RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Teoremi di unicità e di confronto per gli integrali di una particolare classe di equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 329-345

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__329_0>

TEOREMI DI UNICITÀ E DI CONFRONTO PER GLI INTEGRALI DI UNA PARTICOLARE CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE

Nota (*) *di* GIUSEPPE ZWIRNER (*a Ferrara*).

In un lavoro recente (1) ho dato un metodo di calcolo per approssimare ogni integrale del sistema differenziale:

$$\text{I)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z) \\ z(x_0, y) = \psi(y), \; z(x, y_0) = \varphi(x) \quad (\varphi(x_0) = \psi(y_0)) \,, \end{cases}$$

nella sola ipotesi della continuità della $f(x, y, z)$ rispetto al complesso delle variabili da cui dipende. Il procedimento seguito mi ha permesso anche di provare l'esistenza, per il sistema I), dell' integrale inferiore e superiore.

Nella prima parte della presente Nota dò invece, sotto ipotesi molto larghe, dei criteri d' unicità per le soluzioni del sistema differenziale I), mentre nella seconda dimostro due teoremi di confronto, per gli integrali dello stesso sistema differenziale, dal secondo dei quali deduco, come caso particolare, una notevole estensione del lemma di PEANO - GRONWALL.

(*) Pervenuta in Redazione il 26 aprile 1951.

(1) G. ZWIRNER: *Sull' approssimazione degli integrali del sistema differenziale* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z)$, $z(x, y_0) = \varphi(x)$, $z(x_0, y) = \psi(y)$ [in corso di stampa negli Atti dell' Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti]

1. - Cominciamo col dimostrare il seguente criterio di unicità, che estende quello dato da PEANO per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (²).

Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua e limitata nello strato S:

$$S:\ x_0 \leq x \leq x_0 + \delta,\ y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1,\ -\infty < z < +\infty$$

e ivi non crescente rispetto a z.

In tali ipotesi, il sistema differenziale

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z) \\ z(x_0, y) = \psi(y), \quad z(x, y_0) = \varphi(x)\ (\psi(y_0) = \varphi(x_0)), \end{cases}$$

dove $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ sono funzioni continue assieme alle loro derivate prime, ammette una ed una sola soluzione nel rettangolo R:

$$R:\ x_0 \leq x \leq x_0 + \delta,\ y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1.$$

Infatti, sia $g(x, y)$ e $G(x, y)$ rispettivamente l'integrale inferiore e superiore (³) del sistema differenziale (1). Essendo:

$$G(x, y) \geq g(x, y)$$

si avrà, in tutto R, data la non crescenza della $f(x, y, z)$ rispetto a z,

$$f[x, y, G(x, y)] \leq f[x, y, g(x, y)],$$

(²) G. PEANO: *Démostration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires* [Mathematische Annalen, Bd. 37 (1890), pp. 182-228], pag. 227.

Per un'ampia bibliografia sui criteri d'unicità relativi alle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine si veda G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale.* [Bologna, Zanichelli (1941), Parte seconda].

(³) Per l'esistenza dell'integrale inferiore e superiore del sistema differenziale (1) si veda il mio lavoro citato in (¹).

cioè:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}[G(x, y) - g(x, y)] \leq 0$$

e siccome la funzione $G(x, y) - g(x, y)$ si annulla identicamente sia per $x = x_0$ che per $y = y_0$, sarà, in R:

$$G(x, y) \leq g(x, y).$$

Dunque:

$$G(x, y) = g(x, y)$$

in tutto R.

