RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA MEHLE NIDITO

Sulla classificazione cremoniana delle congruenze di coniche di indice 1 dell'S_3

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 430-445

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__430_0>

SULLA CLASSIFICAZIONE CREMONIANA DELLE CONGRUENZE DI CONICHE DI INDICE 1 DELL' S_3

Memoria (*) *di* MARIA MEHLE NIDITO (*a Padova*).

Introduzione. - Il problema della classificazione delle congruenze di coniche di indice 1 dell' S_3 è stato risolto dal punto di vista proiettivo da D. MONTESANO (1). La classificazione da lui fatta si basò sul tipo dell' involuzione segata dalle coniche della congruenza sopra un piano generico dello spazio, riguardando come coniugati due punti del piano appartenenti ad una medesima conica.

Questa classificazione introduce il sistema omaloidico dei piani come un sistema previlegiato rispetto alla classificazione cremoniana. Infatti, una trasformazione cremoniana che trasforma la congruenza di coniche in un' altra congruenza di coniche, muta il sistema omaloidico dei piani del primo spazio in un sistema omaloidico di superficie del secondo e un sistema omaloidico di superficie del primo nel sistema omaloidico dei piani del secondo spazio. Ora può accadere che l' involuzione segata dalle coniche della congruenza sopra i piani del primo spazio non sia dello stesso tipo di quella segata dalle coniche trasformate sopra i piani del secondo spazio, in quanto i due sistemi di piani appunto non sono equivalenti fra di loro. Come verrà dimostrato in seguito questo accade per diversi tipi di congruenze.

S. KANTOR (2), attraverso alcune affermazioni arbitrarie con-

(*) Pervenuta in Redazione il 19 novembre 1951.

(1) MONTESANO DOMENICO: *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio.* [Rendiconto dell' Accademia delle Sc. Fis. e Mat., Vol. I, (3) 1895: Nota I. fasc. IV; Nota II. fasc. VII].

(2) S. KANTOR: *Lineare* ∞^{r-1} *Systeme von Kegelsclnitten in Raum von k Dimensione.* [Amer. J. of Math. 23 (1901)].

clude senz' altro che i tipi di congruenze di coniche cremonianamente distinti sono due soli, però non lo dimostra. Egli inoltre fa una breve critica della classificazione fatta da MONTESANO, accusandola appunto di non avere carattere cremoniano.

Nella presente nota faccio nella prima parte una succinta descrizione dei tipi di congruenze di coniche proiettivamente distinti, quale risultato della classificazione di MONTESANO. Successivamente faccio vedere quali dei tipi sono riducibili a stelle di rette e quali cremonianamente equivalenti a tipi più semplici. Infine giungo al *risultato* che i 25 tipi di congruenze di coniche, proiettivamente distinti del MONTESANO danno luogo a due soli tipi di congruenze di coniche cremonianamente distinti:

1° Congruenza delle coniche che giacciono nei piani di un fascio, generando in ciascun piano un fascio di coniche.

2° Congruenza delle coniche caratteristiche di una rete di superficie cubiche con una curva base del settimo ordine.

Nella seconda parte dimostro che i due tipi ora citati sono effettivamente cremonianamente distinti. Allo scopo considero i sistemi di coniche degeneri delle due congruenze e dimostro che essi non sono cremonianamente equivalenti e perciò non lo sono neanche le rispettive congruenze di coniche.

Parte prima

1. – La classificazione proiettiva delle congruenze di coniche di indice 1 fatta dal MONTESANO si basò principalmente sulla corrispondenza birazionale ed involutoria, che si viene ad avere sopra un piano generico dello spazio, riguardando come coniugati due punti situati su una medesima conica della congruenza.

Ora come è noto in una involuzione piana si possono presentare tre casi: che essa ha

1° un fascio di curve unite razionali;

2° una rete di curve unite ellittiche; oppure

3° solo un fascio di curve unite ellittiche.

E quindi l'involuzione è riducibile cremonianamente rispettivamente a quella del tipo di DE JONQUIRÈS, GEISER e BERTINI.

In corrispondenza a questi tre tipi di involuzioni una congruenza lineare di coniche può essere determinata:

1° da un fascio di superficie razionali, a sezioni piane razionali, su ciascuna delle quali è determinato un fascio di coniche;

2° da una rete di superficie razionali, a sezioni piane ellittiche, avente come curve caratteristiche le coniche della congruenza;

3° da un fascio di superficie razionali, a sezioni piane ellittiche, su ciascuna delle quali è determinato un fascio di coniche.

In questo modo Montesano ottiene tre famiglie proiettivamente distinte di congruenze di coniche di indice 1.

Tenendo poi conto dei vari tipi possibili dei fasci e delle reti di superficie, che hanno le sopra dette sezioni e possono generare una congruenza di coniche di indice 1, egli divide ognuna delle tre famiglie in vari tipi e trova così 25 tipi proiettivamente distinti.

