ENRICO MAGENES

Condizioni sufficienti per il minimo relativo in certi problemi di Mayer

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 78-98

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__78_0>

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER IL MINIMO RELATIVO IN CERTI PROBLEMI DI MAYER

Memoria (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Padova*).

È noto che il problema di BOLZA, in cui rientrano sia quello di MAYER che quello di LAGRANGE, nella formulazione ormai abituale datagli da G. A. BLISS, consiste nella ricerca del minimo del funzionale

$$(1) \qquad \mathcal{J} = g\,(x_1, y_1(x_1), \ldots, y_n(x_1), x_2, y_1(x_2), \ldots, y_n(x_2)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, d\,x$$

in una classe di funzioni $y_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ soddisfacenti a certe equazioni differenziali

$$(2) \qquad \varphi_\beta\,(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, m < n)$$

e a certe condizioni ai limiti

$$(3) \qquad \psi_\mu\,(x_1, y_1(x_2), \ldots, y_n(x_1), x_2, y_1(x_2), \ldots, y_n(x_2)) = 0$$

$$(\mu = 1, \ldots, p \leq 2\,n + 2)\,.$$

Si deve sopratutto alla scuola americana di Calcolo delle Variazioni, e in particolare a G. A. BLISS, L. M. GRAVES, M. R. HESTENES, M. MORSE, E. J. MCSHANE, W. T. REID, una trattazione

(*) Pervenuta in Redazione il 12 ottobre 1950.

mirabile della teoria dei minori relativi di questo problema, con una lunga serie di lavori che occupano gli ultimi 30 anni circa (1).

Questa teoria si imposta considerando $\mathcal{J}$ come funzionale della variabile (naturalmente condizionata) costituita dalla curva $\Gamma\,[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$ dello spazio a $n+1$ dimensioni $(x, y_1, \ldots, y_n)$ e definendo di conseguenza come intorno (ρ) di Γ l'insieme dei punti del detto spazio distanti da Γ non più di ρ. La cosa è ben naturale se le condizioni (2) e (3) sono date in forma generale: ma capitano problemi di Bolza in cui esse sono date in modo tale che le variabili $y_i(x)$ possono rispetto ad esse dividersi in due gruppi, $y_k(x)$ $(k = 1, \ldots, r < n)$ e $y_j(x)$ $(j = r+1, \ldots, n)$, di cui solo il primo sia *effettivamente* (per il significato concreto del problema) da considerarsi come variabile (e questa volta indipendente, salvo soddisfare alle (3)). In questi casi è più naturale assumere come variabile la curva $C\,[y_1(x), \ldots, y_r(x)]$ dello spazio a $r+1$ dimensioni $(x, y_1, \ldots, y_r)$ e considerare $\mathcal{J}$ come funzionale di C.

Mi spiego meglio con il seguente ben noto tipo di problema di Mayer, al quale è in effetti dedicato il presente lavoro. Sia

$$\mathcal{J} = y_2(x_2)\,;$$

le (2) e (3) si riducano alle

$$(2') \qquad \varphi(x, y_1, y'_1, y_2) - y'_2 = 0$$

$$(3') \quad x_1 - a = 0,\ x_2 - b = 0,\ y_2(x_1) - y_{2,a} = 0\ [a, b, y_{2,a}\ \text{costanti}]$$

(1) Una bibliografia veramente notevole per la teoria dei minimi relativi del problema di Bolza si trova nel recente volume del Bliss: *Lectures on the Calculus of Variations* [University of Chicago Press – 1946]; essa arriva però fino al 1945 e inoltre non fa menzione dei lavori di L. Tonelli e B. Manià sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer e di Lagrange (L. Tonelli: Rend. Acc. Lincei (6) - vol. XXIV - 1936; B. Manià: Annali Scuola Normale Sup. Pisa (2) - vol. IV e V – 1935-36, Rend. Acc. Lincei (6) - vol. XXIII – 1936, Boll. U. M. I. - vol. XV–1936). Successivamente al 1945 sono da segnalare sopratutto una serie notevole di 6 lavori di Hestenes apparsi nei vol. 60 (1946), 61 (1947) e 62 (1947) dei Transactions of the Amer. Math. Soc., un lavoro di Reid apparso nel vol. 71 (1949) dell'American Journal of Math. e uno di L. Giuliano sui Rend. di Mat. e delle sue applic. del 1947.

e si vogliano le condizioni sufficienti per il minimo relativo (forte) di $\mathcal{J}$. È chiaro che in questo caso $y_2(x)$ (sotto certe ipotesi di regolarità della φ e delle $y_1(x)$ e $y_2(x)$) è univocamente determinata, una volta fissata la $y_1(x)$, dalle (2′) e (3′). Sicchè è naturale considerare $\mathcal{J}$ come funzionale della curva $C[y_1(x), a \leq x \leq b]$ e impostare il problema del minimo relativo dicendo che la curva $\overline{C}[\overline{y}_1(x)]$ è *minimante* (*relativa forte*) in una certa classe K di curve $C[y_1(x), a \leq x \leq b]$ per $\mathcal{J}$, se esiste un intorno (ρ) di $\overline{C}$ tale che per tutte le curve C di K appartenenti propriamente al detto intorno, cioè soddisfacenti in tutto (a, b) alla

$$|y_1(x) - \overline{y}_1(x)| \leq \rho,$$

risulti per le corrispondenti $y_2(x)$

$$y_2(b) \geq \overline{y}_2(b).$$

Orbene la teoria generale dei problemi di BOLZA intende invece $\mathcal{J}$ come funzionale della curva $\Gamma[y_1(x), y_2(x)]$, dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ siano condizionate dalle (2′) e (3′), e dice che $\overline{\Gamma}[\overline{y}_1(x), \overline{y}_2(x)]$ è minimante relativa forte per $\mathcal{J}$ in una certa classe H di curve Γ se esiste un intorno (ρ) di $\overline{\Gamma}$ tale che per tutte le curve $\Gamma[y_1(x), y_2(x)]$ di H appartenenti propriamente ad esso, cioè soddisfacenti in tutto (a, b) alle

$$|y_1(x) - \overline{y}_1(x)| \leq \rho, \quad |y_2(x) - \overline{y}_2(x)| \leq \rho,$$

risulti

$$y_2(b) \geq \overline{y}_2(b).$$

Evidentemente si restringe in questo modo il problema, limitando la classe delle coppie di funzioni $(y_1(x), y_2(x))$ rispetto alle quali la coppia $(\overline{y}_1(x), \overline{y}_2(x))$ è minimante per $\mathcal{J}$.