2. – Passiamo ora a dimostrare il seguente:

TEOREMA. – *Data la funzione $f(x, y, z)$ continua e limitata nello strato S, supponiamo si possa determinare una funzione $F(x, u)$ continua, limitata e non decrescente rispetto ad u nel campo D* (4) *:*

$$D: \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + \delta, \quad 0 \leq u < +\infty$$

in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

I) *Si può determinare un numero $K > 0$ in modo che risulti:*

$$f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1) \leq F\left(x, \frac{z_2 - z_1}{\delta_1}\right)$$

per ogni (x, y) di R e per z_1 e z_2 tali che $0 \leq z_2 - z_1 \leq K$;

(4) Più in generale si potrebbe supporre che la $F(x, u)$ soddisfacesse, nel campo D, alle classiche ipotesi di CARATHÉODORY, oltre, s' intende, la non decrescenza rispetto ad u.

II) *Per ogni numero positivo prefissato* ε *si possa determinare un numero* $h_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni punto* ξ_0 *interno ad* $(x_0, x_0 + \delta)$, *l'integrale superiore dell'equazione*:

$$u = h_\varepsilon + \int_{\xi_0}^{x} F(t, u)\, dt$$

risulti, a destra di ξ_0, *minore od eguale a* ε.

In tali ipotesi il sistema differenziale (1) *ammette una ed una sola soluzione continua, assieme alle sue derivate parziali prime, nel rettangolo* R.

Indichiamo con $g(x, y)$ e $G(x, y)$ rispettivamente l'integrale inferiore e superiore del sistema differenziale (1) e dimostriamo che, nelle ipotesi fatte, in tutto R risulta:

$$g(x, y) = G(x, y)$$

e con ciò sarà senz'altro provato il teorema enunciato.

A tale scopo osserviamo innanzi tutto che è:

$$g'_x(x, y_0) = G'_x(x, y_0), \quad g'_y(x_0, y) = G'_y(x_0, y). \tag{2}$$

Poniamo ora, per ogni x dell'intervallo $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$,

$$M(x) = \max_{y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1} [G'_y(x, y) - g'_y(x, y)].$$

La funzione $M(x)$ così definita risulta, come è noto, continua in $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ ed in ogni punto di tale intervallo ammette sia la derivata sinistra, $M'_-(x)$, che la derivata destra, $M'_+(x)$. Inoltre ad ogni x di $(x_0, x_0 + \delta)$ corrisponde almeno un $y_1(x)$ compreso in $y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1$ e almeno un $y_2(x)$, compreso nello stesso intervallo, in modo da aversi (5):

(5) T. Ważenski: *Sur l'unicité e la limitation des intégrales des équa-*

$$M(x) = G'_y(x, y_1(x)) - g'_y(x, y_1(x)),$$

$$M'_+(x) = G''_{xy}(x, y_1(x)) - g''_{xy}(x, y_1(x)),$$

e

$$M(x) = G'_y(x, y_2(x)) - g'_y(x, y_2(x))$$

$$M'_-(x) = G''_{xy}(x, y_2(x)) - g''_{xy}(x, y_2(x)).$$

Premesso ciò, dal fatto che è $G(x, y_0) = g(x, y_0)$, si ha, in tutto R,

$$G(x, y) - g(x, y) = \int_{y_0}^{y} [G'_t(x, t) - g'_t(x, t)]\, dt$$

e quindi, in R,

$$0 \leq G(x, y) - g(x, y) \leq M(x)\, \delta_1 . \tag{3}$$

Facciamo ora vedere che in $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ risulta:

$$M(x) = 0,$$

e con ciò il teorema sarà provato.

Essendo, in virtù della seconda delle (2),

$$M(x_0) = 0,$$

supponiamo che esista un punto x_2 interno ad $(x_0, x_0 + \delta)$ in cui sia:

$$M(x_2) > 0 .$$

tions aux dérivés partielles du premier ordre. [Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, serie 6ª, vol. XVIII (1933), pp. 372-376].

Nelle nostre ipotesi, essendo $M'_+(x)$ [$M'_-(x)$] limitata in $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, la funzione $M(x)$ è assolutamente continua in $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$. Cfr. L. Tonelli: *Calcolo delle variazioni.* [Bologna, Zanichelli, vol. 1°], pag. 65.