I tipi della prima famiglia sono i seguenti:

1° Congruenza determinata da una curva gobba C di ordine $n \geq 4$ che ha $n-4$ punti sopra una retta d. Un piano generico del fascio d incontra la C fuori di d in 4 punti, che si assumono come punti base di un fascio di coniche. Le coniche di questo fascio generano, al variare del piano per la retta d, una congruenza di coniche.

2° Congruenza determinata da un fascio F di quadriche riferite proiettivamente alle generatrici di una rigata razionale S_μ. Segando ogni quadrica del fascio F coi piani passanti per la generatrice corrispondentele nella proiettività stabilita, si ottengono ∞^1 coniche che giacciono sulla quadrica.

3° Un fascio di rigate cubiche F, (aventi in comune la direttrice rettilinea doppia d) ed una curva razionale C, che abbia in comune con ogni superficie del fascio un solo punto variabile determinano una congruenza di coniche, della quale ogni conica si trova su una superficie del fascio F e passa per il punto variabile che questa ha in comune con la C.

4° Un fascio di superficie di Steiner, (aventi in comune le tre rette doppie) ed una curva razionale C che abbia in comune con ogni superficie del fascio un solo punto variabile, determinano una congruenza di coniche nello spazio, della quale ogni conica si trova su una superficie del fascio F.

5° Un fascio di rigate del 4° ordine (aventi in comune la direttrice rettilinea tripla d) determina una congruenza di coniche nello spazio, formata dalle coniche situate sulle superficie del fascio e appartenenti ai piani bitangenti di tali superficie.

6° Un fascio di rigate F del 4° ordine (aventi una medesima cubica doppia), determina una congruenza di coniche nello spazio formata dalle coniche situate sulle superficie del fascio e appartenenti ai piani bitangenti di tali superficie.

Le congruenze di coniche della seconda famiglia sono le curve caratteristiche di una rete Σ di superficie F, a curve sezioni ellittiche, di uno dei seguenti tipi:

1° Superficie cubiche F_3 con una curva base C_7 del 7° ordine e di genere 5.

2° Superficie F_4 del quarto ordine con una conica base C_2 doppia e una C_6 base semplice, di genere 2, avente sei punti in comune colla conica base.

3° Superficie del 5° ordine F_5 aventi una curva base C_5 doppia, con un punto triplo e una curva base semplice C_3 gobba, avente sei punti in comune con la C_5.

4° Superficie del 5° ordine F_5, aventi una curva base C_6 semplice, una retta base tripla d e due rette basi doppie d_1, d_2.

5° Superficie del 6° ordine F_6 aventi una curva base C_6 doppia, una retta base d tripla, una retta base semplice d' ed un punto base quadruplo P.

6° Superficie del 6° ordine F_6 aventi una curva base C_4 semplice, una curva base C_3 doppia, due rette base d_2 e d_2 triple ed un punto base P quadruplo.

7° Superficie del 6° ordine F_6 aventi una curva base semplice C_7, tre rette base triple d_1, d_2, d_3, ed un punto base quintuplo P.

8° Superficie del 6° ordine F_6 aventi una curva base semplice C_6, una retta base quadrupla d e tre rette base doppie d_1, d_2, d_3.

9° Superficie del 7° ordine F_7 aventi una curva base semplice C_5, una conica base C_2 doppia, due rette base d_1 e d_2 triple, una retta base d quadrupla ed un punto base P quintuplo.

10° Superficie del 7° ordine F_7 aventi una conica base C_2 semplice, una curva base C_5 doppia, una retta base d quadrupla, una retta base d_1 tripla ed un punto base quintuplo P.

11° Superficie dell'ottavo ordine F_8 aventi una curva base C_6 semplice, una conica base C_2 doppia, tre rette base d_1, d_2, d_3 quadruple ed un punto base P sestuplo.

Le congruenze di coniche della terza famiglia sono:

1° Un fascio di superficie F del 3° ordine, aventi in comune due punti doppi D, D' determina una congruenza di coniche, segate sopra una F generica dai piani del fascio avente per asse l'ulteriore intersezione colla F del piano tangente alla F lungo la retta DD'.

2° La congruenza di coniche si ottiene mediante una trasformazione birazionale dello spazio, da un caso particolare della congruenza precedente e perciò non la prendiamo in esame.

3° Un fascio di monoidi F di 4° ordine aventi in comune il punto triplo P, due rette doppie d_1, d_2 passanti per P ed un punto doppio D non situato su tali rette, determina nello spazio una congruenza di coniche segate su una superficie F dai coni quadrici colle generatrici d_1, d_2 e tangenti alla F lungo la retta PD.

4° Un fascio di monoidi F di 5° ordine, aventi in comune il punto quadruplo P, un punto doppio D, una retta tripla d passante per P e due rette doppie d_1, d_2 passanti anche esse per P, una curva gobba C_7 del 7° ordine e la retta $u \equiv PD$, determina una congruenza di coniche, segate su una superficie F da un fascio di superficie $|\Phi^4|$ di quarto ordine, aventi le tre rette d, d_1, d_2 doppie e passanti inoltre per la $\overline{C}^4$, curva intersezione della F con la Φ^4, tangente alla F lungo la retta u.

