GIUSEPPE COLOMBO

Osservazioni sulla stabilità dei moti merostatici di un giroscopio ed applicazioni ad un caso notevole

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 59-77

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__59_0>

OSSERVAZIONI SULLA STABILITÀ DEI MOTI MEROSTATICI DI UN GIROSCOPIO ED APPLICAZIONI AD UN CASO NOTEVOLE

Nota (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Padova*).

Si fanno alcune considerazioni di carattere generale sulle precessioni regolari e sulle rotazioni uniformi di un giroscopio, C, nel moto intorno ad un punto del suo asse. Si osserva che la stabilità teorica (rispetto a p, q, r, θ) è un' eccezione e che di regola si ha instabilità.

Nei casi integrabili si danno criteri rapidi per riconoscere della stabilità rispetto a θ delle soluzioni prese in esame. Di queste osservazioni se ne fa infine un' applicazione allo studio delle soluzioni merostatiche relative al caso, studiato per altri riguardi da G. GRIOLI (1), di un giroscopio girevole intorno al baricentro, sollecitato da forze di potenza nulla, soffermandosi sopratutto sul caso che la sollecitazione sia quella delle forze centrifughe-composte, inerenti alla rotazione terrestre.

* * *

1. - Un' osservazione sulle precessioni regolari e sulle rotazioni uniformi di un giroscopio.

Supponiamo a priori che tra i moti possibili di un giroscopio C, girevole intorno ad un punto O del suo asse per ora

(*) Pervenuta in Redazione il 2 settembre 1950.

(1) G. GRIOLI, *Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla*. Rend. di Mat. e delle sue Appl., Fasc. III-IV, 1947. pp. 439-463.

qualunque, e sollecitato da forze di momento $\boldsymbol{M}$ rispetto ad O, esistano moti merostatici (precessioni regolari o rotazioni uniformi). Vogliamo vedere cosa si può dire in generale di $\boldsymbol{M}$.

Poichè le rotazioni uniformi rientrano come caso particolare nelle precessioni regolari supponiamo sia $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse giroscopico e $\boldsymbol{\chi}$ il versore dell'asse di precessione, inoltre siano μ la velocità angolare propria e ν la velocità angolare di precessione.

La velocità angolare di C sarà dunque data da

$$\omega = \mu \boldsymbol{k} + \nu \boldsymbol{\chi}, \tag{1}$$

e dalla nota formula, in cui è ovvio il significato dei simboli,

$$\boldsymbol{K} = [A \mu - (A - C) r] \boldsymbol{k} + A \nu \boldsymbol{\chi}, \tag{2}$$ [2]

tenuto conto che μ, ν e θ sono costanti durante una precessione e quindi è costante anche r, che, come è noto, vale

$$r = \mu + \nu \cos \theta, \tag{3}$$

si ha subito che il momento $\boldsymbol{M}$ della sollecitazione esterna dovrà soddisfare, durante la precessione, alla

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = [C \mu \nu - (A - C) \nu^2 \cos \theta] \boldsymbol{\chi} \wedge \boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Da questa intanto risulta che affinchè sia possibile per il nostro sistema un moto merostatico, corrispondente alla determinazione $\omega = \mu_0 \boldsymbol{\chi} + \nu_0 \boldsymbol{K}$ ed all'angolo di nutazione θ_0, occorre che il momento risultante $\boldsymbol{M}$ (che sarà in generale fun-

(2) Cfr. Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*, Zanichelli Bologna 1927. Vol. II, parte I^a^, p. 301.

zione di $\dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta, \varphi, \psi, \theta$, essendo supposta la sollecitazione indipendentemente dal tempo) soddisfi alla identità in φ e ψ

$$(5) \quad \boldsymbol{M}(\mu_0, \nu_0, 0, \varphi, \psi, \theta_0) \equiv (C\mu_0\nu_0 - (A - C)\nu_0^2 \cos\theta_0)\,\boldsymbol{\chi} \wedge \boldsymbol{k}.$$

Ad ogni terna di valori μ_0, ν_0, θ_0, tali che rendano soddisfatta la identità (5), corrispondono ∞^2 precessioni regolari di asse $\boldsymbol{\chi}$ e di asse di figura $\boldsymbol{k}$, in corrispondenza alle ∞^2 scelte arbitrarie dei valori iniziali degli angoli φ e ψ di EULERO.

Si supponga che il vettore $\boldsymbol{M}(\dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta, \varphi, \psi, \theta,)$ ammetta per ogni presunta precessione regolare, tenuto conto di (1), una decomposizione del tipo

$$(6) \qquad \boldsymbol{M} = \mathfrak{M}(\mu\,\nu\,\theta)\,\boldsymbol{\chi} \wedge \boldsymbol{k} + \boldsymbol{M}_1$$

ove $\boldsymbol{M}_1$ è un vettore qualunque. Allora ad ogni terna soddisfacente al sistema

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}(\mu, \nu, \theta) = C\mu\nu - (A - C)\nu^2 \cos\theta, \\ \boldsymbol{M}_1 \equiv 0, \end{cases}$$

ove la seconda equazione deve intendersi identica in φ e ψ, corrispondono ∞^2 soluzioni merostatiche. Di soluzioni del sistema (7) ve ne possono essere un numero discreto, oppure un semplice o una doppia infinità.