Esisterà allora alla sinistra di x_2 un punto x_1 di $(x_0, x_0 + \delta)$ in cui è:

$$M(x_1) = 0$$

e

$$M(x) > 0$$

per $x_1 < x \leq x_2$.

Diciamo: (x_1, x_3) l'intervallo, contenuto in (x_1, x_2), in cui risulta:

$$0 \leq M(x) \cdot \delta_1 \leq K; \tag{4}$$

ξ_1 il punto (o uno dei punti) in cui $M(x)$ assume il suo massimo valore nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_3$ e, preso

$$0 < \varepsilon < M(\xi_1),$$

diciamo ξ_0 un punto dell'intervallo (x_1, ξ_1) ove risulta:

$$M(\xi_0) < h_\varepsilon,$$

essendo h_ε il numero che corrisponde ad ε in base all'ipotesi II).

Dall'ipotesi I), dalle (3), (4) e dal fatto che $F(x, u)$ è non decrescente in u, si avrà, nell'intervallo (ξ_0, ξ_1),

$$M'_+(x) = G''_{xy}(x, y_1(x)) - g''_{xy}(x, y_1(x)) = f[x, y_1(x), G(x, y_1(x))] -$$

$$- f[x, y_1(x), g(x, y_1(x))] \leq F(x, M(x)).$$

Di qui, e da un noto teorema di confronto (6), segue che l'integrale superiore $u(x)$ dell'equazione

(6) Cfr. G. Sansone: *Equazioni differenziali nel campo reale* [Bologna, Zanichelli (1941), Parte seconda], pp. 98–100; F. Cafiero: *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale del primo ordine* [Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. LXXVIII (1948-49), pp. 10–41], pag. 19.

$$u = h_\varepsilon + \int_{\xi_0}^{x} F(t, u)\, dt$$

sarebbe definito in tutto (ξ_0, ξ_1) e dovrebbe soddisfare alla limitazione

$$u(x) \geq M(x) \qquad\qquad (\xi_0 \leq x \leq \xi_1).$$

Ma ciò è assurdo perchè in particolare dovrebbe risultare

$$u(\xi_1) \geq M(\xi_1) > \varepsilon$$

mentre, in base alla ipotesi II), deve essere $u(x) \leq \varepsilon$ nel suo campo di esistenza a destra di ξ_0.

Non potendo poi risultare $M(x) < 0$ sarà, in tutto $x_0 \leq \leq x \leq x_0 + \delta$,

$$M(x) = 0$$

il che prova il teorema enunciato.

3. – Dal teorema dimostrato nel numero precedente segue come corollario il seguente criterio d'unicità:

Siano: $f(x, y, z)$ *una funzione continua e limitata in* S; $\alpha(x)$ *una funzione continua in* $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$; $\omega(u)$ *una funzione continua, positiva e non decrescente per ogni* $u > 0$, *tale che*:

$$\lim_{\eta \to +0} \int_{\eta}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \qquad 0 < u_0. \tag{5}$$

Supponiamo inoltre che si possa determinare un numero $K > 0$ *in modo che risulti*:

$$f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1) \leq \alpha(x)\, \omega\left(\frac{z_2 - z_1}{\delta_1}\right)$$

per ogni (x, y) *di* R *e per* z_1 *e* z_2 *tali che* $0 \leq z_2 - z_1 \leq K$.

In tali ipotesi il sistema differenziale (1) *ammette una ed una sola soluzione continua, assieme alle sue derivate parziali prime, nel rettangolo R.*

Infatti, posto:

$$\gamma(u) = \begin{cases} \omega(u) & \text{per } 0 \leq u \leq K \\ \omega(K) & \text{per } u > K \end{cases}$$

e

$$F(x, u) = \alpha(x)\gamma(u),$$

è stato dimostrato da CAFIERO [7] che l'ipotesi II) del teorema enunciato nel numero precedente, ove si tenga presente la (5), risulta soddisfatta.