5° Un fascio di monoidi F di 6° ordine, aventi in comune il punto quintuplo P, un punto doppio D, e tre rette triple d_1, d_2, d_3, passanti per il punto P, una curva gobba C_8 di ottavo ordine e la retta $u \equiv PD$, determina una congruenza di coniche segate su una superficie F da un fascio di superficie $|\Phi^4|$

di quarto ordine, aventi le tre rette d_1, d_2, d_3 doppie e passanti inoltre per la $\overline{C}^4$, curva intersezione della F con la Φ^4 tangente alla F lungo la retta u.

I casi 4° e 5° sono trasformati birazionali di un caso particolare del N. 1° della stessa famiglia. Il sistema omaloidico del primo spazio è formato dalle superficie Φ^4 di STEINER, aventi per rette doppie le rette sopra nominate, e tre punti fondamentali nel caso 4° sulla C_7, nel caso 5° sulla C_8.

2. – Chiameremo *riducibili* quelle congruenze di coniche che mediante una trasformazione cremoniana si riducono ad una stella di rette.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò accada è che esista una superficie o una linea unisecante delle coniche della congruenza, oppure un punto comune a tutte le coniche della congruenza. (Criterio di MONTESANO).

Oppure:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una congruenza di coniche sia riducibile ad una stella di rette è che le coppie di rette delle coniche degeneri della congruenza formino una superficie spezzata in due parti distinte. (Criterio di MORIN) (3).

Infatti poichè i due sistemi di coniche sono non riducibili, i rispettivi sistemi di ∞^1 coniche riducibili non possono venire eliminati mediante trasformazioni cremoniane; quindi se questi due sistemi di coniche sono cremonianamente equivalenti lo devono essere anche i rispettivi sistemi di coniche degeneri.

I tipi di congruenze riducibili ad una stella di rette sono:

I. famiglia: N. 3 - 4 - 5 - 6,

II. famiglia: N. 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12,

III. famiglia: N. 3 - 5 - 7.

In tutte queste congruenze si riescono ad individuare le linee unisecanti delle coniche della congruenza. E così la congruenza di coniche di indice 1 si riduce ad una stella di rette.

(3) U. MORIN: *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali.* [Rend. del Sem. Mat. dell' Università di Padova 1938].

Infatti:

Una congruenza di coniche di indice 1 Σ, se le coniche vanno pensate come elementi, costituisce un ente razionale, cioè si può stabilire una corrispondenza biunivoca ed algebrica, quindi birazionale tra le coniche di Σ ed i punti di un piano π. [Le coniche della congruenza tagliano un piano generico dello spazio in coppie di punti coniugati in una involuzione piana, la quale come risulta dalla classificazione di Bertini, oppure da un noto teorema di Castelnuovo è razionale e di conseguenza è razionale la congruenza].

Prendiamo allora nello spazio S_3 del piano π un punto P non appartenente a questo piano e proiettiamo da esso i punti di π; si ottiene così una stella di rette di centro P. Per mezzo del piano π abbiamo fatto dunque corrispondere ad ogni conica C della Σ una determinata retta della stella; e viceversa.

Sovraponiamo ora i due spazi. Prendiamo un punto 0 qualunque di questo spazio e congiungiamolo con il punto individuato sulla conica C dalla unisecante. Assumiamo questa retta congiungente come asse di un fascio di piani con i quali proiettiamo la conica C sulla retta corrispondente della stella. Così la congruenza Σ si riduce ad una stella di rette.

3. - Per la congruenza N. 2 della seconda famiglia Montesano dà una trasformazione cremoniana che la trasforma nella congruenza N. 1 della stessa famiglia.

Cosi indica pure per la congruenza N. 3 una trasformazione birazionale dello spazio che la trasforma in una congruenza di coniche, che risulta un caso particolare del N. 1.

4. - Esaminando le congruenze N. 2 della I. famiglia e N. 1 della III. famiglia ho trovato che esse si riducono a quella del N. 1 della I. famiglia.

Infatti: Consideriamo la congruenza N. 2 della prima famiglia e riferiamo proiettivamente al fascio F delle quadriche un fascio di piani di asse d e sovraponiamo i due spazi. Fissiamo un punto 0 qualunque della C_4 ellittica, curva base del fascio F e proiettiamo da esso ogni quadrica sul piano corrispondente. Si ottiene così una corrispondenza birazionale tra ogni quadrica ed il piano corrispondente. Le ∞^1 coniche appartenenti alla quadrica si proietteranno in ∞^1 coniche del piano e queste formeranno un fascio. I quattro punti base di esso saranno rispettivamente le proiezioni dei due punti in cui la generatrice incontra la quadrica corrispondente, mentre gli altri due saranno dati dall' intersezione del piano con le due generatrici della quadrica passanti per 0.

