente indipendenti, le cui combinazioni lineari forniscono tutti i polinomi bi-iperarmonici. Una successione siffatta può ottenersi prendendo per ciascun valore intero $h \geq 0$, i seguenti polinomi:

$$R\,(x+i\,y)^h,\ I\,(x+i\,y)^h,\ R\,(x^2+y^2)\,(x+i\,y)^h,\ I\,(x^2+y^2)\,(x+i\,y)^h .$$

Dimostriamo il seguente teorema:

I. – *Il sistema di vettori* $\{\omega_k\,,\ \Delta_2\,\omega_k\}$ *è hilbertianamente completo su* FD.

La dimostrazione del teorema consiste nel far vedere che, se $\varphi_1(P)$ e $\varphi_2(P)$ sono due funzioni quasi continue su FD ed ivi di quadrato sommabile, verificanti, qualunque sia k, le equazioni:

$$(2)\qquad \int_{FD} \varphi_1(P)\,\omega_k(P)\,ds + \int_{FD} \varphi_2(P)\,\Delta_2\,\omega_k(P)\,ds = 0$$

avviene che $\varphi_1(P)$ e $\varphi_2(P)$ sono quasi ovunque nulle su FD.

Cominciamo intanto col far vedere che il verificarsi delle infinite equazioni (2) equivale alla seguente equazione, la quale sussiste per ogni punto M esterno al dominio D:

$$(2')\qquad \int_{FD} \varphi_1(P)\,\overline{PM}^2 \log \overline{PM}\,d_P\,s + \int_{FD} \varphi_2(P) \log \overline{PM}\,d\,s_P = 0\,.$$

Infatti, assunto un sistema di coordinate polari con polo nel punto O, interno a D, e dette ρ e ϑ, le coordinate polari di M e ρ_0, ϑ_0 quelle di P e posto $\overline{PM} = r$, si ha:

$$\log \overline{PM} = \log r = \log \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)} =$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} e^{i(\vartheta - \vartheta_0)}\right) + \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} e^{-i(\vartheta - \vartheta_0)}\right) + \log \rho\,.$$

Si ottiene allora, per $\rho_0 < \rho$, il seguente sviluppo che, fissato P, riesce uniformemente convergente al variare di M all'esterno del cerchio di centro 0 e raggio ρ_0, e viceversa, fissato M, riesce uniformemente convergente al variare di P nell'interno del cerchio di centro O e raggio ρ:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\log r &= \log \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \frac{\rho_0^m}{\rho^m}\left(e^{im(\vartheta-\vartheta_0)} + e^{-im(\vartheta-\vartheta_0)}\right) = \\
&= \log \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\rho_0^m}{\rho^m} \cos m(\vartheta - \vartheta_0) .
\end{aligned}
$$

Se C è una curva regolare sulla quale è definita la funzione $\mu(P)$, consideriamo il potenziale logaritmico:

$$
V(M) = \int_C \mu(P) \log r \, d_P s ,
$$

nell'ipotesi che la $\mu(P)$ riesca su C funzione sommabile dell'arco s.

Detto Γ un cerchio con centro in 0, a cui C sia interno, è subito visto, moltiplicando i due membri della (3) per $\mu(P)$ e integrando poi su C, che, all'esterno di C, vale lo sviluppo uniformemente convergente al variare di M:

$$
V(M) = \alpha_0 \log \rho - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha'_m \cos m\vartheta + \alpha''_m \operatorname{sen} m\vartheta}{\rho^m}
$$

con

$$
\alpha_0 = \int_C \mu(P)\, ds ,
$$

$$
\alpha'_m = \frac{1}{m} \int_C \mu(P)\, \rho_0^m \cos m\vartheta_0 \, ds ,
$$

$$
\alpha''_m = \frac{1}{m} \int_C \mu(P)\, \rho_0^m \operatorname{sen} m\vartheta_0 \, ds .
$$

Dallo sviluppo (3) di $\log r$, tenendo presente che

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\,\rho\,\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) = \rho^2 + \rho_0^2 - \rho\,\rho_0\, e^{i(\vartheta - \vartheta_0)} - \rho\,\rho_0\, e^{-i(\vartheta - \vartheta_0)}$$

se ne deduce il seguente di $r^2 \log r$, valevole per $\rho_0 < \rho$:

$$r^2 \log r = \rho^2 \log \rho + \rho_0^2 \log \rho - 2\,\rho\,\rho_0 \log \rho \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \rho_0^2 -$$

$$- \rho\,\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{1}{2}\rho_0^2 \cos 2(\vartheta - \vartheta_0) -$$

$$- \rho_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} \frac{\rho_0^m}{\rho^m} \cos m(\vartheta - \vartheta_0) +$$

$$+ \rho^2 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} \frac{\rho_0^m}{\rho^m} \cos m(\vartheta - \vartheta_0) .$$

Ragionando come per i potenziali armonici precedentemente considerati, vediamo che il potenziale bi-iperarmonico:

$$W(M) = \int_C \mu(P)\, r^2 \log r \, d s$$

ha all'esterno di Γ il seguente sviluppo in serie uniformemente convergente al variare di M:

$$W(M) = \gamma_0 + \gamma_1 \log \rho + \gamma_2\, \rho^2 \log \rho + \rho \log \rho\,(\lambda' \cos \vartheta + \lambda'' \operatorname{sen} \vartheta) +$$

$$+ \rho\,(\mu' \cos \vartheta + \mu'' \operatorname{sen} \vartheta) + b_2' \cos 2\vartheta + b_2'' \operatorname{sen} 2\vartheta -$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m' \cos m\vartheta + a_m'' \operatorname{sen} m\vartheta}{\rho^m} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{b_m' \cos m\vartheta + b_m'' \operatorname{sen} m\vartheta}{\rho^{m-2}}$$

con

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \int_C \mu(P)\, \rho_0^2\, ds \qquad , \ \gamma_2 = \int_C \mu(P)\, ds\,,$$

$$\lambda = 2\,\mu' = -\,2 \int_C \mu(P)\, \rho_0 \cos \vartheta_0\, ds\,,\ \lambda'' = 2\,\mu'' = -\,2 \int_C \mu(P)\, \rho_0 \operatorname{sen} \vartheta_0\, ds\,,$$

$$b_2' = \frac{1}{2} \int_C \mu(P)\, \rho_0^2 \cos 2\,\vartheta_0\, ds \ ,\ b_2'' = \frac{1}{2} \int_C \mu(P)\, \rho_0^2 \operatorname{sen} 2\,\vartheta_0\, ds$$

ed espressioni analoghe, facilmente ottenibili, hanno le altre costanti a_m', a_m'', b_m', b_m'' che compaiono al secondo membro:

$$a_m' = \frac{1}{m\,(m+1)} \int_C \mu(P)\, \rho_0^{m+2} \cos m\,\vartheta\, ds$$

$$a_m'' = \frac{1}{m\,(m+1)} \int_C \mu(P)\, \rho_0^{m+2} \operatorname{sen} m\,\vartheta\, ds$$

$$b_m' = \frac{1}{m\,(m-1)} \int_C \mu(P)\, \rho_0^{m} \cos m\,\vartheta\, ds$$

$$b_m'' = \frac{1}{m\,(m-1)} \int_C \mu(P)\, \rho_0^{m} \operatorname{sen} m\,\vartheta\, ds$$

e considerazioni svolte permettono di affermare l'equivalenza delle (2) con la (2').