4. Dimostriamo un altro teorema d'esistenza e di unicità per gli integrali del sistema differenziale considerato.

TEOREMA. - *Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua e limitata nel solito strato S e per ogni coppia di punti (x, y, z_1), (x, y, z_2) di S, con $z_2 \geq z_1$, soddisfi la limitazione*:

$$[f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1)]\,(x - x_0)\,\delta_1 \leq z_2 - z_1. \tag{6}$$

In tali ipotesi il sistema differenziale (1) *ammette una ed una sola soluzione continua, assieme alle sue derivate parziali prime, nel rettangolo R.*

Sia $g(x, y)$ e $G(x, y)$ rispettivamente l'integrale inferiore e superiore del sistema differenziale (1) e si ponga, per $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$,

$$M(x) = \max_{y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1} [G'_y(x, y) - g'_y(x, y)]$$

e, per $x \neq x_0$,

$$\lambda(x) = \frac{M(x)}{x - x_0}.$$

(7) Cfr. loc. cit. per secondo in (6), pp. 26-28.

Essendo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{M(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{M(x) - M(x_0)}{x - x_0} = M'_+(x_0) =$$

$$= f[x_0, y_1(x_0), G(x_0, y_1(x_0))] - f[x_0, y_1(x_0), g(x_0, y_1(x_0))] = 0,$$

posto $\lambda(x_0) = 0$, la funzione $\lambda(x)$ risulta continua in tutto $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$.

Vogliamo dimostrare che $\lambda(x)$ è identicamente nulla in $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, con che, ove si tenga presente anche la (3), sarà senz'altro provato il teorema enunciato. Infatti, supposto che ciò non sia, diciamo (x_1, y_1) un punto di R ove la $\lambda(x)$ assume il suo massimo valore H. Si ha, ove si tenga presente la (3) e (6),

$$H = \frac{G'_y(x_1, y_1) - g'_y(x_1, y_1)}{x_1 - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f[x, y_1, G(x, y_1)] - f[x, y_1, g(x, y_1)] \right\} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \frac{G(x, y_1) - g(x, y_1)}{(x - x_0)\, \delta_1} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x)\, dx < H,$$

il che è assurdo.

Osservazione. L'ipotesi, fatta nei numeri precedenti, che la funzione $f(x, y, z)$ sia definita in tutto lo strato S non è affatto essenziale.

Se la funzione $f(x, y, z)$ soddisfa alle condizioni di regolarità enunciate nel parallelopipedo:

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \delta, \quad y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1, \quad z_0 \leq z \leq z_1,$$

valgono evidentemente ancora le considerazioni già svolte purchè si determinino δ e δ_1 in modo che gli integrali, inferiore e superiore, del sistema differenziale considerato siano definiti in tutto il rettangolo:

$$x_0 \leq x \leq x_0 + \delta, \quad y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1 .$$

5. – Diamo ora un criterio di confronto per le soluzioni del sistema differenziale considerato.

Siano $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ due funzioni continue e limitate nello strato S e soddisfacenti ivi, per ogni coppia di punti (x, y, z_1), (x, y, z_2), con $z_2 \geq z_1$, alla diseguaglianza:

$$f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1) \leq f_1(x, y, z_2 - z_1) .$$

In tali ipotesi, detti $g(x, y)$, $G(x, y)$ rispettivamente l'integrale inferiore e superiore del sistema differenziale (**1**) *e $\Phi(x, y)$ l'integrale superiore del sistema differenziale:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f_1(x, y, z) \\ z(x_0, y) = 0, \quad z(x, y_0) = 0, \end{cases}$$

risulta, in tutto R,

$$0 \leq G(x, y) - g(x, y) \leq \Phi(x, y) .$$

Infatti, la funzione

$$z = G(x, y) - g(x, y)$$

soddisfa il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f[x, y, g(x, y) + z] - f[x, y, g(x, y)] \\ z(x_0, y) = 0, \quad z(x, y_0) = 0 \end{cases}$$

e dalla diseguaglianza:

$$f[x, y, g(x, y) + z] - f[x, y, g(x, y)] \leq f_1(x, y, z),$$

per il criterio di confronto che ho avuto occasione di dimostrare nel lavoro citato in (1), si deduce che in tutto R risulta:

$$z = G(x, y) - g(x, y) \leq \Phi(x, y).$$

6. - Dimostriamo un secondo criterio di confronto, sempre relativo allo stesso problema, dal quale dedurremo poi, come caso particolare, una notevole estensione del lemma di Peano-Gronwall.

