RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI ZACHER

Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi al gruppo generalizzato dei quaternioni e al gruppo abeliano d'ordine 2^s e tipo $(1, 1 \ldots 1)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 346-356

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__346_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DETERMINAZIONE DEI GRUPPI FINITI STRUTTURALMENTE OMOMORFI AL GRUPPO GENERALIZZATO DEI QUATERNIONI E AL GRUPPO ABELIANO D'ORDINE 2^s E TIPO $(1, 1 \ldots 1)$

Nota (*) *di* GIOVANNI ZACHER (*a Padova*).

In questa nota riprendo lo studio intrapreso nella mia tesi [1] di laurea e cerco di estendere i risultati ivi ottenuti a due tipi più generali di gruppi.

Qui si determinano i gruppi finiti strutturalmente omomorfi al:

a) Gruppo generalizzato dei quaternioni;

b) Gruppo abeliano d'ordine 2^s e tipo $(1, 1 \ldots 1)$.

Preliminari.

Per comodità del lettore, richiamiamo la definizione di omomorfismo strutturale tra due gruppi G e G'.

Dati due gruppi G e G', si dice che tra essi intercorre un omomorfismo strutturale, quando è data una legge che faccia corrispondere ad ogni sottogruppo di G uno ed un solo sottogruppo di G', di modo che:

a) Se ai sottogruppi A e B di G corrispondono i sottogruppi A' e B' di G', all'intersezione $A \cap B$ di A e B corrisponde l'intersezione $A' \cap B'$ di A' e B', e all'unione $A \cup B$ corrisponde l'unione $A' \cup B'$.

(*) Pervenuta in Redazione il 4 giugno 1951.

(1) G. ZACHER: *Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine* 8 *non ciclico*, Rend. Sem. Mat. di Padova, pp. 315-327 (1951).

b) Ogni sottogruppo di G' è il corrispondente di almeno un sottogruppo di G.

Riguardo al simbolismo usato, denoteremo il gruppo A' corrispondente di A in un omomorfismo strutturale molte volte pure con $f(A) = A'$. Con $f_{-1}(A')$, $f^{-1}(A')$ denoteremo invece rispettivamente il gruppo intersezione ed il gruppo unione di tutti i sottogruppi di G che l'omomorfismo strutturale trasforma in A'.

Riterremo noti le seguenti relazioni di facile dimostrazione:

1) Se $A > B$, $f(A) \geq f(B)$.

2) $f(G) = G'$, $f(U) = U'$.

3) Se $A' < B'$ $f_{-1}(A') < f_{-1}(B')$, $f^{-1}(A') < f^{-1}(B')$.

Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi al gruppo generalizzato dei quaternioni.

1. – Un gruppo G' dicesi un gruppo generalizzato dei quaternioni se l'ordine di G' è 2^s con $s \geq 3$ e risulta generabile mediante due elementi g'_1, g'_2, $G = \{g'_1, g'_2\}$, soddisfacenti alle tre relazioni:

$$g_1'^{2^{s-1}} = u', \; g_2'^2 = g_1'^{2^{s-2}}, \; g_2'^{-1} g'_1 g'_2 = g_1'^{-1}.$$

Lo studio di tale gruppo porta a stabilire diverse sue proprietà fra le quali ricordiamo alcune importanti per il nostro studio.

Il gruppo G' è un gruppo hamiltoniano. Se $s \geq 4$ esso possiede un unico sottogruppo ciclico d'ordine 2^{s-1} coincidente col gruppo $\{g'_1\}$, mentre gli altri gruppi dello stesso ordine 2^{s-1} sono gruppi generalizzati dei quaternioni. Il gruppo G' contiene un solo sottogruppo T' d'ordine 2 e precisamente $T' = \{g_2'^2\}$, che appartiene a tutti i sottogruppi non identici di G'. Se l'ordine di G' è 2^s con $s \geq 4$, detti L', H' due sottogruppi d'indice 2 in G', il gruppo intersezione $L' \cap H'$ coincide col sottogruppo ciclico d'ordine 2^{s-2} dell'unico sottogruppo ciclico d'ordine 2^{s-1} di G'. Se l'ordine di G' è 2^s con $s \geq 4$, esso contiene sempre almeno due gruppi generalizzati dei quaternioni distinti d'ordine 2^{s-1}.