Applicando l'operatore Δ_2 alla funzione di M che compare al primo membro della (2'), si deduce che la funzione di M:

$$\text{(4)} \qquad \int_{FD} \varphi_1(P) \log \overline{PM}\, ds$$

è identicamente nulla all'esterno del dominio D.

Tale funzione inoltre è continua in ogni punto M_0 del piano -

la cosa è evidente se M_0 non sta su FD, laddove dimostreremo tale proprietà per l'ipotesi che M_0 sia un punto di FD. Infatti, ove si tenga conto che $\varphi_1(P)$ è una funzione hilbertiana, applicando la disuguaglianza di SCHWARZ:

$$\left| \int_{FD} \varphi_1(P) \log \overline{PM}\, d_P s - \int_{FD} \varphi_1(P) \log \overline{PM_0}\, d_P s \right| \leq$$

$$\leq \int_{FD} \left| \varphi_1(P) \right| \left| \log \overline{PM} - \log \overline{PM_0} \right| d_P s \leq$$

$$\leq \left(\int_{FD} \left| \varphi_1(P) \right|^2 d_P s \right)^{1/2} \left\{ \int_{FD} (\log \overline{PM} - \log \overline{PM_0})^2 d_P s \right\}^{1/2}$$

da cui si deduce l'asserita continuità nel punto M_0. Ne viene che la funzione (4) è continua sul dominio D, armonica nell'interno, laddove è nulla su FD, onde il potenziale di semplice strato (4) è identicamente nullo in tutto il piano, ciò che implica $\varphi_1(P)$ quasi ovunque nulla. La (2') allora diventa:

$$\int_{FD} \varphi_2(P) \log \overline{PM}\, d_P s = 0 \ .$$

Ripetendo per la $\varphi_2(P)$ il ragionamento testè fatto, si deduce che la $\varphi_2(P)$ è quasi ovunque nulla. Il teorema è così completamente dimostrato.

2. - Primo metodo di calcolo.

Supponiamo che il problema (1) ammetta una soluzione continua in D assieme alle sue derivate parziali terze.

Posto $v = \Delta_2 u$ e detta $G(P, Q)$ la funzione di GREEN relativa al problema di DIRICHLET, per l'operatore di LAPLACE considerato nel dominio D, si ha per ogni punto P interno a D:

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{FD} g(Q) \frac{d}{d n_Q} G(P, Q) \, d_Q s \; .$$

Posto

$$\Gamma,(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{D} G(P, M) \, G(M, Q) \, d_M T \, ,$$

si deduce facilmente, per ogni punto interno a D,

$$u(P) = \int_{FD} \left(f(Q) \frac{d \Delta_2 \Gamma(P, Q)}{d n_Q} + g(Q) \frac{d \Gamma(P, Q)}{d n_Q} \right) d_Q s \; . \tag{5}$$

Tale formula ci consente di dimostrare il teorema:

II. - *Fissato comunque l'intero positivo* m, *è possibile determinare* $m+1$ *costanti*

$$c_0^{(m)}, \; c_1^{(m)}, \; c_2^{(m)}, \; \ldots\ldots, \; c_m^{(m)}$$

in guisa tale che, posto

$$\Omega^{(m)} = c_0^{(m)} \omega_0 + c_1^{(m)} \omega_1 + \ldots\ldots + c_m^{(m)} \omega_{(m)} \; ,$$

le successioni $\{\Omega^{(m)}\}$ e $\{\Delta_2 \Omega^{(m)}\}$ *convergono rispettivamente in media su FD verso* f *e* g, *laddove, indicato con* L *una qualsivoglia operazione di derivazione parziale di ordine* n, *con* $n \geq 0$, *la successione* $\{L \Omega^{(m)}\}$ *converge uniformemente verso* Lu *in ogni insieme chiuso* C, *interno a* D.

In virtù del teorema I. consegue la possibilità di costruire le costanti $c^{(m)}$ di cui all'enunciato del teorema. Esse si otterranno rendendo minimo il polinomio quadratico nelle $c_i^{(m)}$

$$(6) \qquad \int\limits_{FD}\left[f-\sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)}\,\omega_i\right]^2 ds+\int\limits_{FD}\left[g-\sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)}\,\Delta_2\,\omega_i\right]^2 ds\;.$$

A tale scopo occorre risolvere il seguente sistema di $m+1$ equazioni in $m+1$ incognite:

$$(7) \quad \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)}\int\limits_{FD}\omega_i\,\omega_k\,ds+\sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)}\int\limits_{FD}\Delta_2\,\omega_i\,\Delta_2\,\omega_k\,ds=\int\limits_{FD} f\,\omega_k\,ds+\int\limits_{FD} g\,\Delta_2\,\omega_k\,ds$$

$$(k=0\,,\,1\,,\,\ldots\ldots,\,m)\;.$$

Detto C un arbitrario insieme chiuso interno a D, diciamo $\Lambda\,(C)$ un numero non superato, al variare di P in C, da nessuna delle due funzioni:

$$\int\limits_{FD}\left[L_P\,\frac{d\,\Delta_2\,\Gamma\,(P,\,Q)}{d\,n_Q}\right]^2 d_Q\,T\,,\qquad \int\limits_{FD}\left[L_P\,\frac{d\,\Gamma\,(P,\,Q)}{d\,n_Q}\right]^2 d_Q\,T\;.$$

In virtù della (5) si ha

$$\left\{L\,u\,(P)-L\,\Omega^{(m)}(P)\right\}^2=\left\{\int\limits_{FD}\left[f(Q)-\Omega^{(m)}\,(Q)\right]L_P\,\frac{d\,\Delta_2\,\Gamma\,(P,Q)}{d\,n}\,d_Q\,s\,+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{FD}\left[g\,(Q)-\Delta_2\Omega^{(m)}(Q)\right]L_P\,\frac{d\,\Gamma\,(P,\,Q)}{d\,n_Q}\,d_Q\,s\right\}^2\;.$$

Supposto P in C ed applicando la disuguaglianza di Schwarz, si ha:

$$\left\{L\,u\,(P)-L\,\Omega^{(m)}\,(P)\right\}^2\leq 2\,\Lambda\,(C)\int\limits_{FD}\left\{(f-\Omega^{(m)})^2+(g-\Delta_2\,\Omega^{(m)})^2\right\}d_P\,s$$

da cui segue la dimostrazione del teorema.

3. - Secondo procedimento di integrazione e calcolo delle funzioni incognite lungo il contorno.

Richiamiamo alcuni risultati appartenenti alla teoria del potenziale di semplice e doppio strato logaritmico [1].