Si pone dunque la *questione di trovare le condizioni sufficienti per il minimo relativo di $\mathcal{J}$ inteso nel primo senso* (come funzionale della curva C); a prima vista non sembra che le classiche Condizioni I (o *regola dei moltiplicatori*), II'_N (o *di Weierstrass*), III' (o *di Clebsch*) e IV' (o *positività della variazione seconda*) (²), le quali sono sufficienti per il minimo inteso nell'ultimo senso, lo siano anche nella prima impostazione del problema; questa supposizione iniziale sembrerebbe confortata anche dal fatto che nelle dimostrazioni fino ad ora sviluppate per il problema generale di BOLZA viene adoperata in modo essenziale l'ipotesi che le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ siano *ambedue* "sufficientemente vicine" alle funzioni $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ e inoltre anche dal fatto che le condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore di J (inteso come funzionale della curva C), che fino ad ora si conoscono (dovute a B. MANIÀ, L. M. GRAVES e L. TONELLI (³)), non sono contenute nelle Condizioni I, II'_N, III', IV' (e d'altra parte la semicontinuità inferiore di J su $\bar{C}$ è condizione necessaria perchè $\bar{C}$ sia minimante per J).

Tuttavia si riesce a dimostrare, ed è appunto quanto sarà fatto nel presente lavoro, che le *Condizioni* I, II'_N, III', IV' *sono sufficienti anche per il minimo relativo di J inteso nel primo* (*e più generale*) *senso.*

Nel corso della dimostrazione si ottiene di più che le suddette condizioni sono anche sufficienti per la *semicontinuità inferiore uniforme* di $y_2(x)$ su $\bar{C}$ (v. n. 4).

La dimostrazione (v. n. 2, 3, 4, 5) si basa sulla costruzione di una certa curva variata e su una opportuna applicazione del

(²) Si veda il teorema 82 - 1 del cap. IX delle "*Lectures*...", del BLISS citato in (¹), delle quali seguo in linea di massima la nomenclatura, che è ormai la più abituale.

(³) B. MANIÀ: 1) *Esistenza dell'estremo assoluto in un classico problema di Mayer* [Ann. Scuola Normale Sup. Pisa (2) - Vol. II (1933), pp. 343-354]; 2) *Sul problema di Mayer* [Rend. Acc. Lincei - (6) - vol. XVIII (1933), pp. 358-365]; 3) *Sui problemi di Lagrange e di Mayer* [Rend. Circ. Mat. Palermo - vol. 58 (1934), pp. 285-310]; L. M. GRAVES: *The existence of an extremum in problems of Mayer* [Trans. Amer. Math. Soc. - vol. 39 (1936), pp. 456-471]; L. TONELLI: *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange* [Rend. Acc. Lincei (6) - vol. XXIV (1936), pp. 399-404] classico metodo del "campo di MAYER" (o "campo di estremali"), quale è stato sviluppato per il problema di BOLZA [4].

1. – Incominciamo col precisare le notazioni e le ipotesi (che non sono le minime possibili, ma sono le più abituali e semplici).

Sia $\varphi(x, y_1, y_1', y_2)$ una funzione definita e continua insieme alle sue derivate parziali dei primi tre ordini [5] per ogni (x, y_1) di un campo A [6], ogni y_2 di un intervallo (finito o no) aperto Δ e per ogni y_1'.

Fissati due punti a e b, interni alla proiezione di A sull'asse x, e un valore $y_{2,a}$ di Δ, diremo "*curva ammissibile*" ogni curva [7]

$$C: y_1 = y_1(x) \quad a \leq x \leq b \tag{4}$$

con $y_1(x)$ di classe D^1 in (a, b) [8], appartenente a A e tale che l'equazione differenziale

$$\varphi(x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x)) - y_2'(x) = 0 \tag{5}$$

ammetta in (a, b) una (e quindi una sola, per le ipotesi fatte su φ) soluzione $y_2(x)$ continua in (a, b), con derivata continua

[4] Si veda ad es. il cap. IX delle "*Lectures....*" del BLISS; non è privo di interesse osservare come (nello studio del nostro problema) il metodo del "campo di MAYER" mi si è rivelato più utile degli altri metodi cosidetti *diretti* di LEVI-REID e di MCSHANE-HESTENES.

[5] Indicheremo al solito l'operazione di derivazione rispetto a una variabile scrivendo questa variabile come indice: $\varphi_{y_1'}$, φ_{y_1}, ...

[6] Per campo A intendiamo un insieme di punti del piano (x, y_1) che contenga ogni suo punto di accumulazione.

[7] È opportuno osservare, a scanso di equivoci, che il termine "curva ammissibile" è qui usato in un senso che è diverso da quello usato dal BLISS nelle sue "*Lectures...*" e che si avvicina di più alla terminologia classica di BOLZA.

[8] Seguendo una terminologia introdotta da BOLZA, si suole dire che una funzione $f(x)$ $(\leq x \leq b)$ è di classe C^s in (a, b) quando ammette continue le derivate fino all'ordine s e che è di classe D^s in (a, b) se è ivi continua e si può dividere (a, b) in un numero finito di parti in ciascuna delle quali $f(x)$ è di classe C^s.

salvo negli eventuali punti di discontinuità di $y'_1(x)$ ([9]), e tale che i valori $y_2(x)$ appartengano Δ e che soddisfi alla

$$(6) \qquad y_2(a) = y_{2,a}\,.$$

Per metter in rilievo che a ogni curva ammissibile come la (4) è associata una determinata soluzione $y_2(x)$ della (5), indicheremo sempre d'ora innanzi la C col simbolo $C[y_1(x)\,;\,y_2(x)]$.

Ad ogni curva ammissibile C corrisponde dunque un valore per il funzionale

$$\mathcal{J}(C) = y_2(b)\,.$$

Un valore $\mathcal{J}(\overline{C})$, assunto da esso in corrispondenza alla curva ammissibile $\overline{C}[\overline{y}_1(x)\,;\,\overline{y}_2(x)]$, si dirà *minimo* (*relativo forte*) se esiste un intorno (ρ) di $\overline{C}$ tale che per ogni curva ammissibile $C[y_1(x)\,;\,y_2(x)]$ appartenente propriamente all' intorno (ρ) di $\overline{C}$ ([10]) si abbia

$$\mathcal{J}(C) \geq \mathcal{J}(\overline{C})\,.$$

La curva $\overline{C}$ si dirà *minimante* (*relativa forte*) per $\mathcal{J}(C)$.

Il problema che ci poniamo è quello di dare condizioni sufficienti perchè una curva ammissibile C interna al campo A e di classe C^1 sia minimante per $\mathcal{J}(C)$ nel senso sopradetto.