Se per esempio si ha

$$(8) \qquad \boldsymbol{M}_1 = f(\mu)\,\boldsymbol{k}$$

ove $f(\mu)$ si annulli solo per $\mu = \mu_0$, si avranno in generale ∞^3 soluzioni merostatiche in corrispondenza alle ∞^1 terne μ_0, ν, θ, con ν e θ soddisfacenti alla

$$\mathfrak{M}(\mu_0, \nu, \theta) = C\mu_0 = (A - C)\nu^2 \cos\theta.$$

Se invece è sempre $\boldsymbol{M}_1 = 0$ cioè se si ha

$$(9) \qquad \boldsymbol{M} = \mathfrak{M}(\mu, \nu, \theta)\,\boldsymbol{\chi} \wedge \boldsymbol{k}$$

alle ∞^2 terne μ_0, ν_0, θ_0 risolventi l'equazione

$$(10) \qquad C\mu\nu - (A - C)\nu^2 \cos\theta - \mathfrak{M} = 0$$

corrispondono ∞^4 soluzioni merostatiche.

Premesso ciò, se si vogliono studiare queste precessioni regolari o rotazioni uniformi in relazione alla loro stabilità, si può fare senz'altro un'osservazione di carattere immediato, generalizzando quanto il Levi-Civita dice a proposito del giroscopio pesante.

Per maggiore chiarezza del seguito siano μ, ν, θ coordinate di un punto P. Per un ben determinato χ sia I l'insieme dei punti P, alle cui coordinate corrispondono soluzioni merostatiche. Ovviamente I può essere costituito da punti isolati, oppure da punti isolati e punti di accumulazione di punti di I. In ogni modo I è contenuto tutto nello strato Σ definito da $0 \leq \theta \leq \pi$ ed ad ogni punto di I appartenente ai piani $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ corrispondono rotazioni uniformi intorno all'asse giroscopico. Diremo che un punto P_0 di I è *isolato rispetto a* μ se esiste un intorno i di P_0 tale che tutti i punti di I che cadono in i (se ve ne sono) appartengono anche al piano $\mu = \mu_0$.

Si ha allora subito che:

Una precessione regolare o una rotazione uniforme (escluse quelle intorno all'asse giroscopico) non è stabile rispetto a p, q, r, θ, *se la corrispondente immagine P non è isolata rispetto a* μ.

Per dimostrare ciò basta riprendere, adattandolo, il ragionamento, esposto nel testo citato del Levi-Civita, con il quale l'Autore dimostra la instabilità delle rotazioni permanenti ad asse non giroscopico e delle precessioni regolari del giroscopio pesante ([3]).

Si noti intanto che, durante una generica precessione regolare la quantità $\sqrt{p^2 + q^2}$, modulo del componente equatoriale della velocità angolare, resta costante. Sia allora $\bar{\sigma}$ una precessione regolare corrispondente ai valori $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, e $\bar{P}$ il corrispondente punto immagine. Se $\bar{P}$ non è isolato rispetto a μ, si potrà, in un qualunque intorno di $\bar{P}$, trovare un punto $P^* \equiv (\mu^*, \nu^*, \theta^*)$, con $\mu^* \neq \bar{\mu}$, e quindi una precessione regolare σ^* inizialmente prossima quanto si

([3]) Cfr. testo citato in (2), vol. II, parte II^a, p. 170.

vuole a $\bar{\sigma}$. Confrontiamo la $\bar{\sigma}$ con la σ^*. Vedremo subito che, pur mantenendosi costanti i divari tra i valori sincroni di r e θ, i divari tra i valori sincroni di p e p assumono valori finiti indipendenti dai divari iniziali. Su un piano in cui siano p e q coordinate cartesiane ortogonali siano $\bar{Q}$ e Q^* i punti di coordinate p, q relative alle due precessioni $\bar{\sigma}$ e σ^*. Poichè $p^2 + q^2$ si mantiene nella $\bar{\sigma}$ sempre uguale a $\bar{p}^2 + \bar{q}^2$, nella σ^* a $p^{*2} + q^{*2}$, i punti $\bar{Q}$ e Q^* si muovono su due circonferenze, di raggi rispettivamente uguali a $\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^2}$ ed a $\sqrt{p^{*2} + q^{*2}}$ con velocità angolari $\bar{\mu}$ e μ^*. Ora poichè $\mu^* \neq \bar{\mu}$, i punti Q e Q^* al crescere di t finiranno per trovarsi ad un certo istante da parti opposte rispetto all'origine O cioè a distanza uguale alla somma dei raggi delle due circonferenze. Tanto basta per dire che i valori sincroni di p e q relativi alle due precessioni regolari finiscono per differire di una quantità che non dipende dai divari iniziali delle stesse variabili.

Osservazione Ia - Il ragionamento esposto cade ovviamente in difetto solo se $\bar{P}$ è isolato rispetto a μ oppure se $\sqrt{\bar{p}^2 + \bar{q}^{*2}}$ vale zero. In quest'ultimo caso siamo in presenza di una rotazione uniforme intorno all'asse giroscopico e lo stesso ragionamento serve, in parte, a dimostrare la stabilità rispetto a p e q una volta che essa sia stata stabilita ad r e θ. Infatti in questo caso il cerchio descritto da $\bar{Q}$ degenera nell'origine delle coordinate ed i punti $\bar{Q}$ e Q^* si allontanano al crescere di t al massimo di $\sqrt{p^{*2} + q^{*2}}$ che rappresenta il divario iniziale dei valori di $\sqrt{p^2 + q^2}$ nei due moti. È da osservare però che con ciò non resta senz'altro dimostrata la stabilità perchè la rotazione uniforme va confrontata anche con tutti i moti variati e non soltanto con le precessioni regolari ad essa prossime.