Sia C una curva dotata in ogni suo punto M di tangente variabile con continuità al variare del punto e tale che la curvatura in M sia funzione continua di questo punto.

Si hanno i teoremi:

III. - *Se la funzione $\delta(Q)$ è sommabile su C, rimane determinato un insieme N di punti di C di misura lineare nulla, tale che, se M è in $C - N$, la funzione di Q:*

$$\delta(Q) \log \frac{1}{\overline{MQ}}$$

è sommabile su C, essendo inoltre (per $M \subset C - N$)

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} \int_C \delta(Q) \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q s = \int_C \delta(Q) \log \frac{1}{\overline{MQ}} d_Q s .$$

IV. - *Se $\delta(Q)$ è sommabile su C, rimane su essa determinato un insieme N di misura lineare nulla, tale che, per $M \subset C - N$, la funzione di Q:*

$$\delta(Q) \frac{\partial}{\partial n_M} \log \frac{1}{\overline{MQ}}$$

è sommabile su C, risultando inoltre (per $M \subset C - N$):

(1) Per la dimostrazione di tali teoremi cfr. G. Fichera: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* [Annali di matematica s. IV - t. XXVII (1948), e *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'eq.* $\Delta_4 u = f$, s. IV, v. 77 (1947)].

$$\left\{\begin{aligned}&\lim_{P\to M(\text{su } n_M^+)}\int_C \delta(Q)\frac{\partial}{\partial n_M}\log\frac{1}{\overline{PQ}}\,d_Q s =\\&\qquad = -\pi\,\delta(M)+\int_C \delta(Q)\frac{\partial}{\partial n_M}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\,d_Q s\ ,\\&\lim_{P\to M(\text{su } n_M^-)}\int_C \delta(Q)\frac{\partial}{\partial n_M}\log\frac{1}{\overline{PQ}}\,d_Q s =\\&\qquad = \pi\,\delta(M)+\int_C \delta(Q)\frac{\partial}{\partial n_M}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\,d_Q s\ .\end{aligned}\right.$$

V. - *Se $\mu(Q)$ è sommabile su C, rimane su essa determinato un insieme N di misura lineare nulla, tale che, per $M \subset C - N$, la funzione di Q*

$$\mu(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\log\frac{1}{\overline{MQ}}$$

è sommabile su C, risultando inoltre (per $M \subset C - N$)

$$\left\{\begin{aligned}&\lim_{P\to M(\text{su } n_M^+)}\int_C \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\log\frac{1}{\overline{PQ}}\,d_Q s =\\&\qquad = \pi\,\mu(M)+\int_C \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\,d_Q s\ ,\\&\lim_{P\to M(\text{su } n_M^-)}\int_C \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\log\frac{1}{\overline{PQ}}\,d_Q s\ ,\\&\qquad = -\pi\,\mu(M)+\int_C \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\,d_Q s\ .\end{aligned}\right.$$

VI. - *Se $\mu(Q)$ è sommabile su C, rimane su di essa determinato un insieme N di misura lineare nulla, tale che, assunto M in $C - N$, la differenza tra le derivate del potenziale di doppio strato:*

$$\int \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q s$$

secondo la normale n_M a C in M, calcolate in due punti di n_M, simmetrici rispetto a M, tende a zero quando i punti tendono a M.

Notiamo il seguente corollario ai teoremi precedenti:

VII. – *Indicati con $V(P)$ e $W(P)$ i potenziali di semplice e doppio strato, considerati nei teoremi precedenti, supposto P un punto sulla normale positiva a C in M e P' il suo simmetrico rispetto a M, si ha quasi ovunque su C:*

$$\lim_{P \to M\,(\text{su } n_M^+)} \frac{\partial V(P)}{\partial n_M} - \lim_{P' \to M\,(\text{su } n_M^-)} \frac{\partial V(P')}{\partial n_M} = -2\pi\delta(M),$$

$$\lim_{P \to M\,(\text{su } n_M^+)} W(P) - \lim_{P' \to M\,(\text{su } n_M^-)} W(P') = -2\pi\mu(M).$$

VIII. – *Se $\delta(Q)$ e $\mu(Q)$ sono funzioni sommabili su C, i potenziali bi-iperarmonici di semplice e doppio strato*

$$\int_C \delta(Q) \cdot \overline{PQ} \cdot \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q s, \quad \int_C \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}} \right) d_Q s$$

sono funzioni continue del punto P in tutto lo spazio.

Consideriamo la classe $\{u\}$ delle funzioni dotate in $D - FD$ di derivate parziali fino al quarto ordine, che soddisfano, in ogni punto di $D - FD$, l'equazione $\Delta_4 u = f$ (essendo $f(P)$ una funzione hölderiana nel dominio D) e verificano le seguenti proprietà:

α) detta n_M la normale a FD in M, di cui supporremo sempre positivo il verso che va dall'esterno all'interno di D e, assunto su essa il punto P interno a D, esistono per quasi tutti i punti M di FD i limiti:

$$
(8) \qquad \begin{cases}
\lim\limits_{P \to M\,(\text{su } n_M^+)} u(P) = \mu_1(M) \\[2ex]
\lim\limits_{P \to M\,(\text{su } n_M)} \Delta_2 u(P) = \mu_2(M) \\[2ex]
\lim\limits_{P \to M\,(\text{su } n_M^+)} \dfrac{\partial u(P)}{\partial u_M} = \delta_1(M) \\[2ex]
\lim\limits_{P \to M\,(\text{su } n_M^+)} \dfrac{\partial \Delta_2 u(P)}{\partial n_M} = \delta_2(M)
\end{cases}
$$

β) le funzioni $\mu_1(M)$, $\mu_2(M)$, $\delta_1(M)$, $\delta_2(M)$ sono sommabili su FD e, comunque si assume il punto P interno a D, si ha:

$$
8\pi u(P) = \int_{FD} \left[\mu_1(Q) \frac{\partial \Delta_2 \left(\overline{PQ}^2 \log \dfrac{1}{\overline{PQ}} \right)}{\partial n_Q} - \right.
$$

$$
(9) \qquad - \delta_1(Q)\, \Delta_2 \left(\overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}} \right) + \mu_2(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left(\overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}} \right) -
$$

$$
\left. - \delta_2(Q)\, \overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}} \right] d_Q s - \int_D f(Q)\, \overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_Q T
$$

mentre per ogni punto P esterno a D, si ha:

$$0 = \int_{FD} \left[\mu_1(Q) \frac{\Delta_2\left(PQ \log \frac{1}{\overline{PQ}}\right)}{\partial n_Q} - \right.$$

$$(10) \qquad - \delta_1(Q)\,\Delta_2\left(\overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}}\right) + \mu_2(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}}\right) -$$

$$\left. - \delta_2(Q)\,\overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}} \right] d_Q s - \int_D f(Q)\,\overline{PQ}^2 \log \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_Q T.$$

Dai teoremi III, IV, V, VI, VII, VIII segue il:

IX. - *Se* $\mu_1(Q)$, $\delta_1(Q)$, $\mu_2(Q)$, $\delta_2(Q)$ *sono funzioni sommabili su* FD, *verificanti le* (10), *la funzione* $u(P)$ *definita dalla* (9) *appartiene a* $\{u\}$ [2].