Per vedere come si trasforma il n. 1 della terza famiglia riferiamo proiettivamente al fascio di superficie F un fascio di piani di asse d. Supposti sovraposti i due spazi, fissiamo uno dei punti doppi e proiettiamo da esso ogni superficie cubica sul piano corrispondente. Le ∞^1 coniche che si trovano sulla superficie si proiettano in ∞^1 coniche del piano e queste formano un fascio i cui punti base risultano pure dalla proiezione.

Riassumendo possiamo quindi affermare, che i 25 *tipi di congruenze di coniche, di indice* 1 *dell'* S_3 *proiettivamente distinti danno due soli tipi cremoniani di congruenze di coniche*:

1° Congruenza delle coniche che giacciono nei piani di un fascio, generando in ciascun piano un fascio di coniche.

2° Congruenza delle coniche caratteristiche di una rete di superficie cubiche con una curva base del settimo ordine e di genere 5. *Le coniche giacciono nei piani di una stella, avente il centro sulla curva base* C_7.

Parte seconda

In questa seconda parte dimostro che i due tipi di congruenze trovati nella prima parte sono effettivamente cremonianamente distinti, in quanto, come risulterà, lo sono i rispettivi sistemi delle coniche degeneri. Dò *uno schema* del ragionamento che verrà seguito :

Dapprima osservo che le coniche degeneri della 1ª congruenza in senso astratto costituiscono una curva, sopra la quale le tre coniche di ogni piano danno un gruppo di una serie lineare g_3^1 (cioè la curva è trigonale).

Per ottenere un opportuno modello proiettivo della curva che rappresenta le coniche degeneri della 2ª congruenza, trasformo birazionalmente l'S_3 in una varietà algebrica V_3^4 dell'S_4, del quarto ordine, dotata di una retta l doppia. Alle coniche della congruenza dell'S_3, corrispondono le coniche segate sulla V_3^4 dai piani per questa retta l. Un punto generico di un piano fisso S_2 (complementare della retta l nell'S_4) individua un piano per la l e quindi una delle coniche della V_3^4. Alla varietà delle coniche degeneri per la retta l, corrisponde così nel piano S_2 una curva, che risulta del quinto ordine e priva dei punti doppi. Perciò essa non potrà essere una curva trigonale. E quindi le due congruenze di coniche citate risulteranno effettivamente cremonianamente distinte.

Veniamo ora ai dettagli :

Osserviamo, che se i due tipi di congruenze prima trovati fossero cremonianamente equivalenti, la trasformazione cremoniana che ridurebbe uno dei due tipi all'altro, dovrebbe parimenti mutare il sistema delle coniche degeneri di una congruenza in quello dell'altra.

Ora nel caso della congruenza N. 1° dove le coniche giacciono nei piani di un fascio, avremo in generale in ogni piano tre coniche degeneri. Si può senz'altro escludere il caso in cui tre dei quattro punti base sono allineati e di conseguenza tutte le coniche del fascio sono degeneri, nè due possono coincidere.

Infatti, se la C è irriducibile un piano generico del fascio sega la C in 4 punti distinti a tre a tre non allineati, poichè la g_4^1 segata sulla C dai piani del fascio, non ha punti multipli variabili, e se tre di quei punti fossero allineati, le coniche del fascio si spezzerebbero in una retta fissa ed in una variabile, cioè la conica generica della nostra congruenza sarebbe riducibile.

Se poi la C si spezza in due curve C' e C'', affinchè ciascuna delle due non risulti unisecante le coniche della congruenza, i piani del fascio vi devono segare una g_2^1; e quindi sulla coppia C', C'' quattro punti distinti e a tre a tre non allineati.

Variando il piano nel fascio si ottiene così una semplice infinità di coniche degeneri che nel senso astratto costituiscono una curva, sopra la quale le coniche degeneri di ogni piano sono un gruppo di tre punti e questo gruppo varia in una serie algebrica g_3^1 di indice 1 e razionale: quindi in una serie lineare.

Nel caso della congruenza N. 2°, il sistema delle coniche degeneri della congruenza è costituito da coppie di trisecanti complanari della curva base C_7. Procuriamoci allora la curva immagine delle coniche degeneri di quest'ultima congruenza e dimostriamo che essa non può contenere una g_3^1, cioè non può essere una curva trigonale. E così sarà dimostrato che i due tipi di congruenze prima trovati sono effettivamente cremonianamente distinte.

Consideriamo perciò le $f^{(4)}$, superficie del quarto ordine, per la curva base C_7. Esse segano le coniche della congruenza fuori della C_7 in due punti.

Il sistema lineare di tutte le $f^{(4)}$ dell'S_3 dipende da 34 parametri e perchè, una $f^{(4)}$ contenga la C_7 devono essere soddisfatte 24 condizioni, il sistema Σ delle $f^{(4)}$ è un sistema ∞^{10}.