È opportuno richiamare alcune note relazioni e definizioni che qui enumero attenendomi, salvo qualche leggera differenza, alla nomenclatura più abituale.

Diremo "*variazione ammissibile*„ *lungo la curva ammissibile* $C[y_1(x)\,;\,y_2(x)]$ ogni coppia di funzioni $[\eta_1(x), \eta_2(x)]$ definite e di classe D^1 in (a, b) soddisfacenti in (a, b), salvo nei

([9]) Naturalmente si intende che la $y_2(x)$ soddisfi alla (5) in tutto (a, b) salvo che negli eventuali punti di discontinuità di $y'_1(x)$.

([10]) Vale a dire tale che $|y_1(x) - \overline{y}_1(x)| \leq \rho$ in (a, b).

punti di discontinuità di $\eta_1'(x)$ e $\eta_2'(x)$, all'equazione differenziale (detta *equazione delle variazioni lungo C*):

$$(7) \qquad \varphi_{y_1}\eta_1 + \varphi_{y_2}\eta_2 + \varphi_{y_1'}\eta_1' - \eta_2' = 0$$

e alla condizione

$$(8) \qquad \eta_2(a) = 0\,,$$

dove gli argomenti di $\varphi_{y_1}, \varphi_{y_2}, \varphi_{y_1'}$ in (7) sono nell'ordine $x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x)$.

Poniamo ora per (x, y_1) in A, y_2 in Δ e y_1', y_2', l_1 qualunque:

$$(9) \qquad F(x, y_1, y_2, y_1', y_2', l_1) = l_1[\varphi(x, y_1, y_1', y_2) - y_2'] .$$

Si dirà che una curva ammissibile $C[y_1(x); y_2(x)]$ di classe C^1 soddisfa alla Condizione I (o *regola dei moltiplicatori*) *se esiste una funzione $l_1(x)$ definita e di classe C_1 in (a, b) tale che siano soddisfatti lungo C* (11) *il sistema di equazioni differenziali* (dette *equazioni di Eulero*).

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = F_{y_1} \\[2ex] \dfrac{d}{dx} F_{y_2'} = F_{y_2} \end{cases}$$

e le condizioni (dette anche *condizioni di trasversalità*).

$$(11) \qquad l_1(b) = 1\,, \quad \varphi_{y_1'}(a, y_1(a), y_1'(a), y_2(a)) = 0\,,$$

$$\varphi_{y_1'}(b, y_1(b), y_1'(b), y_2(b)) = 0\,.$$

(11) Vale a dire le (10) sono soddisfatte in (a, b) se gli argomenti di $F_{y_1'}, \ldots,$ sono nell' ordine $x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x), l_1(x)$.

Il sistema (10) si scrive anche, per la (9),

$$(10') \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} l_1 \varphi_{y_1'} = l_1 \varphi_{y_1} \\ -\dfrac{d}{dx} l_1 = l_1 \varphi_{y_2} \end{cases}$$

da cui, in virtù anche della prima delle (11), si deduce facilmente che $l_1(x)$ è sempre positiva in (a, b).

Una curva $E[y_1(x)]$ di classe C^1 in (a, b) si chiama *estremale* del problema se esistono due funzioni $y_2(x)$ e $l_1(x)$ di classe C^1 in (a, b) soddisfacenti insieme alla $y_1(x)$ in tutto (a, b) alla equazione (5) e al sistema (10) (12). Indicheremo l'estremale E anche col simbolo $E[y_1(x); y_2(x); l_1(x)]$.

È noto che ogni curva ammissibile, di classe C^1 e interna ad A, minimante per $\mathcal{J}(C)$ soddisfa necessariamente alla Condizione I ed è quindi un'estremale (13).

Si suole (14) chiamare *funzione di Weierstrass* la funzione

$$\mathcal{E}(x, y_1, y_2, y_1', y_2', l_1, Y_1', Y_2') = F(x, y_1, y_2, Y_1', Y_2', l_1) -$$
$$- F(x, y_1, y_2, y_1', y_2', l_1) - (Y_1' - y_1') F_{y_1'}(x, y_1, y_2, y_1', y_2', l_1) -$$
$$- (Y_2' - y_2') F_{y_2'}(x, y_1, y_2, y_1', y_2', l_1)$$

e si suole (15) dire che un'estremale $E[y_1(x); y_2(x); l_1(x)]$

(12) Si osservi che questa definizione di estremale è diversa dalla abituale (v. Bliss: *Lectures* ..., n. 75) secondo la quale si dovrebbe chiamare estremale la coppia delle funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

(13) Si veda ad es. Bliss: *Lectures* ..., n. 74, teor. 74 · 1; o anche i lavori citati in (1) di Tonelli e Manià. Si osservi anche che nel nostro problema ogni minimante è *normale* secondo la definizione che si trova ad es. nelle *Lectures* ... del Bliss (n. 77).

(14) Si veda ad es. Bliss - *Lectures* ..., n. 78.

(15) » » » » » » n. 82.

verifica la *Condizione* II'_N (o di WEIERSTRASS in senso stretto) se risulta

$$(12) \qquad \mathcal{E}(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2, l_1, Y'_1, Y'_2) > 0$$

per ogni sestupla $(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2, l_1)$ soddisfacente alla $\varphi(x, y_1, y'_1, y_2) - y'_2 = 0$ e appartenente ad un intorno N opportuno della sestupla $[x, y_1(x), y_2(x), y'_1(x), y'_2(x), l_1(x)]$ relativa ad E e per tutti gli Y'_1 e Y'_2 tali che la quintupla $(x, y_1, y_2, Y'_1, Y'_2)$, sia distinta dalla quintupla $(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ e soddisfi alla $\varphi(x, y_1, Y'_1, y_2) - Y'_2 = 0$.

Attesa la (9), la funzione di WEIERSTRASS si riduce ad essere funzione delle sole variabili $x, y_1, y_2, y'_1, l_1, Y'_1$ e precisamente (come scriveremo d'ora innanzi).

$$(13) \qquad \mathcal{E}(x, y_1, y_2, y'_1, l_1, Y'_1) = l_1 [\varphi(x, y_1, Y'_1, y_2) -$$

$$- \varphi(x, y_1, y'_1, y_2) - (Y'_1 - y'_1) \varphi_{y'_1}(x, y_1, y'_1, y_2)]$$

e la CONDIZIONE II'_N *lungo l'estremale* $E[y_1(x); y_2(x); l_1(x)]$ *diventa la*

$$(12') \qquad \mathcal{E}(x, y_1, y_2, y'_1, l_1, Y'_1) > 0$$

per tutti gli (x, y_1, y_2, y'_1, l_1) *appartenenti ad un intorno di* $[x, y_1(x), y_2(x)\ y'_1(x), l_1(x)]$ *e per tutti gli* $Y'_1 \neq y'_1$.