Indicata infatti con $G(P)$ l'espressione a secondo membro della (9) e detto P' il simmetrico di P rispetto a M sulla normale n_M, supposto P interno a D, e P' esterno a D, si ha:

$$8\pi u(P) = G(P) - G(P')$$

e applicando ai due membri dell'uguaglianza successivamente gli operatori

$$1, \quad \frac{\partial}{\partial n_M}, \quad \Delta_2, \quad \frac{\partial \Delta_2}{\partial n_M}$$

e passando ogni volta al limite per $P \to M$, seguono le (8), cioè la dimostrazione dell'appartenenza di $u(P)$ alla $\{u\}$.

L'equazione (10) equivale al seguente sistema di infinite equazioni:

(2) Cfr. L. Amerio: *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k}\, u = f$. [Annali di Matematica, s. IV, t. XXIV - 1944-45)].

$$(11)\int_{FD}\left(\mu_1\frac{d\Delta_2\omega_k}{dn}-\delta_1\Delta_2\omega_k+\mu_2\frac{d\omega_k}{dn}-\delta_2\omega_k\right)ds-\int_D f\omega_k\,dT=0\,.$$

Proponiamoci di calcolare la soluzione del problema al contorno:

$$\Delta_4 u = f \quad \text{in } D - FD$$

$$u = \mu_1 \quad \Delta_2 u = \mu_2 \quad \text{su } FD$$

appartenente alla classe $\{u\}$, essendo f, μ_1, μ_2 funzioni note.

Per ogni k la costante

$$b_k = \int_{FD}\left(\mu_1\frac{d\Delta_2\omega_k}{dn}+\mu_2\frac{d\omega_k}{dn}\right)ds-\int_D f\omega_k\,dT$$

risulta nota.

Possiamo così scrivere il sistema (11)

$$(12) \qquad \int_{FD}\left(\delta_1\Delta_2\omega_k+\delta_2\omega_k\right)ds=b_k\,.$$

È questo un sistema si Fischer-Riesz, nel vettore incognito di componenti (δ_2, δ_1). Poichè il sistema di vettori $(\omega_k, \Delta_2\omega_k)$ è completo su FD, posto

$$\delta_2^{(n)}=\sum_{h=0}^{n}c_h^{(n)}\omega_k\,, \qquad \delta_1^{(n)}=\sum_{h=0}^{n}c_h^{(n)}\Delta_2\omega_k$$

e sostituendo in (12) e determinate le $c_h^{(n)}$ in modo da verificare il sistema

$$\sum_{h=0}^{n}c_h^{(n)}\int_{FD}(\Delta_2\omega_h\Delta_2\omega_k+\omega_h\omega_k)\,ds=b_k$$

$$(k=0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots\ldots,\,n)$$

le due successioni $\delta_1^{(n)}$, $\delta_2^{(n)}$ convergono in media verso δ_1 e δ_2.

Una volta calcolate δ_1 e δ_2 la soluzione del problema nei punti interni a D è fornita dalla (9).

4. - Maggiorazione dell'errore di approssimazione (3).

Vogliamo ora indicare un procedimento mediante il quale si rende possibile maggiorare l'errore di approssimazione che si commette applicando il primo procedimento di calcolo.

A tal uopo consideriamo nella classe Γ delle funzioni bi-iperarmoniche u nel dominio D, rappresentabili mediante la formula (5), il seguente funzionale:

$$(14) \qquad I(u) = \frac{\int_D u^2 \, dT}{\int_{FD} \{ u^2 + (\Delta_2 u)^2 \} \, ds} .$$

Dimostreremo che tale funzionale è dotato di estremo superiore finito nella suddetta classe.

Facciamo le posizioni seguenti:

$$\frac{d \Delta_2 \Gamma(P, Q)}{d n_Q} = H_1(P, Q)$$

$$\frac{d \Gamma(P, Q)}{d n_Q} = H_2(P, Q)$$

$$u = v_1(Q)$$

$$\Delta_2 u = v_2(Q) .$$

(3) Cfr. G. Fichera - *Sulla maggiorazione dell' errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della fisica matematica.* - Rend. dell' Acc. Nazionale di Scienze e Lettere di Napoli - Serie 4a - Vol. XVII - 1950.

Abbiamo :

$$\int_D u^2 \, d\,T = \int_D d_P\, T \int_{FD} \{ v_1(Q)\, H_1(P,Q) + v_2(Q)\, H_2(P,Q) \} \, d_Q\, s \times$$

$$\times \int_{FD} \{ v_1(M)\, H_1(P,M) + v_2(M)\, H_2(P,M) \} \, d_M\, s ,$$

da cui tenendo presente che sussistono le maggiorazioni (avendo indicato con A una costante) :

$$\left| H_1(P,Q) \right| < \frac{A}{\overline{PQ}}$$

$$\left| H_2(P,Q) \right| < A\, \overline{PQ} \log \overline{PQ} ,$$

si deduce

$$(15) \qquad \int_D u^2 \, d\,T = \sum_{ij}^{1,2} \int_{FD} \int_{FD} A_{ij}(Q,M)\, v_i(Q)\, v_j(M)\, d_Q\, s\, d_M\, s$$

avendo posto :

$$A_{11}(Q,M) = \int_D H_1(P,Q)\, H_1(P,M)\, d_P\, T$$

$$A_{12}(Q,M) = \int_D H_1(P,Q)\, H_2(P,M)\, d_P\, T$$

$$A_{21}(Q,M) = \int_D H_2(P,Q)\, H_1(P,M)\, d_P\, T$$

$$A_{22}(Q,M) = \int_D H_2(P,Q)\, H_2(P,M)\, d_P\, T$$

e la (14) sarà:

$$I(u) = \mathcal{J}(v_1, v_2) =$$

$$(14') \qquad = \frac{\sum\limits_{ij}^{1,2} \int\limits_{FD}\int\limits_{FD} A_{ij}(Q, M)\, v_i(Q)\, v_j(M)\, d_Q s\, d_M s}{\int\limits_{FD} \left(\sum\limits_{i=1}^{2} v_i^2(Q) \right) d_Q s} \, .$$

Poichè la matrice nucleare

$$|| A_{ij}(Q, M) ||$$

è simmetrica e definita positiva, per un noto teorema ([4]), il funzionale $I(u)$ avrà estremo superiore finito nella classe Γ; indicato con K tale estremo superiore, resta così dimostrata la seguente formula di maggiorazione globale:

$$\int\limits_{D} u^2\, dT \leq K \left\{ \int\limits_{FD} [u^2 + (\Delta_2 u)^2]\, ds \right\} .$$

Da essa dedurremo una formula di maggiorazione puntuale. Detto P un punto interno al dominio D e $\delta(P)$ la distanza di P dalla frontiera di D e indicato con ρ, ϑ un sistema di coordinate polari di polo P, sussiste, per $\rho < \frac{\delta(P)}{\sqrt{2}}$, il seguente teorema di media dovuto al prof. Picone ([5]):

$$u(P) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\rho, \vartheta)\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(\rho\sqrt{2}, \vartheta)\, d\vartheta ,$$

([4]) Cfr. M. Picone: *Appunti di Analisi Superiore* – pag. 647.