Infatti: Non potendosi in questo caso applicare direttamente la formula di postulazione $(d = mn - p + 1)$ poichè l'ordine della superficie è inferiore ad $n - 2 = 5$; sfruttiamo il fatto che per la C^7 passano le superficie f^3 del terzo ordine.

Consideriamo allora una $f^{(3)}$ generica per la C^7, che si rappresenta su un piano π mediante il sistema delle C^3 passanti per sei punti base $B_1, B_2, \dots B_6$. Alla C_7 si può far corrispondere in π la C^8 con $B_1^{(2)}$ doppio e $B_2^{(3)} \dots, B_5^{(3)}$ tripli.

Il sistema di tutte le $f^{(4)}$ dell'S_3 sega sulla $f^{(3)}$ un sistema lineare *completo* di curve che si rappresenta nel π col sistema delle C^{12} coi sei punti base $B_1^{(4)}, B_2^{(4)}, \dots B_6^{(4)}$ quadrupli.

Quindi le $f^{(4)}$ passanti per la C^7 segano su $f^{(3)}$ il sistema di curve che si rappresenta su π col sistema di tutte le C^4 col punto base B_1^2 doppio e $B_2^1, \dots B_6^1$ semplici. Questo sistema ha la dimensione:

$$r' = 14 - (3 + 5) = 6$$

ma $r = r' + j$ dove j è il numero delle $f^{(4)}$ linearmente indipendenti che contengano la $f^{(3)}$ come arte, cioè $j = 4$.

Il sistema Σ delle $f^{(4)}$ passanti per la C_7, è quindi un sistema ∞^{10}. Imponiamo ora alle $f^{(4)}$ di segare un piano fisso α dell'S_3 in modo che tre dei punti in cui α sega la C_7 siano doppi per le $f^{(4)}$ e chiamiamo P_1, P_2, P_3 questi punti. (Si può senz'altro imporre fin dall'inizio che questi punti siano doppi per le $f^{(4)}$, in quanto imponendo che essi siano doppi per le curve del quarto ordine C_4, segate dal sistema delle $f^{(4)}$ sul piano α, porta come conseguenza che essi sono doppi per le $f^{(4)}$ stesse).

Le $f^{(4)}$ segano allora su α un fascio di C_4 $\left(\frac{4 \cdot 7}{2} - 3 \cdot 3 - 4 = 1\right)$.

L'imposizione dei tre punti doppi diminuisce la dimensione di Σ di sei, che diventa così un sistema Σ' a quattro dimensioni di equazione:

$\lambda_0 f_0 (x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda_1 f_1 (x_1 x_2 x_3 x_4) + \ldots +$ $+ \lambda_4 f_4 (x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ dove le f_i sono le forme omogenee di quarto grado nelle x_1, x_2, x_3, x_4.

È facile vedere ora che il sistema Σ' è semplice. Infatti: consideriamo un punto generico P dell'S_3 e facciamo vedere, che tutte le $f^{(4)}$ del Σ' che passano per P non passono di conseguenza per un altro punto P' variabile con P. Infatti: abbiamo tre fasci di $f^{(4)}$ riducibili in una $f^{(3)}$ fissa avente per punto doppio uno dei tre punti P_1, P_2, P_3 ed in un piano variabile nel fascio, che ha come asse la congiungente degli altri due punti doppi. Ora P', poichè variabile con P, non può essere uno dei punti d'incontro delle tre superficie cubiche fisse ed i piani dei tre fasci che passano per P non hanno in comune alcun altro punto.

Poniamo ora $y_i = f_i (x_1 x_2 x_3 x_4)$ per $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ed interpretiamo le y_i come coordinate proiettive omogenee di punto di uno spazio lineare S_4. L'immagine proiettiva del sistema ∞^4 di $f^{(4)}$ così ottenuta è una varietà algebrica V_3. Alle $f^{(4)}$ corrispondono le sezioni F della V_3 con gli S_3 dell'S_4. Le C_4, che le $f^{(4)}$ segano su α, sono curve fondamentali per il sistema Σ' delle $f^{(4)}$ e perciò ad esse corrispondono i punti di una curva l della V_3. La curva l è una retta. Infatti: una $f^{(4)}$ ha in comune con il piano α (cioè col fascio delle C_4) una sola C_4; quindi l'S_3 che sega sulla V_3 la superficie F corrispondente della $f^{(4)}$ ha in comune con l un solo punto. Alle sezioni F^* della V_3 con gli S_3 per l corrispondono le $f^{(3)}$ per la C_7 più il piano α. Alle coniche dell'S_3 corrispondono sulla V_3 le coniche, che si appoggiano alla retta l in due punti.