2. – Osserviamo che se l'ordine di un gruppo generalizzato dei quaternioni G' è $2^3 = 8$, il gruppo G' è isomorfo al gruppo dei quaternioni.

In uno studio precedente avevo dimostrato la proposizione: Se τ è un omomorfismo strutturale tra un gruppo finito G e un gruppo G' isomorfo al gruppo dei quaternioni, allora dev'essere: $G = R \times S$, con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo al gruppo G'. Inoltre risulta $f(R) = U'$ (U' sottogruppo identico di G') $S = f_{-1}(G')$.

Sfruttando questa proposizione, ci accingiamo a dimostrare il seguente teorema: Se τ è un omomorfismo strutturale tra un gruppo finito G ed un gruppo G' generalizzato dei quaternioni, allora devono valere le relazioni: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G', $f(R) = U'$, $S = f_{-1}(G')$.

Il teorema, per quanto detto sopra, è intanto vero nel caso che l'ordine di G' è $2^3 = 8$.

Per dimostrare il teorema nel caso che l'ordine di G' è 2^s con $s \geq 4$, possiamo allora adottare un procedimento basato sul principio di induzione completa.

Supporremo dunque che condizione necessaria affinchè $\bar{\tau}$ sia un omomorfismo strutturale tra un gruppo finito $\bar{G}$ e un gruppo generalizzato dei quaternioni $\bar{G}'$ d'ordine 2^{s-1} con $s - 1 \geq 3$, è che sussistano le relazioni: $\bar{G} = \bar{R} \times \bar{S}$ con $\bar{R}$ gruppo d'ordine dispari, $\bar{S}$ isomorfo a $\bar{G}'$, $\bar{f}(\bar{R}) = \bar{U}'$ ($\bar{U}'$ sottogruppo identico di $\bar{G}'$) $\bar{f}_{-1}(\bar{G}') = \bar{S}$ e di conseguenza faremo vedere che condizione necessaria perchè esista un omomorfismo strutturale tra un gruppo generalizzato dei quaternioni G' d'ordine 2^s è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.

3. – Sia dunque G' un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 2^s con $s \geq 4$ e consideriamo l'insieme M dei sottogruppi di G' d'ordine 2^{s-1}. I gruppi dell'insieme M per quanto si è detto al n. 1, sono almeno tre, tutti gruppi generalizzati dei quaternioni tranne uno che è invece un gruppo, ciclico. Indichiamo con I'_1 questo gruppo, mentre i rimanenti gruppi dell'insieme M con I'_2, $I'_3 \ldots I'_k$.

Supponiamo che τ sia un omomorfismo struttuale tra un gruppo G d'ordine finito ed il gruppo generalizzato dei quaternioni G' d'ordine 2^s $(s \geq 4)$.

Poniamo $I_i = f^{-1}(I'_i)$, con i variabile tra 1 e k. Ad ogni sottogruppo di I_i l'omomorfismo strutturale τ associa un sottogruppo di I'_i e la corrispondenza che così nasce fra i sottogruppi di I_i e I'_i è, come facilmente si constata, un omomorfismo strutturale τ_i fra I_i e I'_i. Tenendo allora presente che il gruppo I'_i per $i = 2, 3 \ldots k$ è un gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 2^{s-1}, per esso vale la nostra premessa d'induzione, e pertanto risulta $I_i = R_i \times S_i$ con R_i un gruppo d'ordine dispari ed S_i isomorfo ad I'_i $(i = 2, 3 \ldots k)$. Inoltre $f(R_i) = U'$, $S_i = f_{-1}(I'_i)$ $(i = 2 \ldots k)$. Il gruppo I_1 invece sarà dato come unione di 2 gruppi R_1, S_1, $I_1 = R_1 \cup S_1$ con R_1 sottogruppo di Sylow di I_1 ciclico, d'ordine primo con quello di R_1.