([5]) M. Picone: *Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche.* – [Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences. – t. XXXVIII (2)-(1936)].

da cui moltiplicando ambo i membri per ρ^2 e integrando tra 0 e R, essendo $R < \frac{\delta(R)}{\sqrt{2}}$, si deduce:

$$(16') \qquad \frac{R^2}{2} u(P) = \frac{1}{\pi} \int_{C_R} u(Q)\, d_Q T - \frac{1}{4\pi} \int_{C_{R\sqrt{2}}} u(Q)\, d_Q T$$

avendo indicato con C_R e $C_{R\sqrt{2}}$ rispettivamente i due domini circolari di centro P e raggi R e $R\sqrt{2}$.

Dalla (16′) si deduce

$$|u(P)| \leq \frac{2}{\pi R^2} \int_{C_R} |u(Q)|\, d_Q T + \frac{1}{2\pi R^2} \int_{C_{R\sqrt{2}}} |u(Q)|\, d_Q T \leq$$

$$\leq \frac{5}{2\pi R^2} \int_{C_{R\sqrt{2}}} |u(Q)|\, d_Q T \leq \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \left(\int_{C_{R\sqrt{2}}} |u(Q)|^2\, dT \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \left(\int_D |u|^2\, dT \right)^{1/2}$$

e quindi la seguente formula di maggiorazione puntuale valevole per ogni punto P interno a D.

$$(16) \qquad |u(P)| < 5 \frac{K^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,\delta(P)} \left(\int_{FD} \{ u^2 + (\Delta_2 u)^2 \}\, ds \right)^{1/2}.$$

Per il calcolo della costante K si può procedere al modo seguente. Considerato il solito sistema $\{\omega_k\}$ di polinomi biperarmonici, indichiamo con K_m il massimo della seguente funzione delle $m + 1$ variabili $c_0, c_1, \ldots c_m$

$$I[c_0 \omega_0 + c_1 \omega_1 + \ldots + c_m \omega_m]$$

tale massimo si calcola elementarmente.

Dico che

$$(17) \qquad \lim_{m \to \infty} K_m = K .$$

Per dimostrare la (17) occorre portare un complemento al teorema II e cioè far vedere che la successione $\Omega^{(m)}$, di cui all'enunciato del detto teorema, converge in media nel dominio D verso la funzione bi-iperarmonica u, soluzione del problema (1). Infatti dalla (15) si deduce

$$\int_D [u - \Omega^{(m)}]^2 \, d\,T = \sum_{ij}^{1,2} \int_{FD}\int_{FD} A_{ij}(Q, M)\, W_i^{(m)}(Q)\, W_j^{(m)}(M)\, d_Q s\, d_M s ,$$

avendo posto

$$W_1^{(m)} = u - \Omega^{(m)}$$

$$W_2^{(m)} = \Delta_2 u - \Delta_2 \Omega^{(m)} ;$$

da cui si deduce l'asserto, dato che

$$\lim_{m \to \infty} \int_{FD} [W_1^{(m)}]^2 \, ds = \lim_{m \to \infty} \int_{FD} [W_2^{(m)}]^2 \, ds = 0 .$$

Ciò posto, dato $\varepsilon > 0$, sia u_ε una funzione di Γ, tale che

$$I[u_\varepsilon] > K - \varepsilon$$

e detta $\Omega_\varepsilon^{(m)}$ la successione di cui al teorema II, relativa alla u_ε, sarà, per quanto ora si è visto,

$$\lim_{m \to \infty} I[\Omega_\varepsilon^{(m)}] = I[u_\varepsilon] .$$

Pertanto detto m_ε un indice tale che

$$I[\Omega_{m_\varepsilon}] > K - \varepsilon ,$$

sarà altresì

$$K_{m_\varepsilon} > K - \varepsilon$$

ciò che dimostra la (17), essendo la successione K_m non decrescente.

È da presumere che la maggiorazione puntuale fornita dalla (16) sia molto larga. Essa – qualora ciò si rendesse necessario – può essere migliorata, sfruttando le seguenti considerazioni. Detto P_0 il punto interno a D, nel quale occorre migliorare la maggiorazione, si consideri il funzionale:

$$I_{P_0}[u] = \frac{|u(P_0)|^2}{\int_{FD} \{ u^2 + (\Delta_2 u)^2 \} ds} .$$

Tale funzionale è certamente limitato al variare di u in Γ e detto $E(P_0)$ il suo estremo superiore, sarà

$$E(P_0) \leq \frac{25 K}{\pi [\delta (P_0)]^2} .$$

Il calcolo di $E(P_0)$ si consegue con un procedimento analogo a quello di K. Si vede subito che, supposta - cosa lecita - l'origine delle coordinate in P_0, si ha

$$E(P_0) = \lim_{m \to \infty} \frac{A_{00}^{(m)}}{A^{(m)}} , \tag{18}$$

avendo indicato con $A_{00}^{(m)}$ e $A^{(n)}$ rispettivamente il complemento algebrico dell'elemento di indici (0,0) e il determinante della matrice

$$\left\| \int_{FD} (\omega_k \omega_h + \Delta_2 \omega_k \Delta_2 \omega_h) ds \right\|$$

$$(h, k = 0, 1, \ldots, m) .$$

5. - Dimostrazione del teorema di esistenza.

Dimostreremo adesso il teorema di esistenza per il problema (1) di pag. 100 senza far ricorso alla teoria delle funzioni integrali ed ammettendo che il contorno possa avere qualsiasi tipo di singolarità.

Tale teorema sarà dimostrato nella classe delle funzioni bi-iperarmoniche in $D - FD$, aventi le derivate prime, il Laplaciano e le derivate prime del Laplaciano di quadrato sommabile nel dominio D, e per le quali, fissato quasi ovunque M su FD, esistono i due limiti:

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M^+)} u(P) \qquad \lim_{P \to M (\text{su } n_M^+)} \Delta_2 u(P) .$$

Per dimostrare tale teorema faremo l'ipotesi che le funzioni f e g siano le tracce su FD di due funzioni continue definite in tutto D, derivabili in ogni punto interno a D ed aventi le derivate prime di quadrato sommabile in D. Tali funzioni definite in tutto D seguiteremo a chiamare con le lettere f e g.

Cominciamo col porre

$$v = \Delta_2 u$$

con che si vede che la funzione v deve essere soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u = 0$, con assegnati sul contorno, per la funzione v, i valori della g.

Per la risoluzione dell'anzidetto problema di Dirichlet occorre conseguire un lemma, alla dimostrazione del quale premettiamo alcune definizioni e notazioni.