Verifichiamo ora che la V_3 è una V_3^4 con la retta l doppia. Una $f^{(3)}$ si rappresenta sul piano π mediante il sistema lineare di cubiche passanti per sei punti A_i e la curva intersezione di due $f^{(3)}$ si rappresenta con una C_9 per la quale i sei punti A_i sono tripli. La C_7 ha nel piano per immagine una C_8 per la quale A_1 è doppio e $A_2, A_3, \ldots A_6$ tripli. (Due $f^{(3)}$ oltre alla linea base C_7 hanno in comune una conica variabile, che ha nel piano per immagine una retta per A_1. Infatti il riferimento di una $f^{(3)}$ al piano π si può sempre effettuare nel modo che a quel fascio di coniche corrisponde un fascio di rette il cui centro è un punto fondamentale ad es. A_1). Sulla C_8 si trovano pure tre generici punti semplici P'_1, P'_2, P'_3 immagini dei punti P_1, P_2, P_3. L'intersezione della $f^{(3)}$ con una $f^{(4)}$ di Σ' ha come immagine una C_{12} coi punti $A_1 A_2 \ldots A_6$ quadrupli e P'_1, P'_2, P'_3 doppi. Questa C_{12} si spezza nella C_8 fissa ed in una C_4 variabile, coi punti A_1 doppio ed i punti $A_2, A_3, \ldots A_6$ e P'_1, P'_2, P'_3 semplici. Il grado del sistema lineare di queste C_4 è $n = 16 - (4 + 5 + 3) = 4$. La V_3 è perciò una varietà V_3^4, del quarto ordine e la retta l è una retta doppia per la V_3^4. Infatti: sulla $f^{(3)}$ il piano α sega una C_3 a cui corrisponde su π una C'_3 coi punti semplici $A_1, A_2, \ldots A_6$ e passante per i punti P'_1, P'_2, P'_3. Il sistema delle C_4, sega questa C'_3 in una serie lineare dell'ordine $v = 12 - 10 = 2$, quindi in una g_2^1. Dunque C'_3 è una curva neutra (luogo di ∞^1 coppie neutre) e quindi la retta l ad essa corrispondente è doppia per la F^*, quindi doppia per la V_3^4.

Consideriamo ora nel sistema Σ' il fascio di superficie $f^{(4)}$ riducibili nella $f^{(3)}$ fissa, avente per punto doppio P_3 ed il fascio di piani passanti per $P_1 P_2$. Ad un piano generico β del fascio corrisponde sulla V_3^4 una superficie cubica. Infatti: il sistema Σ' delle $f^{(4)}$ sega sul piano β un sistema ∞^3 di C_4 coi punti P_1 e P_2 doppi, $P_3 \ldots P_7$ semplici $\left(\frac{4 \cdot 7}{2} - 3 \cdot 2 - 5 = 3\right)$. Al fascio di piani corrisponde sulla V_3^4 un fascio di superficie cubiche, che appartengono ad un S_3 variabile in un fascio, il cui sostegno è quindi un piano π_3 della V_3^4, corrispondente della $f_3^{(3)}$ col punto P_3 doppio.

Infatti: La $f_3^{(3)}$ si rappresenta sopra un piano π mediante il sistema lineare di cubiche passanti per i sei punti A_i tripli, appartenenti ad una conica. La C_8 immagine della C_7, si spezza nella conica C_2 passante per i sei punti A_i e nella sestica C_6 per la quale A_1, P'_1, P'_2 sono semplici, $A_2 \ldots A_6$ doppi. La C_{12} immagine dell' intersezione della $f_3^{(3)}$ con una $f^{(4)}$ ha i punti $A_1, A_2, \ldots A_6$ quadrupli e P'_1, P'_2 doppi. Questa C_{12} si spezza nella conica C_2 passante per i sei punti A_i, contata due volte, nella sestica C_6 ed in una ulteriore conica variabile passante semplicemente per i punti A_1, P'_1, P'_2. Si ottiene così una rete omoloidica di coniche e perciò alla $f_3^{(3)}$ corrisponde un piano sulla V_3^4. Alle tre superficie cubiche col punto doppio rispettivamente P_1, P_2, P_3, corrispondono sulla V_3^4 tre piani π_1, π_2, π_3.

Verifichiamo ora, che ciascuno di questi tre piani ha con la retta l un solo punto in comune. Infatti: la $f_3^{(3)}$ sega il piano α in una C_3 col punto P_3 doppio ed altri sei punti semplici. La C_3 con la retta $P_1 P_2$ forma una particolare C_4, quindi il piano π_3 ha con la retta l un solo punto in comune.

I tre piani π_1, π_2, π_3 sono a due a due incidenti solo in punti. Infatti: l' immagine piana della curva intersezione delle due $f_3^{(3)}$ col punto doppio rispettivamente P_1, P_2 è una C_9 coi punti $A_1, A_2 \ldots A_6$ tripli ed appartenenti ad una conica; la C_9 passa pure per il punto P'_2 (doppio) immagine del punto P_2. Questa C_9 si spezza nella conica passante per i punti $A_1, A_2, \ldots A_6$, nella C_6 parte residua della C_8, immagine della C_7 e nella retta A_1, P'_2. (La C_8 passa per $A_1, A_2, \ldots A_6$ tripli, A_1 doppio, P'_2 semplice e i punti $A, A_2, \ldots A_6$ appartengono ad una conica). Alla retta $A_1 P'_2$ corrisponde un punto dell' S_4: Così si vede che i tre piani sono a due a due incidenti in punti soltanto.