Si osservi che se l'estremale soddisfa anche alla condizione: $l_1(x) > 0$ in (a, b), tenuta presente la (13), la Condizione II'_N equivale alla

$$(14) \quad \mathcal{E}_0(x, y_1, y_2, y'_1, Y'_1) = \varphi(x, y_1, Y'_1, y_2) - \varphi(x, y_1, y'_1, y_2) -$$

$$-(Y'_1 - y'_1) \varphi_{y'_1}(x, y_1, y'_1, y_2) > 0$$

per tutti gli (x, y_1, y_2, y'_1) appartenenti ad un opportuno intorno di $[x, y_1(x), y_2(x), y'_1(x)]$ e per tutti gli $Y'_1 \neq y'_1$.

La Condizione III′ (*o di Clebsch* in senso stretto) *lungo l'estremale* $E[y_1(x); y_2(x); l_1(x)]$ *risulta in questo caso* (16)

$$(15) \qquad l_1(x)\,\varphi_{y_1' y_1'}(x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x)) > 0$$

in tutto (a, b) e se $l_1(x)$ è positiva in tutto (a, b) si riduce alla

$$(15') \qquad \varphi_{y_1' y_1'}(x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x)) > 0$$

in tutto (a, b).

Dicesi *variazione seconda lungo l'estremale* $E[y_1(x); y_2(x); l_1(x)]$ l' espressione (17)

$$I_2(\eta_1, \eta_2) = \int_a^b l_1 \left\{ \varphi_{y_1 y_1} \eta_1^2 + 2\,\varphi_{y_1 y_1'} \eta_1 \eta_1' + \varphi_{y_1' y_1'} \eta_1'^2 + \right.$$

$$\left. + \varphi_{y_2 y_2} \eta_2^2 + 2\,\varphi_{y_1 y_2} \eta_1 \eta_2 + 2\,\varphi_{y_1' y_2} \eta_1' \eta_2 \right\} dx$$

dove $[\eta_1(x), \eta_2(x)]$ è una qualunque *variazione ammissibile lungo* E e gli argomenti di $\varphi_{y_1 y_1}, \ldots$, sono $x, y_1(x), y_1'(x), y_2(x)$.

La Condizione IV′ *si esprime nel fatto che lungo* E *risulti per ogni variazione ammissibile non identicamente nulla* (*cioè per cui non sia* $\eta_1(x) \equiv 0$ e $\eta_2(x) \equiv 0$ *in* (a, b))

$$I_2(\eta_1, \eta_2) > 0 .$$

Le Condizioni I, II′$_N$, III′, IV′ sono sufficienti, come è noto (18), per il minimo relativo inteso nel senso più ristretto, quale si è ricordato nell'introduzione; dimostreremo che esse lo sono anche

(16) Si veda ad es. Bliss: *Lectures . . .*, n. 82.
(17) » » » » » » n. 80.
(18) » » » » » » cap. IX, teor. 82, 1.

per il minimo quale si è definito al principio di questo numero; precisamente dimostreremo il seguente

TEOREMA: *Se la curva ammissibile $\overline{C}$, di classe C^1 in (a, b) e interna al campo A, soddisfa alle Condizioni* I, II'_N, III′, IV′, *essa è minimante per $\mathcal{J}(C)$ nel problema considerato ed è anzi minimante propria nel senso che risulta $\mathcal{J}(C) = \mathcal{J}(\overline{C})$ solo se C coincide con $\overline{C}$.*

2. - È essenziale iniziare con alcune osservazioni che si riferiscono al cosidetto metodo del "campo di estremali" (o "campo di MAYER") quale è stato sviluppato per il problema generale di BOLZA.

Indichiamo con $\overline{\Gamma}$ la curva dello spazio (x, y_1, y_2) di equazioni $y_1 = \overline{y}_1(x)$, $y_2 = \overline{y}_2(x)$ $(a \leq x \leq b)$; in virtù delle Condizioni I, III′, IV′ e di teoremi noti (v. ad es. BLISS: *Lectures...* n. 84, 86, 87) la curva $\overline{\Gamma}$ è "immersa" in un *campo* di MAYER, vale a dire (19) esiste un intorno $\mathcal{F}$ di $\overline{\Gamma}$, (i cui punti sono interni alla regione dello spazio (x, y_1, y_2) determinata da A e da Δ) al quale sono associate 3 funzioni $p_1(x, y_1, y_2)$, $p_2(x, y_1, y_2)$ e $l_1(x, y_1, y_2)$ continue con le loro derivate prime in tutto $\mathcal{F}$, che soddisfano all'equazione

$$\varphi(x, y_1, p_1(x, y_1, y_2), y_2) - p_2(x, y_1, y_2) = 0 \text{ in tutto } \mathcal{F} \text{ e alle}$$

$$p_1(x, \overline{y}_1(x), \overline{y}_1'(x), \overline{y}_2(x)) = \overline{y}_1'(x),\ p_2(x, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(x)) = \overline{y}_2'(x),$$

$$l_1(x, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(x)) = \overline{l}_1(x) \text{ in } (a, b)$$

e rendono l'integrale curvilineo

$$(16)\quad \mathrm{I}^* = \int [(F - p_1 F_{y_1'} - p_2 F_{y_2'})\,dx + F_{y_1'}\,dy_1 + F_{y_2'}\,dy_2]$$

indipendente dal cammino in $\mathcal{F}$, se gli argomenti della F e

(19) Seguo la definizione di campo di MAYER data dal BLISS, v. *Lectures...*, n. 84.

delle sue derivate sono nell'ordine $x, y_1, y_2, p_1(x, y_1, y_2)$, $p_2(x, y, y_2)$, $l_1(x, y_1, y_2)$. L'indipendenza di I^* dal cammino in $\mathcal{J}$ va intesa nel senso che se si calcola I^* lungo una qualunque curva Γ, di equazioni $y_1 = y_1(x)$ $y_2 = y_2(x)$ $(x_1 \leq x \leq x_2)$, con $y_1(x)$ e $y_2(x)$ di classe D^1 in (x_1, x_2), la quale appartenga a $\mathcal{J}$, il risultato dipende solo dagli estremi della curva; ed è importante notare che non è detto che le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ relative a Γ soddisfino alla (5).