Sia C una curva regolare, indicheremo con C_ρ^+ la curva parallela a C ed avente da C distanza ρ, che si trova dalla parte della normale positiva e con C_ρ^- quella che si trova dalla parte opposta. Se E è un insieme di C, con E_ρ^+ e E_ρ^- indicheremo i corrispondenti insiemi su C_ρ^+ e su C_ρ^-. Diremo, infine, $s(E)$ la misura lineare (nel senso di Lebesgue) di E e $s(E_\rho^\pm)$ quella di $E_\rho^\pm$.

Lemma (6). *Sia D un dominio del piano la cui frontiera possa decomporsi in un numero finito di archi di curva di classe 2 e sia* $\lambda(Q)$ *una funzione verificante in ogni dominio completamente interno a D una condizione di Hölder e di quadrato sommabile in D. Per quasi tutti i punti M di FD riescono sommabili in D le funzioni di Q:*

$$(19)\qquad \lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_1}\log\frac{1}{\overline{MQ}}, \qquad \lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_2}\log\frac{1}{\overline{MQ}}$$

e si ha:

$$(20)\qquad \lim_{P\to M(\text{su } n_M^+)}\int_D \lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_1}\log\frac{1}{\overline{PQ}}\,d_Q T = \int_D \lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_1}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\,d_Q T$$

$$\lim_{P\to M(\text{su } n_M^+)}\int_D \lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_2}\log\frac{1}{\overline{PQ}}\,d_Q T = \int_D \lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_2}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\,d_Q T.$$

Poichè si ha:

$$\left|\lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_1}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\right| \leq \left|\lambda(Q)\right|\frac{1}{\overline{MQ}}$$

$$\left|\lambda(Q)\frac{\partial}{\partial x_2}\log\frac{1}{\overline{MQ}}\right| \leq \left|\lambda(Q)\right|\frac{1}{\overline{MQ}}$$

e, dato che $\int_{FD}\frac{1}{\overline{MQ}}\,d_M s$ è hilbertiana su D, segue la sommabilità su D, per quasi tutti gli M di FD, delle funzioni (19).

Sia C un arco di curva regolare, facente parte della frontiera di D e tale che, si possa determinare $\rho_0 > 0$, in modo che, per $0 \leq \rho \leq \rho_0$, l'insieme descritto da C_ρ^+ appartenga a D.

(6) Cfr. G. Fichera: ***Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico.*** [Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, v. IV (1950)].

Si noti che tutti i punti di FD, in cui è determinata la normale, sono interni ad un tale arco di curva regolare. Sia inoltre L una costante positiva per la quale si abbia, al variare di ρ nell'intervallo chiuso $(0, \rho)$,

$$\int_D \left[\int_{C_\rho^+} \frac{d_P s_\rho^+}{\overline{PQ}} \right]^2 d_Q T < L .$$

Una tale costante esiste certamente dato che è

$$\int_D \left[\int_{C_\rho^+} \frac{d_P s_\rho^+}{\overline{PQ}} \right]^2 d_Q T = \int_{C_\rho^+} \int_{C_\rho^+} d_P s_\rho^+ \, d_M s_\rho^+ \int_D \frac{1}{\overline{PQ}} \frac{1}{\overline{MQ}} d_Q T \leq$$

$$\leq B \int_{C_\rho^+} \int_{C_\rho^+} \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_P s \, d_M s ,$$

essendo B una costante positiva e dato che l'ultimo integrale scritto è limitato al variare di ρ.

Proveremo che, comunque si assuma su C l'insieme misurabile E, si ha uniformemente rispetto a E,

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{E_\rho^+} d_P s_\rho^+ \int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q T =$$

$$= \int_E d_M s \int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{MQ}} d_Q T$$

$$(i = 1, 2) .$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia T_ε un dominio interno a D tale che

$$\int_{D - T_\varepsilon} |\lambda(Q)|^2 d_Q T < \frac{\varepsilon^2}{9 L} .$$

Esiste un conveniente ρ_ε (che supponiamo $< \rho_0$), tale che, per $\rho < \rho_\varepsilon$, si ha, qualunque sia E in C:

$$\left| \int_{E_\rho^+} d_P\, s_\rho^+ \int_{T_\varepsilon} \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_Q T - \int_E d_M\, s \int_{T_\varepsilon} \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{MQ}}\, d_Q T \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Abbiamo allora, qualunque sia E in C per $\rho < \rho_\varepsilon$:

$$\left| \int_{E_\rho^+} d_P\, s_\rho^+ \int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_Q T - \int_E d_M\, s \int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{MQ}}\, d_Q T \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{E_\rho^+} d_P\, s_\rho^+ \int_{T_\varepsilon} \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_Q T - \int_E d_M s \int_{T_\varepsilon} \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{MQ}}\, d_Q T \right| +$$

$$+ \int_{C_\rho^+} d_P\, s_\rho^+ \int_{D - T_\varepsilon} |\lambda(Q)| \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_Q T + \int_C d_M\, s \int_{D - T_\varepsilon} |\lambda(Q)| \frac{1}{\overline{MQ}}\, d_Q T \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\int_{D - T_\varepsilon} |\lambda(Q)|^2\, d\, T \cdot \int_D \left[\int_{C_\rho^+} \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_P\, s_\rho^+ \right]^2 d_Q T} +$$

$$+ \sqrt{\int_{D - T_\varepsilon} |\lambda(Q)|^2\, d\, T \int_D \left[\int_C \frac{1}{\overline{MQ}}\, d_M\, s \right]^2 d_Q T} < \varepsilon .$$

Ciò prova il nostro asserto. Ne segue che la funzione del punto P di C_ρ^+

$$\int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{PQ}}\, d_Q T$$

converge in misura, quando $\rho \to 0$, alla funzione del punto M di C

$$\int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{MQ}} \, d_Q T .$$

Per un noto teorema sulla convergenza in misura, fissato quasi ovunque M in C esiste una successione di punti $\{P^{(n)}\}$ su n_M^+ tale che (7)

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)} = M$$

e per la quale

$$(21) \quad \lim_{n \to \infty} \int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{P^{(n)} Q}} \, d_Q T = \int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{MQ}} \, d_Q T .$$

Siano $\xi_1 = \varphi_1(u)$, $\xi_2 = \varphi_2(u)$ le equazioni parametriche della C e A_n il suo dominio base.

Consideriamo, per $0 \leq \rho \leq \rho_0$, il sistema di coordinate curvilinee a curve parallele dato dalla trasformazione

$$(22) \qquad \begin{cases} y_1 = \varphi_1(u) + \rho\, n_1(u) \\ y_2 = \varphi_2(u) + \rho\, n_2(u) \end{cases}$$

essendo n_1 e n_2 i coseni direttori della normale positiva a C in M di coordinate (φ_1, φ_2). Detto $\mathcal{J}(u, \rho)$ lo Jacobiano di tale trasformazione, sia ρ_0 abbastanza piccolo da riuscire

$$(23) \qquad \mathcal{J}(u, \rho) > m > 0 .$$

(7) Cfr. G. Fichera: *Intorno ai passaggio al limite sotto il segno di integrale.* [Portugaliae Mathematica vol. 4 (1943) pag. 17, tav. XVI].