Scriviamo ora l'equazione della V_3^4, assumendo come lato $0_0 0_1$ della piramide fondamentale delle coordinate la retta l. Si ottiene così l'equazione.

$$(1) \quad a_{00} x_0^2 + 2\, a_{01} x_0 x_1 + a_{11} x_1^2 + 2\, a_{02} x_0 x_2 + 2\, a_{12} x_1 x_2 + a_{22} = 0$$

con a_{00}, a_{01}, a_{02} forme omogenee di secondo grado nelle variabili x_2, x_3, x_4; a_{02}, a_{12} forme omogenee di terzo grado nelle variabili $x_2 x_3 x_4$ e a_{22} forma omogenea di quarto grado nelle stesse variabili.

Imponiamo ora alla V_3^4 di contenere i tre piani π_1, π_2, π_3, ponendo i vertici $0_1 0_0$ e il punto unità U nei punti comuni alla retta l ed ai piani π_1, π_2 e π_3 rispettivamente; i vertici 0_2, nel punto comune a π_1, π_3; 0_3 nel punto comune a π_1, π_2; e 0_4 nel comune a π_2, π_3.

L'equazione (1) diventa:

$$(2) \qquad (k\, x_2 x_3 + 2\,\alpha_{00}\, x_2)\, x_0^2 + 2\,(\alpha_{01}\, x_3 - \alpha_{00}\, x_2 - \alpha_{11}\, x_4)\, x_0 x_1 + \\ + (h\, x_3 x_4 + 2\,\alpha_{11}\, x_4)\, x_1^2 + 2\,(\alpha_{02}\, x_2 x_3 + \alpha\, x_2 x_4)\, x_0 + \\ + 2\,(\alpha_{12}\, x_3 x_4 - \alpha\, x_2 x_4)\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 x_3 x_4 = 0$$

con h, k costanti,

$\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha$ forme lineari omogenee nelle variabili $x_2 x_3 x_4$.

Il discriminante A dell'equazione (2) risulta:

$$A \equiv \begin{vmatrix} k\, x_2 x_3 + 2\,\alpha_{00}\, x_2 & \alpha_{01} x_3 - \alpha_{00} x_2 & \alpha_{11} x_4 & \alpha_{02} x_2 x_3 + \alpha\, x_2 x_4 \\ \alpha_{01} x_3 - \alpha_{00} x_2 - \alpha_{11} x_4 & h\, x_3 x_4 + 2\,\alpha_{11}\, x_4 & & \alpha_{12}\, x_3 x_4 - \alpha\, x_2 x_4 \\ \alpha_{02}\, x_2 x_3 + \alpha\, x_2 x_4 & \alpha_{12} x_3 x_4 - \alpha\, x_2 x_4 & & \alpha_{22}\, x_2 x_3 x_4 \end{vmatrix} .$$

L'equazione $A = 0$ rappresenta la curva λ nel piano $x_2 x_3 x_4$ in corrispondenza biunivoca colle coniche degeneri della congruenza. Essa come si vede è una curva di ottavo ordine. Da essa si staccano come si verifica coi facili calcoli, tre rette $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e rimane una C_5. Il fatto che queste tre rette non fanno parte della curva immagine delle coniche degenere della congruenza dell' S_3 si vede facilmente. Infatti: le coniche degeneri per la retta l, le cui immagini nel piano $x_2 x_3 x_4$ sono punti di una di queste tre rette, non sono corrispondenti di coniche degeneri della congruenza, ma bensì delle ∞^1 coniche non degeneri che appartengono ad una delle tre superficie cubiche f_3^3 col punto doppio rispettivamente P_1, P_2, P_3.

Facciamo vedere ora che la C_5 non ha punti doppi fuori delle tre rette $0_1 0_2$, $0_1 0_3$, $0_2 0_3$, cioè che la V_3^4 non ha i punti doppi fuori dei tre piani π_1, π_2, π_3.