Si osservi fin d'ora che risulta

$$(17)\quad I^*(\bar{\Gamma}) = \int_a^b \bar{l}_1(x)\,[\varphi(x, \bar{y}_1(x), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2(x)) - \bar{y}_2'(x)]\,dx = 0$$

e che è possibile ([20]) costruire il campo $\mathcal{J}$, restringendolo opportunamente, in modo che ogni quadrupla $[x, y_1, y_2, p_1(x, y_1, y_2), l_1(x, y_2, y_2)]$ relativa ad $\mathcal{J}$ appartenga all'intorno di $[x, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \bar{y}_1'(x), \bar{l}_1(x)]$, di cui ci è assicurata l'esistenza dalla Condizione II'_N; inoltre, pur di restringere ancora opportunamente $\mathcal{J}$ si può far in modo, attese la continuità di $l_1(x, y_1, y_2)$ e la $l_1(x, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x)) = \bar{l}_1(x) > 0$ in (a, b), che $l_1(x, y_1, y_2)$ risulti in $\mathcal{J}$ positiva.

Nel campo $\mathcal{J}$ l'integrale I^* è dunque funzione solo degli estremi $[x_1, y_1(x_1), y_2(x_1), x_2, y_1(x_2), y_2(x_2)]$ di Γ e tale è perciò anche la funzione

$$(18)\qquad w(\Gamma) = w[x_1, y_1(x_1), y_2(x_1), x_2, y_1(x_2), y_2(x_2)] = I^*(\Gamma) + y_2(x_2).$$

Ora le Condizioni I, III', IV' assicurano che la funzione $w[x_1, y_1(x_1), y_2(x_1), x_2, y_1(x_2), y_2(x_2)]$ ammette negli estremi $[a, \bar{y}_1(a), y_{2,a}, b, \bar{y}_1(b), \bar{y}_2(b)]$ di $\bar{\Gamma}$ un minimo relativo (proprio) rispetto all'insieme dei valori $[x_1, y_1(x_1), y_2(x_1), x_2, y_1(x_2), y_2(x_2)]$ soddisfacenti alle $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_2(x_1) = y_{2,a}$. Per la dimostra-

([20]) Si veda ad es. Bliss: *Lectures* ..., n. 84, 85.

zione si vedano i n. 85, 86 e 87 delle *Lectures* ... del BLISS. dimostrazione la quale può ripetersi senz'altro anche se non si suppone, cosa che appunto noi facciamo, che la curva Γ $[y_1(x), y_2(x)]$ sia tale che le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soddisfino alla (5).

Dunque esisteranno due opportuni intorni dei due estremi di $\bar{\Gamma}$ tali che per ogni curva Γ del tipo sopra detto, i cui estremi appartengano rispettivamente a questi intorni, siano distinti da quelli di $\bar{\Gamma}$ e soddisfino alle $x_1 = a$, $x_2 = b$, $y_2(x_1) = y_{2,a}$, risulti

$$w(\Gamma) > w(\bar{\Gamma}) .$$

Fissiamo allora $\varepsilon > 0$ e $\rho_1 > 0$ in modo che ogni punto (x, y_1, y_2) soddisfacente alle

$$a \leq x \leq b \qquad |\bar{y}_1(x) - y_1| \leq \rho_1 ; \qquad |\bar{y}_2(x) - y_2| \leq \varepsilon$$

appartenga al campo $\mathcal{F}$ e, nel caso che sia $x = a$ (oppure $x = b$) appartenga anche al suddetto intorno di

$$[a, \bar{y}_1(a), y_{2,a}] \text{ (oppure di } [b, \bar{y}_1(b), \bar{y}_2(b)]) .$$

3. - Facciamo ora alcune considerazioni sull'equazione differenziale

$$(19) \qquad y_2' = \varphi(x, \bar{y}_1(x), \bar{y}_1'(x), y_2) .$$

Per le ipotesi fatte sulla funzione φ, essa ammette una ed una sola soluzione che passi per un punto (x^*, y_2^*) della regione del piano (x, y_2) determinata dalle

$$a \leq x \leq b, \ |\bar{y}_2(x) - y_2| \leq \varepsilon ,$$

soluzione che sarà definita in un certo intorno di x^* e ivi continua insieme alla sua derivata.

Se il punto (x^*, y_2^*) è preso sulla curva γ di equazione $y_2 = \bar{y}_2(x)$ $a \leq x \leq b$, allora la soluzione coincide con la $\bar{y}_2(x)$ stessa ed è quindi definita in tutto (a, b); per noti teoremi sulla continuità delle soluzioni delle equazioni differenziali rispetto ai valori iniziali possiamo allora affermare che anche se (x^*, y_2^*) è sufficientemente vicino alla curva γ la soluzione di (19) determinata da (x^*, y_2^*) è ancora definita in tutto (a, b) e si sposta di poco da γ; inoltre non incontra mai γ, purchè (x^*, y_2^*) non stia su γ, poichè per uno stesso punto non possono passare due soluzioni della (19). Più precisamente possiamo determinare un $\varepsilon_1 > 0 \left(\text{e} < \frac{\varepsilon}{2}\right)$ in modo che la soluzione della (19) determinata dal punto $(x^*, \bar{y}_2(x^*) + \varepsilon_1)$, che indicheremo con $y_2^{*+}(x)$, qualunque sia x^* in (a, b), sia definita in tutto (a, b) e soddisfi ivi alla

$$\bar{y}_2(x) < y_2^{*+}(x) < \bar{y}_2(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si consideri allora al variare di x^* in (a, b) la funzione $\min\limits_{(a,b)} [y_2^{*+}(x) - \bar{y}_2(x)]$; essa è continua, sempre per la continuità della soluzione della (19) rispetto ai valori iniziali, sicchè ammetterà un minimo $\varepsilon_2 > 0$.

Si consideri ora l'equazione differenziale

$$(20) \qquad y_2' = \varphi(x, \bar{y}_1(x) + \sigma, \bar{y}_1'(x), y_2)$$

dipendente dal parametro σ. Fissato comunque x^* in (a, b) essa, per quanto si è visto, ammette in corrispondenza del valore $\sigma = 0$ del parametro una e una sola soluzione passante per il punto $(x^*, y_2(x^*) + \varepsilon_1)$, che è definita in tutto (a, b) ed è ivi compresa tra $\bar{y}_2(x) + \varepsilon_2$ e $\bar{y}_2(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. Allora per i teoremi di dipendenza continua delle soluzioni delle equazioni differenziali da un parametro, possiamo dire che per tutti i σ in modulo minori di un certo $\sigma(x^*) > 0$, la (20) ammette una sola soluzione, che indicheremo con $y_{2,\sigma}^{*+}(x)$, passante per $(x^*, \bar{y}_2(x^*) + \varepsilon_1)$, definita in tutto (a, b) e ivi soddisfacente alla

$$(21) \qquad \bar{y}_2(x) < y_{2,\sigma}^{*+}(x) < \bar{y}_2(x) + \varepsilon.$$

Se conveniamo di prendere dei vari possibili $\sigma(x^*)$ l'estremo superiore e chiamarlo ancora $\sigma(x^*)$, resta così determinata una funzione $\sigma(x^*)$ per x^* variabile in (a, b). L'estremo inferiore di $\sigma(x^*)$ in (a, b) è certo positivo in virtù dei teoremi di dipendenza dal parametro e dai valori iniziali delle soluzioni delle equazioni differenziali. Diciamo σ_1 questo estremo inferiore.