Inoltre $f(R_1) = U'$ e il gruppo $P_1 = f_{-1}(I'_1)$ è contenuto in S_1 e appartiene (2) al centro di I_1.

Teorema I. - Il gruppo S_1 è un p-gruppo d'ordine 2^α con $\alpha \geq s - 1$.

Preso un gruppo $S_j = f_{-1}(I'_j)$ con $j > 1$, $j \leq k$, consideriamo il gruppo intersezione $S_1 \cap S_j$. Il trasformato $f(S_1 \cap S_j)$ di $S_1 \cap S_j$ mediante τ è il gruppo $I'_1 \cap I'_j$ e da quanto fu detto al n. 1 risulta: $I'_1 \cap I'_j > T' > U'$, per cui concludiamo che $S_1 \cap S_j$ è un sottogruppo non identico di S_1 e S_j. Ma S_j è un p-gruppo d'ordine pari e quindi anche S_1, che pure è un p-gruppo, sarà d'ordine pari.

Ricordando poi che $S_1 \geq P_1 = f_{-1}(I'_1)$ con I'_2 p-gruppo ciclico d'ordine 2^{s-1}, l'ordine di S_1 sarà (2) 2^α con $\alpha \geq s - 1$

c. v. d.

Teorema II. - I gruppi $R_1, R_2, \ldots R_k$ coincidono.

Poichè $f(R_i) = U'$ per $i = 1, 2 \ldots k$, ne segue che i gruppi $R_1, \ldots R_k$ sono tutti contenuti nel gruppo $H_0 = f^{-1}(U')$, $R_i \leq H_0$.

(2) Zappa: *Determinazione dei gruppi finiti in omomorfismo strutturale con un gruppo ciclico,* Rend. Sem. Mat. di Padova, p. 154 n. 6 (1949).

Inoltre essendo R_i un sottogruppo normale di I_i d'indice primo cogli ordini $r_1, r_2 \dots r_k$ di $R_1, R_2 \dots R_k$, R_i sarà pure un sottogruppo normale di H_0, essendo $H_0 < I_i$, e pure d'indice in H_0 primo coi numeri $r_1, \dots r_k$.

Ne segue (3) che $R_1 = R_1 = \dots = R_k$. c. v. d.

Ponendo $R_i = R$, abbiamo dunque le seguenti relazioni:

$$I_1 = R \cup S_1, I_2 = R \times S_2, \dots I_k = R \times S_k \qquad (1)$$

con R gruppo d'ordine dispari normale in I_i ed S_1 ciclico d'ordine 2^α con $\alpha \geq s - 1$, contenente il gruppo P_1 ed S_i $(i = 2, 3 \dots k)$ gruppo generalizzato dei quaternioni d'ordine 2^{s-1} ed $f_{-1}(I'_i) = S_i$ $(i = 2, \dots k)$.

4. - Teorema: Il gruppo G soddisfa alla relazione:

$$G = I_1 + I_2 + \dots + I_k.$$

Poichè il gruppo G' contiene il gruppo dei quaternioni, nessun sottogruppo ciclico di G può essere strutturalmente omomorfo a G'. Se allora l è un generico elemento di G, il gruppo $f(\{l\})$ non può coincidere con G'; sarà allora un sottogruppo proprio di G' e quindi contenuto in uno dei gruppi $I'_1, \dots I'_k$. Ma allora $\{l\}$ e quindi l è contenuto in uno dei gruppi $I_1, I_2 \dots I_k$. Tenuto conto che l era un elemento qualsiasi di G, si conclude, come volevasi, che $G = I_1 + \dots + I_k$.

Da qui si trae che $G = I_1 \cup I_2 \dots \cup I_k$. Ricordando le relazioni (1) si deduce $G = R \cup (S_1 \cup \dots S_k)$ $(1)^{bis}$.

Posto $S = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_k$, studiamo questo gruppo.