Consideriamo la V_3^4 e seghiamola con l'iperpiano S_3, passante per il piano π_1, di equazione $x_0 - \lambda x_4 = 0$. Otteniamo una F che si spezza dentro S_3 nel piano π_1 di equazione $x_4 = 0$ e nella F_3, la cui proiezione sull'iperpiano $x_0 = 0$ ha l'equazione:

$$(4) \quad (k\, x_2 x_3 + 2\, \alpha_{00}\, x_2)\, \lambda^2 x_4 + 2\, (\alpha_{01}\, x_3 - \alpha_{00}\, x_2 - x_{11}\, x_4)\, \lambda\, x_1 +$$

$$(h\, x_3 + 2\, \alpha_{11})\, x_1^2 + 2\, (\alpha_{02}\, x_2\, x_3 + \alpha\, x_2\, x_4)\, \lambda + 2\, (\alpha_{12}\, x_3 - \alpha\, x_2)\, x_1 +$$

$$+ \alpha_{22}\, x_2\, x_3 = 0\,.$$

La sezione della F_3 con il piano π_1 è una C_3 di equazione:

$$(5) \quad 2\, \overline{\alpha}_{01}\, \lambda\, x_1 x_3 - 2\, \overline{\alpha}_{00}\, \lambda\, x_1 x_2 + (h\, x_3 + 2\, \overline{\alpha}_{11})\, x_1^2 + 2\, \overline{\alpha}_{02}\, \lambda\, x_2 x_3 +$$

$$2\, \alpha_{12}\, x_1 x_3 - 2\, \alpha\, x_1 x_2 = 0$$

con $\overline{\alpha}_{01}, \overline{\alpha}_{00}, \overline{\alpha}_{11}, \overline{\alpha}_{02}$ forme di 1 grado in $x_2 x_3$. Poichè λ figura linearmente in essa al variare dell'S_3 la C_3 descrive un fascio. I nove punti base di questo fascio sono punti doppi della V_3^4.

Ma scrivendo la (5) in coordinate non omogenee:

$$(5') \quad 2\, \overline{\alpha}_{01}\, \lambda\, x_3 - 2\, \overline{\alpha}_{00}\, \lambda\, x_2 + (h\, x_3 + 2\, \overline{\alpha}_{11}) + 2\, \overline{\alpha}_{02}\, \lambda\, x_2 x_3 +$$

$$+ 2\, \alpha_{12}\, x_3 - 2\, \alpha\, x_2 = 0$$

si vede che nel piano $0_1 0_2 0_3$ (π_1) la V_3^4 ha solo cinque punti doppi oltre $0_1, 0_2, 0_3$, poichè le cubiche del fascio (5') hanno oltre a questi tre punti e la tangente fissa in 0_1, cinque punti base. Questi cinque punti doppi della V_3^4 nel piano π_1 sono punti d'incontro della C_5 con la retta $0_2 0_3$ e quindi punti semplici per la C_5.

Verifichiamo ora che la V_3^4 non può avere punti doppi fuori dei tre piani π_1, π_2, π_3; un punto doppio isolato della V_3^4 da luogo nell'S_3 ad una coppia neutra per il sistema Σ'. Può ora il sistema Σ' avere delle coppie neutre fuori del piano α e delle tre superficie cubiche coi punti doppi rispettivamente P_1, P_2, P_3 e fuori degli intorni di P_1, P_2, P_3?

Supponiamo allora che le $f^{(4)}$ che passano per P passino tutte per P'; quindi sulle $f^{(3)}$ per P e P' le $f^{(4)}$ dovrebbero segare un sistema ∞^3 con la coppia neutra P e P' appartenente ad una conica C_2. Le $f^{(4)}$ di Σ' segano sulla C_2 (supposta per ora irriducibile) una g_2^2 che non può avere la coppia neutra PP'. Quindi PP' dovrebbero stare su una conica riducibile. Su questa coppia di rette le $f^{(4)}$ segano ora tutte le coppie di punti, che formano una serie di equivalenza g_2^2. Le $f^{(4)}$ che passano per un punto della coppia di rette segano ulteriormente l'altra retta in un punto P' variabile. Quindi se P assume la particolare posizione P_1, il corrispondente P_1' non può diventare fisso.

Infine, possono insinuarsi delle coppie neutre nell'intorno della C_7: cioè può accadere che le $f^{(4)}$ che hanno in un punto Q della C_7 il piano tangente fisso γ_1, passino tutte per un altro punto Q? (Oppure abbiano in un punto Q_1' della C_7 il piano tangente fisso γ_1'?).

Osserviamo che il fascio di $f^{(3)}$ con γ_1 tangente fisso in Q individua una conica C_2 (irriducibile o riducibile) della congruenza. Le $f^{(4)}$ del sistema Σ' che passano per Q ed hanno ivi il piano tangente γ_1 fisso segano sulla C_2 una g_2^2, che non può avere delle coppie neutre.

È dimostrato così che la C_5 è priva di punti doppi è perciò non può contenere una g_3^1.

Infatti: Essendo la C_5 priva dei punti doppi essa ha il genere 6. E quindi applicando il teorema di Rieman - Roch, alla serie g_3^1 per cui

$$r = n - p + i = 3 - 6 + i$$

i risulta uguale a 4. Ma per un gruppo della g_3^1 come è evidente non possono passare quattro coniche (aggiunte dell'ordine $n-3$) linearmente indipendenti: e quindi la C_5 non può contenere la g_3^1; $c \cdot v \cdot d$.