Con un ragionamento del tutto analogo a quello ora fatto possiamo anche determinare altri due numeri ε_1' e σ_1' positivi $\left(\text{con } \varepsilon_1' < \frac{\varepsilon}{2}\right)$, tali che comunque si prenda x^* in (a, b) e per ogni valore del parametro σ in modulo minore di σ_1', l'equazione (20) ammetta una e una sola soluzione $y^*_{2,\bar{\sigma}}(x)$ passante per il punto $(x^*, \bar{y}_2(x^*) - \varepsilon_1')$, definita in tutto (a, b) e ivi soddisfacente alla

$$\bar{y}_2(x) - \varepsilon < y^*_{2,\bar{\sigma}}(x) < \bar{y}_2(x). \tag{22}$$

4. - E veniamo più direttamente alla dimostrazione del teorema. Se, pur di prendere ρ sufficientemente piccolo, fossimo certi che per ogni curva ammissibile $C[y_1(x); y_2(x)]$ appartenente propriamente all'intorno (ρ) di $\bar{C}$ risultasse in (a, b)

$$|y_2(x) - \bar{y}_2(x)| \leq \varepsilon,$$

allora non resterebbe che continuare con la dimostrazione del n. 85 delle "Lectures..." del Bliss e concludere rapidamente. Ma ciò non è in generale ed è appunto qui la difficoltà da superare, non volendo limitarsi a considerare solo le curve ammissibili per cui ciò avviene.

Possiamo però anzitutto dimostrare che *per ogni curva ammissibile* $C[y_1(x); y_2(x)]$ *appartenente propriamente all'intorno* (ρ) *di* $\bar{C}$, *con* $\rho > 0$ *e minore di* ρ_1, σ_1 *e* σ_1' *è soddisfatta in tutto* (a, b) *la*

$$y_2(x) > \bar{y}_2(x) - \varepsilon. \tag{23}$$

Supponiamo infatti che ciò non sia e cerchiamo di giungere ad un assurdo; allora essendo $y_2(a) = \bar{y}_2(a) = y_{2,a}$ esisteranno certo punti x compresi tra a e b tali che

$$y_2(x) = \bar{y}_2(x) - \varepsilon_1' .$$

Sia x_1^* il primo di essi; allora per $a \leq x < x_1^*$ $(x_1^* < b)$ risulta verificata la (23). Poniamo $\sigma' = y_1(x_1^*) - \bar{y}_1(x_1^*)$ e alteriamo poi la curva C nell'intervallo (x_1^*, b) sostituendola con la curva di equazione $y_1 = \bar{y}_1(x) + \sigma'$ e corrispondentemente sostituiamo nell'intervallo (x_1^*, b) la funzione $y_2(x)$ con la soluzione $y_{2,\bar{\sigma}'}^*(x)$ della equazione

$$y_2' = \varphi\,(x, \bar{y}_1(x) + \sigma', \bar{y}_1'(x), y_2)$$

soddisfacente alla $y_{2,\bar{\sigma}'}^*(x_1^*) = \bar{y}_2(x_1^*) - \varepsilon_1' = y_2(x_1^*)$. Sappiamo (v. n. 3) che, poichè è $\sigma' \leq \rho < \sigma_1'$, $y_{2,\bar{\sigma}'}^*(x)$ esiste in tutto (a, b) e soddisfa ivi alla (22).

Potremo allora considerare la curva Γ di equazioni $y_1 = Y_1(x)$, $y_2 = Y_2(x)$ $(a \leq x \leq b)$ costruita come segue: se la funzione $y_2(x)$ soddisfa in (a, x_1^*) anche alla $y_2(x) \leq \bar{y}_2(x) + \varepsilon$ si ponga

$$(24)\quad \begin{cases} Y_1(x) = y_1(x), & Y_2(x) = y_2(x) \quad \text{per } a \leq x \leq x_1^* \\ Y_1(x) = \bar{y}_1(x) + \sigma', & Y_2(x) = y_{2,\bar{\sigma}'}^*(x) \quad \text{»}\ \ x_1^* < x \leq b\,. \end{cases}$$

Altrimenti si proceda nel seguente modo. Poichè la $y_2(x)$ non soddisfa in (a, x_1^*) alla $y_2(x) \leq \bar{y}_2(x) + \varepsilon$, esisteranno certo punti x compresi tra a e x_1^* tali che

$$y_2(x) = \bar{y}_2(x) + \varepsilon_1 .$$

Sia x_2^* l'ultimo di essi; risulta allora per $x_2^* < x < x_1^*$

$$\bar{y}_2(x) - \varepsilon_1' < y_2(x) < \bar{y}_2(x) + \varepsilon_1 .$$

Poniamo $\sigma'' = y_1(x_2^*) - \bar{y}_1(x_2^*)$ e alteriamo la curva C nell'intervallo (a, x_2^*) sostituendola con la curva di equazione

$y_1 = \bar{y}_1(x) + \sigma''$ e corrispondentemente sostituiamo nell'intervallo (a, x_2^*) alla funzione $y_2(x)$ la soluzione $y^{*+}_{2,\sigma''}(x)$ della equazione

$$y_2' = \varphi(x, \bar{y}_1(x) + \sigma'', \bar{y}_1'(x), y_2)$$

soddisfacente alla $y^{*+}_{2,\sigma''}(x_2^*) = \bar{y}_2(x_2^*) + \varepsilon_1 = y_2(x_2^*)$; in virtù del n. 3, poichè è $\sigma'' \leq \rho < \sigma_1$, $y^{*+}_{2,\sigma''}(x)$ esiste in tutto (a, b) e ivi soddisfa alla (21).