Diciamo S la superficie descritta da C_ρ^+ al variare di ρ nell'intervallo chiuso $(0, \rho_0)$ e, posto

$$H(y_1, y_2) = \int_D \lambda(Q) \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q T,$$

consideriamo in $S - FS$ la funzione

$$g_i(P) = g_i(M, \rho) = n_1(M) \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_1} + n_2(M) \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_2}$$

$$(i = 1, 2).$$

Poichè le derivate di H sono sommabili in S (8), tale risulta $g_i(P)$ e si ha:

$$\int_S g_i(P)\, d\, T = \int_0^{\rho_0} d\rho \int_{A_n} g_i[\varphi_1 + \rho n_1, \varphi_2 + \rho n_2]\, \mathcal{J}\, d\, u.$$

Per la (23) ne segue che, per quasi tutti gli M di C, è sommabile nell' intervallo $(0, \rho_0)$ la funzione $g_i(M, \rho)$.

Pertanto la funzione di ρ

$$\int_0^{\rho_0} g_i(M, \tau)\, d\tau$$

è convergente per $\rho \to 0$, ma tale funzione altro non è, a meno di una costante additiva, che

$$-\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial y_i} \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q T = \int_D \lambda(Q) \frac{\partial}{\partial x_i} \log \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q T$$

considerata per P su n_M^+.

(8) Cfr. H. O. Friedrichs: *A theorem of Lichtenstein*. [Duke Mathematical Journal, vol. 14, n. 1 (1947)].

In virtù della (21) segue la (20) relativa a n_M^+.
Allo stesso modo si dimostra quella relativa a n_M^-.

Come corollario del lemma dimostrato, discende il seguente teorema di inversione, di tipo analogo a quello già dimostrato (9):

X. – *Se* $\varphi(Q)$ *è una funzione armonica in* $D - FD$, *tale che* $grad\,\varphi$ *abbia modulo di quadrato sommabile in* D, *se* $\mu(Q)$ *è una funzione sommabile su* FD, *e se per ogni* P *esterno a* D *è verificata la seguente equazione*:

$$\int_{FD} \mu(Q) \frac{d \log \overline{PQ}}{d n_Q} d_Q s + \int_D (grad\,\varphi(Q) \times grad \log \overline{PQ})\, d_Q T = 0 \tag{24}$$

la funzione armonica $u(P)$ *definita nel modo seguente*

$$\begin{aligned} u(P) = {} & \frac{1}{2\pi} \int_{FD} \mu(Q) \frac{d \log \overline{PQ}}{d n_Q} d_Q s + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_D (grad\,\varphi(Q) \times grad \log \overline{PQ})\, d_Q T \end{aligned} \tag{25}$$

verifica la seguente condizione al contorno

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M^+)} u(P) = \mu(M) \tag{26}$$

in quasi tutti i punti di FD.

Infatti, detti P e P' due punti sulla normale n_M simmetrici rispetto a M, dalle (24) e (25) otteniamo:

$$\begin{aligned} u(P) = {} & \frac{1}{2\pi} \int_{FD} \mu(Q) \left(\frac{d \log \overline{PQ}}{d n_Q} - \frac{p \log \overline{P'Q}}{d n_Q} \right) d_Q s + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_D \{ grad\,\varphi(Q) \times grad (\log \overline{PQ} - \log \overline{P'Q}) \}\, d_Q T . \end{aligned}$$

(9) Cfr. teorema IX.

Facendo tendere P (e quindi P') ad M, in virtù del teorema V e del lemma si trova la (26).

La dimostrazione dell'esistenza di una funzione armonica, la quale su FD assume i valori $\mu(Q)$, è così ricondotta alla risoluzione dell'equazione integrale (24) nell'incognita $grad\,\varphi\,(Q)$.

A tale scopo osserviamo che, con un ragionamento analogo a quello seguito nella dimostrazione del teorema I, si constata che la (24) equivale al seguente sistema di infinite equazioni integrali di Fischer-Riesz:

$$\int_{FD} \mu(Q) \frac{d\psi_i}{dn}\, ds = -\int_{D} (grad\,\varphi \times grad\,\psi_i)\, d\,T \tag{27}$$

$$i = 1, \ldots, n)$$

avendo indicato con $\{\psi_i\}$ un sistema completo di polinomi armonici.

Supponiamo altresì - ciò che è ben lecito - che il sistema di vettori $\{grad\,\psi_i\}$ sia ortonormale in D.

Sia H una funzione tale che $|\,grad\,H\,|^2$ sia sommabile e che su FD coincida con μ. Si ha, detta $\{T_k\}$ una successione di domini regolari che invade D:

$$c_i = \lim_{k\to\infty} \int_{FT_k} H \frac{d\psi_i}{dn}\, ds = -\lim_{k\to\infty} \int_{T_k} (grad\,H \times grad\,\psi_i)\, dT =$$

$$= -\int_{D} (grad\,H \times grad\,\psi_i)\, d\,T\,.$$

Segue da ciò che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ è convergente.

Ne viene che la serie

$$-\sum_{i=1}^{\infty} (c_i\, grad\,\psi_i)$$

converge in media nel dominio D, e siccome le componenti dei suoi termini sono funzioni armoniche, essa converge uniformemente in ogni dominio interno a D verso il gradiente di una funzione armonica φ. Poichè si ha:

$$c_i = -\int_D (grad\,\varphi \times grad\,\psi_i)\, d\,T$$

si deduce che riescono verificate le (27).

In virtù del teorema precedente si ottiene la soluzione del problema di Dirichlet posto.

Possiamo pertanto considerare la funzione armonica v, la quale sul contorno coincide con la g e quindi la dimostrazione del nostro teorema di esistenza si riconduce a quello della risoluzione del seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} \Delta_2 u = v\ , & \text{in } D - FD\,, \\ u = f\ , & \text{su } FD\,. \end{cases}$$

Poniamo

$$w_0(P) = \frac{1}{2\pi}\int_D v(P) \cdot log\overline{PQ}\, d_Q\, T$$

$$u(P) = w(P) + w_0(P)$$

e le posizioni fatte riconducono la dimostrazione di esistenza della u a quella della funzione w, soluzione del seguente problema armonico

$$\begin{array}{ll} \Delta_2 w = 0 & \text{in } D - FD \\ w = f - w_0 & \text{su } FD\,. \end{array}$$

Per affermare l'esistenza della soluzione di questo problema basterà dimostrare che la funzione $w_0(P)$ ha derivate prime di quadrato sommabile in D. In virtù di un ben noto teorema di LICHTENSTEIN, tale circostanza certo si verifica se $v(Q)$ è di quadrato sommabile in D (10).