Osservazione IIa - Se anzichè di stabilità teorica si intenda parlare di stabilità pratica nel senso che se pur diventa finito il divario tra due moti a condizioni iniziali prossime, tuttavia tale divario non è in pratica percepibile, allora ci può essere stabilità anche nel caso in cui $\bar{P}$ non sia isolato rispetto a $\bar{\mu}$, purchè il rapporto $\overline{\mu}/\overline{\nu}$ relativa a $\overline{\sigma}$ sia tale che l'angolo di apertura del cono mobile del POINSOT sia così piccolo, da non essere in pratica percepibile. Siamo ovviamente nel caso delle precessioni lente ([1]) ed anche qui la stabilità teorica rispetto ad r e θ ci assicura della stabilità pratica della precessione rispetto, si intende, solamente alle altre precessioni e non a tutti i moti variati. Rimando al testo citato di LEVI-CIVITA la giustificazione di tale asserto poichè il ragionamento là esposto per il giroscopio pesante vale in generale.

OSSERVAZIONE III^a - La possibilità di precessioni regolari a immagine P isolata rispetto a μ è confermata dall'esempio seguente. Si consideri un giroscopio pesante sollecitato, oltre che dal peso, da una coppia addizionale di momento diretto come $\boldsymbol{k}$ del tipo $\boldsymbol{M}_1 = -k^2 (\mu - \mu_0) \boldsymbol{k}$ che potrebbe derivare da particolari collegamenti, del tipo a frizione, di C, con un corpo rotante con velocità costante μ_0. In questo caso saranno possibili solo precessioni regolari corrispondenti a velocità proprie del giroscopio uguali a μ_0.

2. - Stabilità rispetto a θ nel caso riducibile alle quadrature.

In molti casi (giroscopio pesante, giroscopio sollecitato da forze derivanti da un potenziale funzione della sola θ, o da forze di potenza nulla) la conoscenza di due ulteriori integrali (dei momenti) oltre a quello della forza viva permette di ridurre il problema dinamico all'ntegrazione di un'equazione, in $s = \cos\theta$, del tipo

$$\dot{s}^2 = \Phi(s, h, a, b), \qquad 0 \leq s \leq 1, \tag{11}$$

ove h è la costante dell'energia, a, b le costanti dei momenti.

In questi casi se s_0, h_0, a_0, b_0 soddisfano al sistema

$$\Phi(s_0, h_0, a_0, b_0) = 0 \qquad \Phi'(s_0, h_0, a_0, b_0) = 0 \tag{12}$$

([1]) La denominazione di precessioni lente è presa dal caso del giroscopio pesante, perchè ivi tali precessioni si hanno con velocità precessionale piccolissima, mentre l'apertura del cono mobile nel POINSOT può essere piccolissima anche con velocità precessionali grandi.

cioè se l'equazione ha una radice multipla in s_0, allora il moto relativo a qualunque condizione iniziale, tale però che $\cos\theta_0 = s_0, \dot{\theta}_0 = 0$, l'energia sia h_0, ed i momenti valgono a_0 e b_0, è una precessione regolare o una rotazione uniforme. Vogliamo studiare la stabilità ridotta all'unico parametro θ in questo caso.

Si ha senz'altro *che se Φ è funzione continua dei parametri h, a, b, s, ed in s_0 la $\Phi(s, h_0, a_0, b_0)$ ha un massimo effettivo la stabilità ridotta all'unico parametro θ è assicurata.*

Sia (α, β) un intorno γ di s_0 tale che in (α, β), $\Phi(s, h_0, a_0, b_0)$ sia sempre negativa o nulla, con la condizione che agli estremi essa sia negativa; questo intorno esiste ovviamente per l'ipotesi fatta che in s_0 la $\Phi(s, h_0, a_0, b_0)$ abbia un massimo effettivo. Si varino ora di poco le condizioni iniziali, e denotiamo con h', a', b' i valori delle costanti h, a, b, relativamente a questo nuovo moto. Se h', a', b' sono sufficentemente prossimi ad h_0, a_0, b_0 $\Phi(s, h', a'. b',)$ sarà, pure essa, negativa agli estremi dell'intervallo (α, β) e poichè essa dovrà essere positiva o nulla per la realtà del moto, in qualche punto interno all'intervallo γ, essa avrà un numero pari di zeri in γ (contando gli zeri con la loro molteplicità). Se s' ed s'' sono il minimo ed il massimo di questi zeri (5) avremo che partendo da un angolo $\bar{\theta}$, prossimo sufficientemente a θ_0, il sistema si muove in maniera che θ non esce dall'intervallo (θ', θ''), ove è $\cos\theta' = s'$ e $\cos\theta'' = s''$. Infatti in $\overline{\alpha\,\theta'}$ ed in $\overline{\theta''\,\beta}$ è certamente negativa la $\Phi(s, h', a', b')$. Basta quindi, per concludere, pensare che s' ed s'' tendono ambedue ad s_0, appena h', a', b' tendono ad h_0, a_0, b_0.

Si osservi ora che implicitamente si è supposto che s' sia interno all'intervallo $(-1, +1)$, intervallo che d'ora in poi denoteremo con S, ma il teorema non cessa di essere verificato se s cade in uno degli estremi di S. Inoltre si può anche osservare che la stabilità rispetto a θ si ha anche quando esista un intorno completo di s_0, in cui sia identicamente $\Phi(s, h_0, a_0, b_0) \equiv 0$, e la si ha pure, quando esista un intorno destro

(5) Se $\Phi(s, h', a', b')$ dovesse avere infiniti zeri si parlerà di estremo inferiore ed estremo superiore del loro insieme.

o sinistro di s_0, in cui sia $\Phi(s, h_0, a_0, b_0) \equiv 0$, mentre nell'altro intorno (aperto a destra o a sinistra) sia $\Phi(s, h_0, a_0, b_0) > 0$.