5. - Teorema I: Il gruppo S è un p-gruppo d'ordine pari che contiene propriamente i gruppi $S_1, S_2 \dots S_k$.

Che i gruppi $S_1, S_2 \dots S_k$ siano contenuti propriamente in S è evidente dal momento che i gruppi $S_1, S_2 \dots S_k$ sono a due a due distinti.

Supponiamo che S non sia un p-gruppo d'ordine pari. Il suo ordine dovrà allora essere un numero d non potenza di

(3) Vedasi G. Scorza: *Gruppi Astratti*, pag. 27, nota.

un numero primo dispari, perchè S contiene gruppi d'ordine pari; pertanto scomposto d nei suoi fattori primi: $d = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}$ risulta $\alpha_1 \geq \alpha \geq s - 1, t \geq 2$.

Consideriamo un sotto-gruppo di Sylow di S d'ordine dispari. Indicatolo con L, risulta $f(L) = U'$ in quanto se $f(L)$ non fosse identico, come sottogruppo di G' dovrebbe contenere il gruppo T' e quindi L il gruppo $f_{-1}(T')$, ciò che è assurdo, perchè $f_{-1}(T')$ come sottogruppo di S_i $(i = 1, 2 \ldots k)$, è un p gruppo d'ordine pari.

Ne segue che, se $L_2, L_3 \ldots L_t$ sono $t-1$ sottogruppi di Sylow di S d'ordine rispettivamente $p_2^{\alpha_2}, \ldots p_t^{\alpha_t}$, il gruppo $f(L_2 \cup \ldots \cup L_t)$, coincide con U' essendo $f(L_2 \cup L_3 \ldots \cup L_t) = f(L_2) \cup f(L_3) \ldots \cup f(L_t) = U' \cup U' \ldots \cup U' = U'$.

Indichiamo allora con L_1 un sottogruppo di Sylow d'ordine pari di S che contiene il gruppo S_1. Poichè $L_1 \cup \ldots \cup L_t = S$, essendo $L_1 \cup L_2 \ldots \cup L_t$ un sottogruppo di S d'ordine non minore di d, risulta:

$$f(S) = f(L_1 \cup \ldots \cup L_t) = f(L_1) \cup \ldots \cup f(L_t) = \\ = f(L_1) \cup U' = f(L_1). \tag{2}$$

D'altra parte:

$$f(S) = f(S_1 \cup S_2 \ldots S_k) = I_1' \cup \ldots \cup I_k' = G'. \tag{3}$$

Confrontando la (2) con la (3) si conclude che $f(L_1) = G'$. Perciò il p gruppo L_1 d'ordine pari che per ipotesi contiene già il gruppo S_1, contiene pure i gruppi $S_2 = f_{-1}(I_2') \ldots S_k = f_{-1}(I_k')$ e quindi il gruppo $S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k = S$ è un p-gruppo d'ordine pari, in contrasto con le nostre ipotesi.

L'assurdo cui siamo pervenuti prova dunque che il gruppo S è effettivamente un p gruppo d'ordine pari c. v. d.

Teorema II: Il gruppo S è un gruppo generalizzato dei quaternioni.

Poichè i gruppi $S_1, \ldots S_k$ contengono tutti il gruppo ciclico $f_{-1}(T')$, essi hanno in comune uno stesso gruppo N d'ordine 2.

Sia poi L un altro gruppo d'ordine 2 di S. Poichè $f(L)$ non può coincidere col gruppo G', L deve appartenere ad almeno uno dei gruppi $I_1, \dots I_k$. Se L appartiene ad I_i con $2 \leq i \leq k$, essendo $I_i = R \times S_i$, I_i ha S_i come unico sottogruppo di Sylow d'ordine pari e quindi $L < S_i$.