Alteriamo quindi in modo opportuno la $y^{*+}_{2,\sigma''}(x)$ nelle vicinanze di a. Sia M il massimo della funzione $|\varphi(x, \bar{y}_1(x) + \sigma'', \bar{y}_1'(x), y_2)|$ per $a \leq x \leq b$, $\bar{y}_2(x) - \varepsilon \leq y_2 \leq \bar{y}_2(x) + \varepsilon$.

Tiriamo dal punto $[a, y_{2,a}]$ una retta r di coefficiente angolare maggiore di M in modo tale che incontri la curva γ^* di equazione $y_2 = y^{*+}_{2,\sigma''}(x)$ $(a \leq x \leq x_2^*)$ in almeno un punto. La cosa è certo possibile essendo, per la (21), $y_{2,a} < y^{*+}_{2,\sigma''}(a)$. Sia x^{**} l'ascissa del primo di questi punti di incontro di r con γ^*; potremo anche, sempre per la (21) e pur di prendere il coefficiente angolare di r sufficientemente grande, fare in modo che il segmento di estremi $[a, y_{2,a}]$ e $[x^{**}, y^{*+}_{2,\sigma''}(^{**})]$ appartenga all'insieme dei punti (x, y_2) tali che $a \leq x \leq b$, $\bar{y}_2(x) \leq y_2 \leq \bar{y}_2(x) + \varepsilon$. Sostituiamo allora il suddetto segmento all'arco di γ^* avente gli estremi $[a, y^{*+}_{2,\sigma''}(a)]$ e $[x^{**}, y^{*+}_{2,\sigma''}(x^{**})]$.

In definitiva, nel caso in cui la $y_2(x)$ non soddisfi in (a, x_1^*) alla $y_2(x) \leq \bar{y}_2(x) + \varepsilon$, possiamo costruire la curva Γ, anzichè con le (24), con le:

$$(24') \quad \begin{cases} Y_1(x) = \bar{y}_1(x) + \sigma'', Y_2(x) = y_{2,a} + (x-a)\dfrac{y^{*+}_{2,\sigma''}(x^{**}) - y_{2,a}}{x^{**} - a} & \text{per } a \leq x \leq x^{**} \\ Y_1(x) = \bar{y}_1(x) + \sigma'', Y_2(x) = y^{*+}_{2,\sigma''}(x) & \text{»} \ x^{**} < x \leq x_2^* \\ Y_1(x) = y_1(x) \qquad Y_2(x) = y_2(x) & \text{»} \ x_2^* < x \leq x_1^* \\ Y_1(x) = \bar{y}_1(x) + \sigma', Y_2(x) = y^{*-}_{2,\sigma'}(x) & \text{»} \ x_1^* < x \leq b\,. \end{cases}$$

Osserviamo che se la curva Γ è definita mediante le (24), risulta in (a, b), salvo un numero finito di punti

$$(25) \qquad Y_2'(x) = \varphi(x, Y_1(x), Y_1'(x), Y_2(x))\,;$$

se invece Γ è definita mediante le (24′) risulta, salvo un numero finito di punti

$$(25) \qquad Y_2'(x) = \varphi(x, Y_1(x), Y_1'(x), Y_2(x)) \quad \text{per} \quad x^{**} < x \le b,$$

$$(25') \qquad Y_2'(x) > \varphi(x, Y_1(x), Y_1'(x), Y_2(x)) \quad \text{»} \quad a \le x < x^{**},$$

essendo il coefficiente angolare di r maggiore di M; in ogni caso risulta sempre

$$(26) \qquad |Y_1(x) - \bar{y}_1(x)| \le \rho, \qquad |Y_2(x) - \bar{y}_2(x)| \le \varepsilon$$

e le funzioni $Y_1(x)$ e $Y_2(x)$ sono di classe D^1 in (a, b).

Costruita così la curva Γ, dimostriamo che si può giungere ad un assurdo; infatti, per essere $Y_2(x) = y^*_{2,\sigma'}(x)$ per $x_1^* < x \le b$ (v. (24′)) e per la (22), dovrebbe risultare $Y_2(b) < \bar{y}_2(b)$. Invece se osserviamo che in $\mathcal{G}$ è $l_1(x, y_1, y_2) > 0$ e che valgono le (25), (25′), (26), (17), (18), (16), (13), possiamo scrivere (ricordando anche che abbiamo indicata con $\bar{\Gamma}$ la curva di equazioni $y_1 = \bar{y}(x)$, $y_2 = \bar{y}_2(x)$, $a \le x \le b$):

$$(27) \quad Y_2(b) - \bar{y}_2(b) \ge \int_a^b l_1(x, Y_1, Y_2)[\varphi(x, Y_1, Y_1', Y_2) - Y_2'] \, dx + Y_2(b) -$$

$$- \int_a^b \bar{l}_1(x)[\varphi(x, \bar{y}_1, \bar{y}_1', \bar{y}_2) - \bar{y}_2'] \, dx - \bar{y}_2(b) =$$

$$= \int_a^b l_1(x, Y_1, Y_2)[\varphi(x, Y_1, Y_1', Y_2) - Y_2'] \, dx + Y_2(b) - I^*(\bar{\Gamma}) - \bar{y}_2(b) =$$

$$= \int_a^b l_1(x, Y_1, Y_2)[\varphi(x, Y_1, Y_1', Y_2) - Y_2'] \, dx - I^*(\Gamma) + w(\Gamma) - w(\bar{\Gamma}) =$$

$$= \int_a^b l_1(x, Y_1, Y_2)[\varphi(x, Y_1, Y_1', Y_2) - Y_2'] \, dx -$$

$$- \int_a^b l_1(x, Y_1, Y_2) \Big\{ \varphi(x, Y_1, p_1(x, Y_1, Y_2), Y_2) -$$

$$- p_2(x, Y_1, Y_2) - p_1(x, Y_1, Y_2)\varphi_{y_1'}(x, Y_1, p_1(x, Y_1, Y_2), Y_2) + p_2(x, Y_2, Y_2) +$$

$$+ \varphi_{y_1'}(x, Y_1, p_1(x, Y_1, Y_2), Y_2) Y_1' - Y_2' \Big\} dx + w(\Gamma) - w(\bar{\Gamma}) =$$

$$= \int_a^b l_1(x, Y_1, Y_2) \Big\{ \varphi(x, Y_1, Y_1', Y_2) - \varphi(x, Y_1, p_1(x, Y_1, Y_2), Y_2) -$$

$$- (Y_1' - p_1(x, Y_1, Y_2))\varphi_{y_1'}(x, Y_1, p_1(x, Y_1, Y_2), Y_2) \Big\} dx + w(\Gamma) - w(\bar{\Gamma}) =$$

$$= \int_a^b \mathcal{E}(x, Y_1, p_1(x, Y_1, Y_2), Y_2, l_1(x, Y_1, Y_2, Y_1') dx + w(\Gamma) - w(\bar{\Gamma}) .$$

Ma, in virtù delle (26), della Condizione II'_N, e di quanto si è visto nel n. 2 sulla differenza $w(\Gamma) - w(\bar{\Gamma})$, l'espressione a ultimo membro è non negativa, in contraddizione con la: $Y_2(b) < \bar{y}_2(b)$.