Si può anche provare che *se $\Phi(s, h_0, a_0, b_0)$ ha un minimo effettivo in s_0, riconoscibile dal segno della derivata seconda, la instabilità rispetto a θ è senz'altro assicurata.*

In effetto esisterà certamente un intorno (α, β) di s_0 tale che in esso $\Phi''(s, h_0, a_0, b_0)$ sarà maggiore di un certo $\varepsilon > 0$ e, per la supposta continuità rispetto ai parametri, se h', a', b' sono sufficientemente prossimi ad h_0, a_0, b_0, sarà anche certamente, in tutto (α, β), $\Phi''(s, h', a', b') > \varepsilon > 0$. Quindi $\Phi(s, h', a', b')$ o è sempre positiva in (α, β) o ammette al più due zeri s' ed s'' interni ad (α, β), per modo che Φ è positiva in $\overline{\alpha\, s'}$ ed in $\overline{s''\, \beta}$ e negativo in $\overline{s'\, s''}$. In ogni caso, a partire da qualunque posizione iniziale compatibile con h', a', b', θ raggiungerà α o β durante il moto e ciò basta per dedurre la instabilità annunciata.

Non si può invece dare un criterio generale nel caso di radici di molteplicità superiore a due in cui non si abbia un massimo effettivo. Per dare un'idea della difficoltà che si incontrano in questa eventualità si consideri il caso che la $\Phi(s, h_0, a_0, b_0)$ abbia in s_0 una radice tripla e si supponga che variando h_0, a_0, b_0 di poco ma del resto comunque (sempre però compatibilmente con le restrizioni imposte dal loro significato meccanico), $\Phi(s, a, b, c)$ ammetta sempre tre zeri reali che denoteremo con s', s'', s''' ordinandoli nel senso crescente delle relative distanze in valore assoluto da s_0. Si ha allora che se è sempre $\Phi(s, h, a, b) > 0$ in $\overline{s'\, s''}$, la stabilità rispetto a θ è assicurata. In ogni altro caso si ha instabilità. Il caso sopra esposto in cui si ha stabilità, che è ovviamente un caso eccezionale, non si lascia però in generale escludere. Bisognerà esaminare volta per volta tale eventualità.

3. – Applicazione al moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla.

Consideriamo il caso, studiato da G. Grioli [6], del moto di un giroscopio C attorno al baricentro G, supponendo che la forza

[6] D'ora in poi lo chiameremo per brevità caso del Grioli. Il lavoro a cui ci si riferisce è quello citato in (1).

agente sull' elemento generico $d\,C$, intorno di P, sia del tipo $\boldsymbol{F} = \mu^* \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v}\, d\, C$, ove $\boldsymbol{v}$ denota la velocità di P, $\boldsymbol{H}$ un vettore costante, μ^* una funzione di P soddisfacente alla sola restrizione che $\int_C \mu^*\, d\, C$ non sia nulla e che una distribuzione di masse, di densità μ^*, abbia rotondo l' ellissoide d' inerzia relativo a G, con l' asse di rivoluzione coincidente con l' asse del giroscopio.

In questo tipo di sollecitazione rientrano le forze centrifughe composte dovute al moto di rotazione terrestre ($\mu^* = -\mu$, $\boldsymbol{H} = 2\, \omega_\tau$, ove si denotino con μ la densità materialedi C, con ω_τ la velocità angolare terrestre) oppure la forza esercitata sulle particelle di C quando in C vi sia una distribuzione μ^* di cariche elettriche e quando esso sia immerso in un campo magnetico costante $\boldsymbol{H}$.

Sia G, ξ, η, ζ una delle teorie centrali d' inerzia [levogire]; ω la velocità angolare del giroscopio, $\boldsymbol{k}$ il versore di ζ, χ il versore di $\boldsymbol{H}$; inoltre poniamo

$$(13) \quad \int_C \mu^*\, \xi^2\, d\, C = \int_C \mu^*\, \eta^2\, d\, C = -\frac{C^*}{2}\,; \int_C \mu^*\, \zeta^2\, d\, C = \frac{C^*}{2} - A^*\,.$$

Il momento $\boldsymbol{M}$ della sollecitazione esterna rispetto a G si riduce, in base a note considerazioni,

$$(14) \qquad \boldsymbol{M} = \int G\, \boldsymbol{P} \wedge \mu^* (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v})\, d\, C = \omega^* \wedge H \left(\frac{C}{2}\, \chi + \right.$$
$$\left. + (A^* - C^*) \cos\theta\, \boldsymbol{k} \right),$$

ove con θ abbiamo denotato, come al solito, l' angolo di nutazione.

Da questa espressione del momento $\boldsymbol{M}$ si riconosce intanto che oltre alle rotazioni uniformi intorno all' asse giroscopico, diretto come $\boldsymbol{H}$, sono possibili ∞^4 moti merostatici corrispondenti a condizioni iniziali soddisfacenti alla equazione caratteristica, che si ottiene dalla (10) ponendo

$$(15) \qquad \mathcal{M} = -\mu\, H \frac{C^*}{2} + \nu\, H\, (A^* - C^*) \cos\theta\,,$$

ed inoltre ovviamente alla $\dot{\theta}(0) = 0$. L'espressione (15) si ricava dalla (14) con la sostituzione (1), e la (10) con ciò diventa:

$$(16) \quad C\mu\nu - (A - C)\nu^2 \cos\theta + \mu H \frac{C^*}{2} - \nu H(A^* - C^*)\cos\theta = 0 .$$

Da quest'ultima si riconosce senz'altro che nessuno dei moti merostatici del sistema ha la sua immagine P isolato rispetto a μ.