Ma S_i $(i = 1, 2 \dots k)$ ha N come unico sottogruppo d'ordine 2 e quindi $L = N$. Se L appartiene ad I_1, essendo $I_1 = R \cup S_1$, il gruppo L appartiene ad S_1 o a un suo coniugato essendo S_1 un sottogruppo di Sylow d'ordine pari di I_1. Tenuto ora presente che S_1 è pure ciclico e che quindi tali saranno anche i suoi coniugati e che S_1 contiene il gruppo P_1 non identico, il quale come appartenente al centro di I_1, appartiene a tutti i coniugati di S_1 in I_1, concludiamo che L è contenuto in P_1 e quindi coincide con N che è l'unico sottogruppo d'ordine 2 di P_1 e di S_1.

Pertanto il gruppo S ha un solo gruppo d'ordine 2 e inoltre non è ciclico contenendo gruppi non ciclici $(S_2, S_3 \dots S_k)$. Ciò basta per concludere che S è un gruppo generalizzato dei quaternioni.

Teorema III: L'ordine del gruppo S è 2^s.

Perciò osserviamo che l'ordine S non può essere minore di 2^s contenendo più di un sottogruppo d'ordine 2^{s-1}.

Sia dunque l'ordine di S_1 2^m con $m > s$.

Siano F_i, F_j due gruppi d'indice 2 in S non ciclici. Ciò è sempre possibile essendo l'ordine del gruppo generalizzato dei quaternioni S maggiore od uguale a 2^s con $s \geq 4$, (n. 1).

I gruppi $f(F_i)$, $f(F_j)$ dovranno coincidere col gruppo G' in quanto non sono contenuti in $I_2, \dots I_k$ avendo i gruppi F_i, F_j ordine $2^{m-1} > 2^{s-1}$, nè possono essere contenuti in I_1, che è ciclico. Ma allora $f(F_i \cap F_j) = G' \cap G' = G'$, ciò che è assurdo essendo $F_i \cap F_j$ ciclico (n. 1). Quindi l'ordine di S è 2^s c. v. d.

Ne segue che l'ordine di S_1 è 2^{s-1}. Poichè S_1 contiene il gruppo $P_1 = f_{-1}(I'_1)$ il cui ordine deve essere maggiore od uguale(2) a 2^{s-1}, risulta pure provato che $S_1 = P_1$.

Notando allora che ogni elemento dei gruppi $S_1, S_2 \dots S_k$ sono permutabili con ogni elemento di R, ciò si verificherà pure per gli elementi del gruppo $S = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_k$. Essendo poi l'ordine di R dispari, per la $(1)^{bis}$ concludiamo con la relazione: $G = R \cup S = R \times S$ con S isomorfo G'.

Abbiamo così dimostrato il teorema: *Condizione necessaria perchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo generalizzato dei quaternioni G', è che sia $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.*

6. - Viceversa sia G un gruppo soddisfacente alla relazione: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo ad un gruppo generalizzato dei quaternioni G'. Per un teorema stabilito dallo ZAPPA [4], possiamo dire che G è strutturalmente omomorfo a G'.

Concludiamo quindi col teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo G' generalizzato dei quaternioni, è che sia $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.

Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi al p-gruppo abeliano G' d'ordine 2^s con $s \geq 3$ e tipo $(1, 1, 1 \ldots 1)$.

7. - Avvertiamo il lettore che, poichè alcuni ragionamenti che faremo sono del tutto analoghi ad alcuni svolti nelle precedenti pagine, ci permettiamo di essere più brevi nell'esposizione.

Sia G' un p-gruppo abeliano d'ordine pari e tipo $(1, 1 \ldots 1)$. Io avevo provato in uno studio precedente che se l'ordine di G' è $2^3 = 8$ e τ è un omomorfismo strutturale tra un gruppo finito G e il gruppo G' dovevano valere le relazioni: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'; $f(R) = U'$ (U' sottogruppo identico di G') $S = f_{-1}(G')$.