Dunque è anzitutto dimostrato che per ogni curva ammissibile $C[y_1(x); y_2(x_2)]$ appartenente propriamente all'intorno (ρ) di $\bar{C}$, con ρ minore di ρ_1, σ_1 e σ_1', è soddisfatta in (a, b) la (23).

Osservazione: Si osservi che con la (23) in sostanza, data l'arbitrarietà di ε, abbiamo dimostrato che le *Condizioni* I, II'_N, III', IV', sono sufficienti per la *semicontinuità inferiore uniforme di* $y_2(x)$ *su* $\bar{C}$, nel senso che preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio è possibile determinare un intorno (ρ) di $\bar{C}$ tale che per tutte le curve ammissibili $C[y_1(x); y_2(x)]$ appartenenti propriamente a questo intorno si abbia in tutto (a, b)

$$y_2(x) > \bar{y}_2(x) - \varepsilon .$$

Condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore uniforme di $y_2(x)$ in tutto il campo sono state date da Manià, Graves e Tonelli [21] e da esse si deducono immediatamente condizioni

[21] V. nota (3). La dimostrazione dei risultati enunciati dal Tonelli si trova in: E. Magenes: *Sui teoremi di Tonelli per la semicontinuità nei*

sufficienti per la semicontinuità inferiore uniforme di $y_2(x)$ su una curva $\bar{C}$; ma in queste ultime però non rientra il risultato da noi ora ottenuto.

problemi di Mayer e di Lagrange [Ann. Scuola Norm. Sup Pisa (2) – vol. XV (1946), pp. 113-125).

Colgo l'occasione per osservare che a pag. 123, riga 8 di questo lavoro ho implicitamente ammesso che la $u(x)$ soddisfacesse in $(a, \bar{x})$ oltre alla (4) anche alla $u(x) \leq U_0 + r_0$; la cosa è in verità lecita perchè, se così non fosse, esisterebbe, in virtù della $u(\bar{x}) < u_0(\bar{x})$ un ultimo punto x_1 in $(a, \bar{x})$ tale che $u(x_1) = U_0 + r$, e allora basterebbe sostituire la riga 5 della stessa pagina con la

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) = u(x_1) + \int_{x_1}^{\bar{x}} f(x, y, y', u)\, dx - u_0(x_1) - \int_{x_1}^{\bar{x}} f(x, y_0, y'_0, u_0)\, dx >$$

$$> \int_{x_1}^{\bar{x}} f(x, y, y', u)\, dx - \int_{x_1}^{\bar{x}} f(x, y_0, y'_0, u_0)\, dx$$

se fosse $x_1 \geq a_0$, oppure con la

$$u(\bar{x}) - u_0(\bar{x}) = u(x_1) + \int_{x_1}^{\bar{x}} f(x, y, y', u)\, dx - \alpha_0 - \int_{a_0}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0)\, dx >$$

$$> \int_{x_1}^{\bar{x}} f(x, y, y', u)\, dx - \int_{a_0}^{\bar{x}} f(x, y_0, y_0', u_0)\, dx$$

se fosse $x_1 < a_0$, e poi continuare con la dimostrazione del testo. Aggiungo anche la correzione dei seguenti errori di stampa, sempre nello stesso lavoro:

a pag. 115	riga 23	si legga *abbia*	invece di	*alla*
» » »	» 24	» » *esistano*	»	*esistono*
» » 118	» 21	» » $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}'\ u)$	» »	$F(x, \bar{y}, \bar{x}', \bar{y}'\ u)$
» » 119	» 15	» » $u - u_0$	» »	$u_0 - u_0$
» » 121	» 16	» » $>$	» »	$\geq$
» » 123	» 21	» » (3)	» »	(2).

5. - Terminiamo ora la dimostrazione del teorema. Abbiamo visto che, se ρ è sufficientemente piccolo, è verificata da ogni curva ammissibile C, appartenente propriamente all'intorno (ρ) di $\bar{C}$, la (23).

Sarà perciò solo possibile, fissato un tale ρ, se non è verificata in (a, b) la $|y_2(x) - \bar{y}_2(x)| \leq \varepsilon$, che risulti per certi valori di x

$$y_2(x) > \bar{y}(x) + \varepsilon . \tag{28}$$

Orbene in questo caso risulta certamente $y_2(b) > \bar{y}_2(b)$. La dimostrazione si conduce per assurdo con ragionamento del tutto analogo a quello svolto nel n. precedente.

Supposto infatti che sia $y_2(b) \leq \bar{y}_2(b)$, poichè vale la (28) per certi valori di x, esisteranno certo punti x compresi tra a e b tali che $y_2(x) = \bar{y}_2(x) + \varepsilon_1$; sia x_2^* l'ultimo di essi. Alterando in (a, x_2^*) le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ come si è fatto nel n. precedente (si vedano le (24')) e precisamente ponendo, con analogo significato dei simboli

$$\begin{cases} Y_1(x) = \bar{y}_1(x) + \sigma'', Y_2(x) = y_{2,a} + (x - a) \dfrac{y^{*+}_{2,\sigma''}(x^{**}) - y_{2,a}}{x^{**} - a} & \text{per } a \leq x \leq x^{**} \\ Y_1(x) = \bar{y}_1(x) + \sigma'', \; Y_2(x) = y^{*+}_{2,\sigma''}(x) & \text{»} \;\; x^{**} < x \leq x_2^* \\ Y_1(x) = y_1(x) \qquad , \; Y_2(x) = y_2(x) & \text{»} \;\; x_2^* < x \leq b \end{cases}$$

otteniamo una nuova curva Γ, di equazioni $y_1 = Y_1(x)$, $y_2 = Y_2(x)$, $a \leq x \leq b$, mediante la quale è possibile dimostrare che deve essere contemporaneamente $y_2(b) - \bar{y}_2(b) > 0$ (si osservi che ora nello scrivere l'analoga della (27) è possibile, nella prima disuguaglianza, adoperare il segno $>$ anzichè quello $\geq$, in quanto che ora l'intervallo (a, x^{**}), in cui vale la (25'), esiste effettivamente).

Resta dunque completata la dimostrazione del teorema.