D'altra parte, in virtù di quanto sopra dimostrato, si ha

$$v(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{FD} g(Q)\frac{d\log\overline{PQ}}{dn_Q}d_Q s+\frac{1}{2\pi}\int_D (grad\,\varphi(Q)\times grad\log\overline{PQ})\,dT$$

essendo il vettore $grad\,\varphi$ di norma sommabile in D.

Per dimostrare la sommabilità di $[v(Q)]^2$, posto

$$\Psi(Q)=|grad\,\varphi|\ ,$$

basterà far vedere che i due seguenti integrali

$$\int_D\left[\int_{FD} g(Q)\frac{d\log\overline{PQ}}{dn_Q}d_Q s\right]^2 d_P T\ ,\qquad \int_D\left[\int_D \Psi(Q)\frac{1}{\overline{PQ}}d_Q T\right]^2 d_P T$$

hanno valore finito. Ma ciò si verifica certamente, avendosi:

$$\int_D\left[\int_{FD} g(Q)\frac{d\log\overline{PQ}}{dn_Q}d_Q s\right]^2 d_P T=$$

$$=\int_D d_P T\int_{FD} g(Q)\frac{d\log\overline{PQ}}{dn_Q}d_Q s\int_{FD} g(M)\frac{d\log\overline{MQ}}{dn_Q}d_M s=$$

$$=A\int_{FD}\int_{FD} g(Q)\,g(M)\,d_Q s\,d_M s\int_D\frac{1}{\overline{PQ}}\,\frac{1}{\overline{PM}}\,d_P T\leq$$

$$\leq AB\int_{FD}\int_{FD} g(Q)\,g(M)\log\frac{B}{\overline{MQ}}\,d_Q s\,d_M s$$

(10) Cfr. H. O. FRIEDRICHS: *A theorem of Lichtenstein*. [Duke Mathematical Journal, vol. 14, n. 1 (1947)].

$$\int_D \left[\int_D \Psi(Q) \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q T \right]^2 d_P T \leq$$

$$\leq \int_D d_P T \int_D \Psi(Q) \frac{1}{\overline{PQ}} d_Q T \int_D \Psi(M) \frac{1}{\overline{PM}} d_M T \leq$$

$$\leq B \int_D \int_D \Psi(Q) \Psi(M) \log \frac{B}{\overline{PM}} d_Q T \, d_M T \quad .$$

6. - Caso di una piastra quadrata: Calcolo secondo il primo metodo.

Sia D il quadrato di centro l'origine degli assi e semilato 1 . Consideriamo il seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} w = \Delta_2 w = 0 & \text{su } FD \\ \Delta_4 w = 1 & \text{in } D - FD \end{cases}$$

Sia w_0 una nota funzione la quale in $D - FD$ verifica

$$\Delta_4 w_0 = 1 \quad ,$$

precisamente noi assumeremo la funzione:

$$w_0 = \frac{1}{8} \left[x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 \right] .$$

Poniamo

$$u = w - w_0 .$$

Vediamo in tal modo che la nuova funzione incognita verifica le seguenti condizioni:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} u = -w_0 \\ \Delta_2 u = -\Delta_2 w_0 \end{array}\right\} & \text{su } FD \\ \Delta_4 u = 0 & \text{in } D - FD \end{array}\right.$$

Il metodo, conformemente a quanto si è detto nel paragrafo 2, consiste nell'approssimare in media su FD i valori noti di u e $\Delta_2 u$, per mezzo dei polinomi bi iperarmonici, il che è possibile in virtù di un teorema di completezza dimostrato in precedenza, e nell'assumere i vari polinomi approssimanti della u e le derivate di tali polinomi come approssimazioni delle derivate della u nell'interno del dominio D. Abbiamo in tal modo dimostrato che si ha la convergenza uniforme nell'interno di D.

Considerando i polinomi bi-iperarmonici di grado non superiore a 6, si ottiene la seguente approssimazione per la u:

$$\begin{aligned} u \simeq -0,06003886 + 0,05136480\,(x^2+y^2) + \\ + 0,00595386\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \\ + 0,00242448\,(x^2+y^2)\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

e quindi la funzione w che risolve il nostro problema

$$\begin{aligned} w = 0,125\,(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1) - 0,06003886 + \\ + 0,05136480\,(x^2+y^2) + \\ + 0,00595386\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \\ + 0,00242448\,(x^2+y^2)\,(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\,. \end{aligned}$$

Vediamone il valore in $(0,0)$, cioè lo spostamento della piastra nel centro

$$w\,(0,0) = 0,06496113\,.$$

Il risultato ottenuto è in perfetto accordo con quello del NADAI [11] che ci dà il valore $0,06496$.

Applicando poi la formula (18) del n. 4, si ha

$$E(0,0) \simeq 0,18$$

con che si riscontra che $|W(0,0)|^2$ fornisce un valore approssimato a quello dell'effettiva soluzione a meno di $0,0002$.

7. - Caso di una piastra quadrata: Calcolo mediante il secondo metodo.

L'equazione (12) del n. 3, nel caso in ispecie si scrive al modo seguente:

$$\sum_{K=1}^{n} c_k \int_{FD} (\omega_k \, \omega_h + \Delta_2 \, \omega_k \, \Delta_2 \, \omega_h) \, ds = - \int_{D} \omega_h \, d\, T$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \, a_{hk} = d_h \qquad\qquad (h = 1, \ldots, n)$$

avendo posto

$$a_{hk} = \int_{FD} \omega_k \, \omega_h \, ds + \int_{FD} \Delta_2 \, \omega_k \, \Delta_2 \, \omega_h \, ds$$

$$d_h = - \int_{D} \omega_h \, d\, T .$$

(11) Cfr. A. NADAI: *Die Elastische Platten.* [Berlin, Verlag von Julius Springer (1925)].

Considerando solamente i polinomi di grado non superiore a 6, si ottiene un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite c_1, c_2, c_3, c_4, le cui soluzioni sono:

$$c_1 = -0,61181487$$

$$c_2 = 0,01809846$$

$$c_3 = -0,10984226$$

$$c_4 = 0,00012483 .$$

Vogliamo determinare l' abbassamento della piastra nel punto $P(0,0)$, applicando il secondo metodo.

Ricorrendo alla formula [12]:

$$u(P) = \frac{1}{8\pi}\int_{FD}\left[\overline{PQ}^2 \log PQ\, d\frac{\Delta_2 u}{dn} - u\frac{d\Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn}\right] d_Q s +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int_{FD}\left|\Delta_2(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})\frac{du}{dn} - \Delta_2 u \frac{d(\overline{PQ}^2 \log \overline{PQ})}{dn}\right| d_Q s +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int_D \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}\, d_Q T$$

e tenendo conto che

$$u = \Delta_2 u = 0 \qquad \text{su } FD$$

$$d\frac{\Delta_2 u}{dn} = \sum_{k=1}^{4} {}_k c\, \omega_k$$

$$\frac{du}{dn} = \sum_{K=1}^{4} c_k\, \Delta_2\, \omega_k ,$$

nell' origine $(0,0)$ abbiamo:

$$u(0,0) = 0,06888733 .$$

[12] Cfr. con la (9).