Supponiamo ora che l'ordine di G' sia 2^s con $s > 3$. Considerati i sottogruppi d'indice 2 in G', indichiamoli con $I'_1, I'_2 \ldots I'_k$ dove k risulta un numero intero non minore di 3. Sia poi G

[4] G. ZAPPA: *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale*, Gior. di Mat. di Battaglini, vol. 78, pag. 191, (1948-49).

un gruppo finito strutturalmente omomorfo a G' e indichiamo con $I_1, I_2 \dots I_k$ rispettivamente i gruppi $f_{-1}(I'_1) \dots f^{-1}(I'_k)$. I gruppi $I_1, I_2 \dots I_k$ risultano strutturalmente omomorfi ad $I'_1 \dots I'_k$ e possiamo perciò supporre che per I_i valga la relazione: $I_i = R_i \times S_i$ con R_i gruppo d'ordine dispari ed S_i isomorfo a I'_i; $f(R_i) = U'$, $f_{-1}(I'_i) = S_i$, essendo soddisfatte tali condizioni quando l'ordine di G' è 2^3 (vedasi nota (1)).

Poichè il gruppo G non può essere ciclico, perchè altrimenti esisterebbero suoi sottogruppi ciclici strutturalmente omormofi ai sottogruppi d'ordine 8 di G', che è stato dimostrato essere assurdo, (1) facilmente si vede che $G = I_1 + I_2 + \dots I_k$ e quindi $G = I_1 \cup I_2 \dots \cup I_k$.

Inoltre i gruppi $R_1, \dots R_k$ coincidono essendo sottogruppi normali di $H_0 = f^{-1}(U')$ d'indice primo cogli ordini $r_1, r_2 \dots r_k$ di $R_1 \dots R_k$. Poniamo perciò $R_1 = R_2 \dots = R$.

Riassumendo, abbiamo le relazioni:

$$I_1 = R \times S_1, \quad I_2 = R \times S_2 \quad \dots \quad I_k = R \times S_k$$

con R d'ordine dispari ed S_i isomorfo a I'_i.

$$G = I_1 \cup I_2 \dots \cup I_k = R \cup (S_1 \cup S_2 \dots S_k).$$

Indichiamo con S il gruppo unione $S_1 \cup \dots \cup S_k$.

Dimostriamo che il gruppo S è un p-gruppo d'ordine pari.

Sia d l'ordine di S e scomponiamolo nei suoi fattori primi: $d = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ con $t \geq 1$, $\alpha_1 \geq s - 1$.

Se $t = 1$ il teorema è dimostrato; altrimenti consideriamo $t - 1$ sottogruppi di Sylow di S d'ordine dispari e a due a due primi tra loro. Indichiamo con L_i un tale sottogruppo di Sylow d'ordine $p_i^{\alpha_i}$. Il gruppo $f(L_i)$ coincide col sottógruppo identico U' di G. Infatti se $f(L_i)$ fosse un sottogruppo non identico di G', a' un elemento di $f(L_i)$ non identico, $\{a'\}$ sarebbe contenuto in uno dei gruppi $I'_1, I'_2 \dots I'_k$ ad esempio per fissare le idee in I'_i.

Ma allora $S_i = f_{-1}(I'_i) > f_{-1}(\{a'\})$ e quindi il gruppo $f_{-1}(\{a'\})$ sarebbe d'ordine pari. D'altra parte, essendo $f(L_i) \geq \{a'\}$, dovrebbe essere $L_i \geq f_{-1}(\{a'\})$ ossia L_i dovrebbe contenere un gruppo d'ordine pari, che è assurdo.

Preso allora un sottogruppo di Sylow L_1 d'ordine pari di S risulta: $G' = f(S) = f(L_1 \cup L_2 .. \cup L_k) = f(L_1) \cup f(L_2) ... \cup f(L)_k =$ $= f(L_1) \cup U' = f(L_1)$.

Quindi il p-gruppo L_1 d'ordine pari di S contiene i gruppi $S_1, S_2 \dots S_k$ ossia S è contenuto in L_1. Quindi S è un p-gruppo d'ordine pari.

L'ordine 2^{α_1} di S sarà allora maggiore di 2^{s-1}, contenendo più di un gruppo d'ordine 2^{s-1}.