Tanto basta, attesi i risultati dei numeri precedenti, per asserire che nessuna precessione regolare o rotazione uniforme, tranne quelle intorno all'asse giroscopico diretto come $\boldsymbol{H}$, può essere stabile rispetto a tutti i parametri p, q, r, θ.

Sempre tenendo presenti le osservazioni dei numeri precedenti, ci riserveremo nel prossimo numero di studiare la stabilità rispetto a θ di ogni soluzione merostatica ed in particolare delle rotazioni uniformi attorno all'asse giroscopico orientato come $\boldsymbol{H}$. In quest'ultimo caso la stabilità rispetto a θ permette di dedurre la stabilità teorica della rotazione come faremo infine vedere.

Per quanto riguarda le precessioni lente si osservi che, risolvendo rispetto a μ la (16), si ottiene

$$(17) \qquad \mu = \frac{(A - C)\nu + H(A^* - C^*)}{C\nu - H\dfrac{C^*}{2}}\, \nu \cos\theta$$

dalla quale risulta che per un generico θ sono possibili precessioni lente. Infatti per valori della velocità di precessione ν molto prossimi a $\nu_0 = \dfrac{HC^*}{2C}$, la corrispondente velocità angolare μ è grandissima, per modo che il rapporto $\dfrac{\mu}{\nu}$ è pure grandissimo e quindi l'apertura del corrispondente cono mobile del Poinsot è molto piccola.

Anche in questo caso la stabilità rispetto a θ ci basterà per assicurare la stabilità pratica della precessione.

Osserviamo infine che dalla (16) si ricava, ponendo $\mu = 0$, l'equazione caratteristica delle rotazioni uniformi, che è precisamente

$$(18) \qquad \nu \cos\theta\,\big((A - C)\nu + H(A^* - C^*)\big) = 0 .$$

Questa è verificata intanto per $\nu = 0$, qualunque sia θ e questo caso corrisponde all'equilibrio, che sussiste per qualunque posizione di C intorno a G. Inoltre la (18) è verificata per $\theta = \frac{\pi}{2}$ qualunque sia ν, cioè il giroscopio può ruotare intorno ad un asse ortogonale all'asse giroscopico disposto parallelamente alla direzione di $\boldsymbol{H}$ qualunque sia la sua velocità angolare.

Infine l'espressione (18) è verificata qualunque sia θ per

$$(19) \qquad \nu = -\frac{A^* - C^*}{A - C} H$$

cioè C ammette rotazioni uniformi, sempre intorno all'asse per O, parallelo ad $\boldsymbol{H}$, qualunque sia l'orientamento di C, purchè la velocità di rotazione sia quella data da (19).

4. - Stabilità rispetto a θ delle soluzioni merostatiche nel caso del Grioli.

Vogliamo in questo numero occuparci della stabilità rispetto a θ delle soluzioni merostatiche individuate nel n. precedente per il caso del Grioli.

Assunte come coordinate lagrangiane, come al solito, i tre angoli di Eulero della terna G, ξ, η, ζ, solidale, con l'asse ζ coincidente con l'asse giroscopico, rispetto ad una terna G, x, y, z fissa, con l'asse, z orientato come $\boldsymbol{H}$, la relativa funzione L ha la forma

$$(20) \quad L = \frac{1}{2}\Big\{ C\dot{\varphi}^2 + 2\, C\cos\theta\, \dot{\varphi}\,\dot{\psi} + (A\, sen^2\theta + C\cos^2\theta)\,\dot{\psi}^2 + A\,\dot{\theta}^2 +$$
$$+ H\,(C^*\cos\theta\,\dot{\varphi} + (A^* - C^*)\, sen^2\theta\,\dot{\psi})\Big\}.$$

Il problema dinamico è riducibile alle quadrature poichè φ e ψ sono coordinate cicliche e quindi sussistono, oltre all'integrale dell'energia $T = T_0$, gli integrali dei momenti

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = C(\dot\varphi + \cos\theta\,\dot\psi) + \frac{H}{2} C^* \cos\theta - c_1,$$

$$(21) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = C\cos\theta\,(\dot\varphi + \cos\theta\,\dot\psi) + A\,sen^2\theta\,\dot\psi +$$

$$+ \frac{H}{2}(A^* - C^*)\,sen^2\theta = c^2.$$

Questi ultimi si possono anche scrivere:

$$(21') \qquad \begin{cases} Cr + \frac{H}{2} C^* \cos\theta - c_1, \\ Cr\cos\theta + A\,sen^2\theta\,\dot\psi + \frac{H}{2}(A^* - C^*)\,sen^2\theta = c_2. \end{cases}$$