Sia poi N un sottogruppo di Sylow d'ordine pari di G. Poichè N avrà l'ordine almeno 2^{α_1} con $\alpha_1 \geq s$, N non può essere contenuto in nessuno dei gruppi $S_1, S_2 \dots S_k$ e perciò sarà $f(N) = G'$. Pertanto $N \geq S_1 \cup S_2 \dots \cup S_k = S$ (4).

Consideriamo un elemento n di N. Poichè $f(\{n\})$ deve essere un sottogruppo proprio di G', il gruppo $\{n\}$ è contenuto in uno almeno dei gruppi $I_1, I_2 \dots I_k$ ad es. in I_i e poichè $I_i = R \times S_i$ con R d'ordine dispari, $\{n\}$ è contenuto in S_i. Perciò tenuto conto della (4) concludiamo che $N = S_1 + S_2 + \dots S_k$ (5) e quindi anche $N = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_k$.

Il gruppo N, in virtù della (5), è pertanto un gruppo ad elementi bilateri e quindi abeliano di tipo $(1, 1 \dots 1)$.

Proviamo infine che l'ordine di N è 2^s. Invero se fosse $2^m > 2^s$, in N esisterebbero $2^m - 1 > 2^s - 1$ gruppi d'ordine 2 distinti, e quindi l'omomorfismo strutturale τ fra G e G' dovrà trasformare in uno stesso sottogruppo di G più sottogruppi distinti d'ordine 2 di N. Supponiamo che esistano dunque due elementi distinti a, b di N non identici tali che i due gruppi $f(\{a\}), f(\{b\})$ coincidono e supponiamo per di più che $f(\{a\}) = f(\{b\})$ non sia il sottogruppo identico di G'. Il gruppo $f(\{a\})$ sarà allora del secondo ordine e dovremo avere $f(\{a\} \cap \{b\}) = f(\{a\}) \cap f(\{b\}) =$ $= f(\{a\}) \neq U'$, ciò che è assurdo essendo $\{a\} \cap \{b\} = U$. Se dunque l'ordine di N è 2^m maggiore di 2^s, i gruppi d'ordine 2 generati da $2^m - 2^s$ elementi opportuni di N dovranno venir trasformati nel gruppo identico di G'. Ora però in virtù della relazione (5), ogni elemento di N appartiene ad almeno uno dei gruppi $S_1, S_2 \dots S_k$ ad es. ad S_i.

Poichè S_i è isomorfo ad I'_i, ogni sottogruppo d'ordine 2 di S_i deve venir trasformato in un sottogruppo dello stesso ordine 2.

Invero, se indichiamo con a'_i un generico elemento di S'_i non identico poichè $\{a'_i\}$ è un gruppo ciclico d'ordine 2, il gruppo $f_{-1}\{a'_i\}$ sarà pure un gruppo ciclico di S_i e quindi un gruppo d'ordine 2. Dato l'isomorfismo esistente tra S_i e I'_i, ne segue che ogni gruppo d'ordine 2 di S_i viene trasformato da τ in un gruppo dello stesso ordine di G'. Quindi l'ipotesi che in N vi siano dei gruppi d'ordine 2 che l'omomorfismo strutturale τ trasformi in un medesimo sottogruppo di G' si è mostrata assurda. Pertanto l'ordine di N è 2^s ed essendo N un gruppo abeliano di tipo $(1, 1 \ldots 1)$, N risulta isomorfo a G'.

8. - Viceversa sia G un gruppo soddisfacente alla relazione: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo ad un gruppo abeliano G' d'ordine 2^s con $s \geq 2$ è tipo $(1, 1 \ldots 1)$.

In virtù del citato teorema dello Zappa al n. 6 possiamo affermare che G è strutturalmente omomorfo a G'.

Chiudiamo dunque questo studio col teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito G sia strutturalmente omomorfo ad un gruppo abeliano G d'ordine 2^s con $s \geq 3$ e tipo $(1, 1 \ldots 1)$, è che sia: $G = R \times S$ con R gruppo d'ordine dispari ed S isomorfo a G'.*