Eliminando $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ si giunge mediante l'integrale dell'energia alla equazione

$$(22) \qquad \dot\theta^2 = \frac{1}{A}\Big[2T_0 - \frac{1}{A\,C\,sen^2\theta}\Big\{(A\,sen^2\theta +$$

$$+ C\cos^2\theta)\left(c_1 - \frac{H}{2} C^*\cos\theta\right)^2 -$$

$$2C\cos\theta\left(c_1 - \frac{H}{2}C^*\cos\theta\right)\left(c_2 - \frac{H}{2}(A^* - C^*)\,sen^2\theta\right) +$$

$$+ C\left(c_2 - \frac{H}{2}(A^* - C^*)\,sen^2\theta\right)^2\Big\}\Big].$$

Questa, ponendo $s = \cos\theta$, si può scrivere

$$(23) \qquad \dot s^2 = \Phi(s, T_0, c_1, c_2) \qquad -1 \leq s \leq 1$$

ove è

$$(24)\qquad \Phi(s) = \frac{1}{A^2 C}\Bigg[2\,A\,C T_0 (1-s^2) - \Bigg\{\Big(A(1-s^2) + $$

$$+ C s^2\Big)\Big(c_1 - \frac{H}{2} C^* s\Big)^2 - 2\,C s\Big(c_1 - \frac{H}{2} C^* s\Big)\Big(c_2 - $$

$$- \frac{H}{2}(A^* - C^*)(1-s^2)\Big) + C\Big[c_2 - \frac{H}{2}(A^* - C^*)(1-s^2)\Big]^2\Bigg\}\Bigg] .$$

Si riconosce ora subito che $\Phi(s)$ è un polinomio di 4° grado che gode delle proprietà che seguono.

Intanto il coefficiente di s^4 in $\Phi(s)$, che denoteremo con α_0, è dato dalla

$$(25)\qquad \alpha_0 = \frac{H^2}{4\,A^2 C}\left(\frac{A}{C} - \frac{A^{*2}}{C^{*2}}\right),$$

e quindi $\Phi(x) = \pm\, \infty$ a seconda che $\frac{A}{C} \gtrless \frac{A^{*2}}{C^{*2}}$; il polinomio si riduce ad essere di terzo grado se $\frac{A}{C} = \frac{A^{*2}}{C^{*2}}$.

Denoteremo nel seguito, per maggior semplicità, il rapporto $\frac{A}{C}$ con λ e con λ^* il rapporto $\frac{A^*}{C^*}$.

Con facili calcoli si trova inoltre che, in generale, sussiste per il polinomio $\Phi(s)$ la diseguaglianza

$$(26)\qquad \Phi(\pm 1) = -\frac{1}{A^2}\left(c_1 - H\frac{C^*}{2} \pm c_2\right)^2 \leq 0 .$$

Distinguiamo ora i tre casi $\alpha_0 > 0$, $\alpha_0 < 0$, $\alpha_0 = 0$.

1° Caso : $\alpha_0 > 0$.

Sarà cioè

$$(27)\qquad \lambda > \lambda^{*2} .$$

Notiamo subito che nel caso delle forze centrifughe composte, poichè è $A^* = A$ e $C^* = C$, la (27) comporta $C > A$.

Il polinomio $\Phi(s)$ è negativo o nullo in $+1$ ed in -1, è positivo in $+\infty$ e $-\infty$ ed è certamente positivo o nullo in un punto almeno dell'intervallo S. Esso può quindi avere:

a) Due zeri reali distinti o coincidenti interni ad S o negli estremi di S e due zeri distinti esterni ad S o negli estremi di S.

b) Uno zero doppio in un estremo, in cui la Φ è minima, ed altri due zeri distinti o coincidenti non tutti e due interni, nè tutti e due esterni ad S.

c) Uno zero doppio in un estremo, in cui la Φ è massima, e due zeri semplici non interni ad S.

d) Uno zero triplo in un estremo ed uno zero semplice non interno ad S.

Saranno dunque possibili in questo caso moti con nutazione dell'asse e moti in cui l'asse tende a disporsi parallelamente alla direzione del campo $\boldsymbol{H}$.

Per condizioni iniziali soddisfacenti alla equazione (16), $\Phi(s)$ ha uno zero multiplo in un punto s_0 dell'intervallo $(-1, +1)$; se s_0 è uno zero multiplo interno all'intervallo S, $\Phi(s)$ non può avere ivi che un massimo. Infatti lo zero non può essere che doppio perchè internamente ad S non possono cadere più di due zeri di $\Phi(s)$ e perchè $\Phi(s)$ è non positivo agli estremi di S. Ciò basta per dedurre che ogni precessione regolare o rotazione uniforme ad asse di rotazione non coincidente con l'asse giroscopico è stabile rispetto a θ e quindi, tenuti presenti gli integrali dei momenti, anche rispetto a $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ e di conseguenza rispetto ad r; purtuttavia essa non è stabile, per quanto abbiamo detto sopra, rispetto a p e q.

Se si considera una precessione lenta σ, la dimostrata stabilità rispetto a θ di $\bar{\sigma}$ ci assicura della sua stabilità pratica. Infatti per l'osservazione del n. 2 il divario tra $\bar{\sigma}$ ed una precessione molto prossima ad essa, non diventa mai appariscente e lo stesso succede se si confronta la $\bar{\sigma}$ con una generica soluzione σ inizialmente prossima a $\bar{\sigma}$; ciò deriva dal fatto che in questa generica σ si presenta a differenza che in una precessione regolare solamente una nutazione dell'asse giroscopico la quale, data la stabilità rispetto a θ, si mantiene dello stesso ordine del divario iniziale da $\bar{\sigma}$.

Per concludere questo primo caso restano solamente da esaminare le rotazioni uniformi intorno all'asse giroscopico orientato come $\boldsymbol{H}$.

Supponiamo quindi di partire da condizioni iniziali relative ad una rotazione istantanea intorno all'asse giroscopico diretto e, per fissare le idee, orientato come $\boldsymbol{H}$. Cioè supponiamo

$$(28) \qquad \theta_0 = 0\,, \dot{\theta}_0 = 0\,, c_1 = Cr + \frac{H}{2} C^*, c_2 = Cr, 2\,T_0 = Cr^2 .$$

Il polimonio $\Phi\,(s)$ diventa allora

$$(29) \qquad \Phi(s) = \frac{(1-s)^2}{A^2 C}\Bigg[(1+s)\Bigg\{-\frac{A H^2 C^{*2}}{4}(1-s) - A C C^* r H + \\ + C^2 r H (A^* - C^*) - C s H^2 C^* \left(\frac{A^* - C^*}{2}\right) - \\ - \frac{CH}{4}(A^* - C^*)^2 (1+s)\Bigg\} - C\left(\frac{HC^*}{2} s - Cr\right)^2\Bigg].$$

Ora siccome se è $\Phi\,(s) = (1-s)^2 f(s)$ è anche $\Phi''\,(1) = 2\,f(1)$, il punto $+1$ sarà per $\Phi\,(s)$ un punto di massimo o di minimo, a seconda che l'espressione

$$(30) \qquad -2\,A C C^* r H + 2\,C^2 r H (A^* - C^*) - C H^2 C^* (A - C) - \\ - C H^2 (A^* - C^*)^2 - 2\,C\left(\frac{HC^*}{2} - Cr\right)^2$$

risulta minore o maggiore di zero. Se essa poi è nulla, $\Phi\,(0)$ ha in $+1$ uno zero triplo non potendo tale zero essere di ordine superiore, per quanto visto più sopra.

Il segno dell'espressione (30) coincide col segno della seguente funzione, di secondo grado in r,

$$(31) \qquad f(r) = -C^2 r^2 + r H (A^* C - A C^*) - H^2 A^* (A^* - C^*) .$$

Si noti ora che il discriminante di $f(r)$ è dato da

$$(32) \qquad \Delta = H^2 \left\{(A^* C - A C^*)^2 - 4\,C^2 A^* (A^* - C^*)\right\} .$$

onde se

$$(33)\qquad (\lambda^* - \lambda)^2 - 4\lambda^*(\lambda^* - 1) < 0,$$

Δ è negativo e poichè allora $f(r)$ è pure sempre negativo, $\Phi(s)$ ha un massimo in $+1$, perciò qualunque sia r la rotazione uniforme è certamente stabile rispetto a θ. Che se è invece

$$(34)\qquad (\lambda^* - \lambda)^2 - 4\lambda^*(\lambda^* - 1) > 0$$

allora, denotate con r_1 ed r_2 le due radici dell' equazione $f(r) = 0$, avremo che per $r_1 < r < r_2$ la rotazione uniforme è instabile rispetto a θ e per $r < r_1$ o $r > r_2$ essa è stabile.

Osserviamo che nel caso delle forze centrifughe composte si ha $A^* = A$, $C^* = C$ e quindi $\lambda = \lambda^*$ è certamente minore di 1. In conseguenza di ciò la rotazione uniforme considerata sarà stabile o instabile rispetto a θ a seconda che varrà il segno superiore o inferiore nella seguente disuguaglianza

$$(35)\qquad r \gtrless 2\,\omega\tau\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\,.$$

È inutile trattare il caso della radice doppia in -1, si troverebbero analoghi risultati, data la simmetria del sistema dinamico.

Si supponga infine, per finire questo caso, che r annulli la (30), per modo che $\Phi(s)$ ammetta addirittura una radice tripla in $+1$.

Dimostriamo che anche in questo caso la rotazione uniforme è stabile rispetto a θ. Basta infatti pensare che variando di poco le condizioni iniziali il polinomio $\Phi(s)$ che ammetteva una radice tripla in $+1$ ed era negativo in tutti i punti interni di S, ammetterà in generale tre radici reali distinte o coincidenti prossime a $+1$, due delle quali, che indicheremo con s_1, s_2 certamente appartenenti ad S e tali che $\Phi(s) \geq 0$ per $s_1 \leq s \leq s_2$ e $\Phi(s) < 0$ per $-1 < s < s_1$ ed $s_2 < s < +1$. Tanto basta per assicurare che la rotazione uniforme è certamente stabile rispetto a θ.

È inutile rifare il ragionamento, già esposto più sopra nel caso delle precessioni, lente per assicurare che la stabilità rispetto a θ comporta, in questo caso, la stabilità completa della rotazione uniforme.

II° Caso : $\alpha_0 < 0$.

Sarà cioè

$$\lambda < \lambda^{*2} . \tag{36}$$

Notiamo anche qui che la (36) composta, nel caso delle forze centrifughe composte $C < A$.

In questo caso $\Phi(s)$, che è sempre negativo o nullo in $+1$ ed in -1 e negativo all'infinito, non può avere una radice esterna ad S, e tre radici interne e può avere radici doppie triple e quadruple. In questo caso si potranno avere moti in cui θ tende asintoticamente ad un valore qualunque θ_0, oltre che moti con nutazione come nel caso precedente.

Se il polinomio ha una radice doppia in un punto s_0, interno ad S la soluzione merostatica corrispondente può essere in questo caso stabile o instabile rispetto a θ, poichè $\Phi(s)$ può avere, a differenza del caso precedente, un massimo o un minimo in quel punto.

Supponiamo ora che il polinomio $\Phi(s)$ ammette in un punto s_0, intero ad S, una radice tripla ed una radice distinta s_1 che sarà ovviamente semplice e non potrà essere esterna per l'osservazione già fatta. Siano T_0, c_1^0, c_2^0 i valori di T, c_1, c_2 corrispondenti a questa eventualità. In questo caso la soluzione è certamente instabile rispetto al parametro θ.

Per provare ciò si assumano condizioni iniziali prossime a quelle corrispondenti alla soluzione merostatica considerata ma in tal guisa (e ciò è sempre possibile) che c_1 e c_2 conservino i valori c_1^0, c_2^0 mentre T_0 diventi $T_0 + \bar{T}$, ove per fissare le idee sia $\bar{T} > 0$. Denotato allora con $\Phi_0(s)$ ciò che diventa $\Phi(s)$ per i valori T_0, c_1^0, c_2^0 delle costanti T, c_1 e c_2, il polinomio $\bar{\Phi}(s)$ corrispondente T valori $T_0 + \bar{T}, c_1^0, c_2^0$ avrà, come si riconosce subito, la forma

$$\bar{\Phi}(s) = \Phi_0(s) + \frac{2\bar{T}}{A}(1 - s^2) .$$

Notiamo ora che la funzione secondo termine del secondo membro è sempre > 0 in tutti i punti interni ad S, onde il polinomio $\overline{\Phi}(s)$ continua a conservarsi positivo, in tutto un intorno di s_0 destro o sinistro a seconda che $\Phi_0(s)$ è crescente o decrescente in s_0, intorno che è di ampiezza finita in quanto il suo secondo estremo può essere o un estremo di S o un punto prossimo ad s_1. Tanto basta per concludere che la soluzione merostatica è instabile rispetto a θ.

Supponiamo infine che $\Phi(s)$ abbia una radice quadrupla in s_0 che può essere anche un estremo di S. Poichè $\Phi(s)$ ha ivi necessariamente un massimo la soluzione merostatica è stabile rispetto a θ.

Non restano da studiare che le rotazioni uniformi intorno all'asse giroscopico diretto come $\boldsymbol{H}$. Se in $+1$ o in -1 cade una radice doppia, il ragionamento fatto nel caso $\alpha_0 > 0$ continua a valere anche qui. E continuano a valere tutte le conseguenze relative, tranne che, nel caso delle forze centrifughe composte, si può dire ora che certamente sarà $\lambda > 1$, poichè ora è $C > A$: onde essendo sempre $\Delta < 0$, tutte le rotazioni uniformi intorno all'asse giroscopico diretto come $\boldsymbol{H}$ sono stabili.

Tornando al caso generale supponiamo infine che r annulli la (29), per modo che $+1$ sia radice tripla di $\Phi s)$ (questo caso non si verifica, nel caso delle forze centrifughe composte, che se $\lambda = 1$ ed $r = 0$). Allora se l'ulteriore radice semplice s^* di $\Phi(s)$ e maggiore di 1 la rotazione uniforme è stabile, se è minore di 1 è instabile.

Infatti, nel primo caso, il polimonio $\Phi(s)$, relativo a condizioni iniziali variate di poco da quelle relative alla soluzione merostatica considerata, avrà uno zero prossimo ad s^* e certamente due zeri interni ad S distinti o coincidenti e prossimi a 1, tra i quali $\Phi(s)$ si mantiene positivo mentre nei punti esterni all'intervallo da essi delimitato, ma interni ad S, la Φ si mantiene negativa. Con ciò risulta, al solito, provata la stabilità.

Nel secondo caso $s^* < 1$ operiamo, come più sopra, considerando condizioni iniziali variate in tal guisa che c_1 e c_2 conservino i valori c_1^0, c_2^0 relativi alla soluzione merostatica considerata, mentre T_0 diventa $T_0 + \overline{T}$, con $\overline{T} > 0$. Varrà allora anche qui la relazione (37) ed in tutto un intervallo finito, a sinistra di $+1$, $\Phi(s)$ si manterrà positiva il che permette di dedurre la instabilità della rotazione uniforme.

Se addirittura $+1$ è radice quadrupla la soluzione merostatica è ovviamente stabile.

Anche qui è poi ovvio che, come nel caso precedente, la stabilità rispetto a θ comporta la stabilità completa.

III° Caso : $\lambda_0 = 0$.

Sarà quindi

$$\lambda = \lambda^{*2} . \tag{38}$$

Notiamo anche qui che, nel caso delle forze centrifughe-composte, la (38) comporta $\lambda = 1$ e cioè che l'ellissoide d'inerzia di C è una sfera.

Il polinomio $\Phi(s)$ si riduce ad un polinomio di terzo grado e poichè continua a valere la (26), l'andamento di questo polimonio resta fissato sufficientemente per poter stabilire che esso avrà, in generale, al massimo due zeri reali distinti o coincidenti interni ad S. Può avere uno zero doppio in un estremo oppure anche uno zero triplo in un estremo, a meno che non sia identicamente nullo. Con considerazioni analoghe a quelle dei numeri precedenti si stabilisce che i moti merostatici, corrispondenti ad una radice doppia interna ad S, sono stabili. Per le rotazioni uniformi, corrispondenti ad una radice doppia coincidente con $+1$, si ha, considendo la (33), che per $\sqrt{\lambda} = \lambda^*$ interno all'intervallo $\left(1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$ ogni rotazione uniforme, intorno all'asse giroscopico diretto come $\boldsymbol{H}$, è stabile, qualunque sia la velocità angolare r; se invece $\sqrt{\lambda} = \lambda^*$ è esterno all'intervallo suddetto, lo stesso succede solo per r esterno all'intervallo delle due radici r_1 ed r_2 della corrispondente $f(r) = 0$, invece per $r_1 < r < r_2$ la rotazione uniforme è instabile.

Se $\Phi(s)$ ammette una radice tripla in una estreno, la rotazione è certamente stabile.