Sia $F_1(x, u)$ una funzione continua, non negativa, limitata, e non decrescente rispetto ad u per $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, $-\infty < u < +\infty$ e $z(x, y)$ una funzione continua nel rettangolo R e ivi soddisfacente la diseguaglianza:

$$(7) \qquad z(x, y) \leq \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F_1(\xi, z(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta + p \qquad (p = cost).$$

In tali ipotesi, se $u(x)$ è l'integrale superiore dell'equazione:

$$u = p + \delta_1 \int_{x_0}^{x} F_1(t, u)\, dt, \qquad (x_0 \leq x \leq x_0 + \delta),$$

***risulta**, in tutto* R,

$$z(x, y) \leq u(x).$$

Posto, per ogni x dell'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$,

$$M(x) = \max_{y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1} z(x, y),$$

dalla (7) e dal fatto che $F_1(x, u)$ è non negativa e non decrescente rispetto ad u, si ha:

$$z(x, y) \leq \delta_1 \int_{x_0}^{x} F_1(t, M(t))\, dt + p$$

e quindi anche:

$$M(x) \leq \delta_1 \int_{x_0}^{x} F_1(t, M(t))\, dt + p\,. \tag{8}$$

Detto $u_1(x)$ l'integrale superiore dell'equazione

$$u' = \delta_1 F_1(x, u)$$

soddisfacente la condizione:

$$u_1(x_0) = p + \varepsilon\,,$$

con $\varepsilon > 0$, proviamo che in tutto $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ riesce:

$$M(x) < u_1(x)\,.$$

Infatti, essendo:

$$M(x_0) < u_1(x_0)$$

diciamo, se possibile, x_1 il primo punto dell'intervallo $(x_0, x_0 + \delta)$ in cui risulta:

$$M(x_1) = u_1(x_1)\,.$$

Sarebbe, tenuto conto della non decrescenza della $F_1(x, u)$ rispetto ad u e del fatto che nell'intervallo $x_0 \leq x < x_1$ risulta $M(x) < u_1(x)$,

$$M(x_1) = u_1(x_1) = \delta_1 \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, u_1(x))\, dx + p + \varepsilon \geq$$

$$\geq \delta_1 \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, M(x))\, dx + p + \varepsilon .$$

Ma ciò è in contraddizione con la (8).

Essendo inoltre [8]:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_1(x) = u(x)$$

sarà:

$$M(x) \leq u(x)$$

e quindi:

$$z(x, y) \leq u(x) .$$

7. - Se nel teorema del numero precedente si pone

$$F_1(x, u) = \alpha_1(x)\, \omega_1(u)$$

e si suppone che esista un numero $H > p$ per cui sia:

$$\int_p^H \frac{du}{\omega_1(u)} \geq \delta_1 \int_{x_0}^{x_0+\delta} \alpha_1(x)\, dx ,$$

allora si dimostra facilmente che l'integrale del sistema differenziale:

$$\begin{cases} u' = \delta_1\, \alpha_1(x)\, \omega_1(u) \\ u(x_0) = p \end{cases}$$

(8) Cfr. loc. cit. per primo in (6), pp. 81-85.

risulta, in tutto l'intervallo $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, minore od eguale ad H.

Possiamo perciò enunciare il seguente teorema, che estende, alle funzioni a due variabili, una generalizzazione del lemma di PEANO - GRONWALL fatta da FAEDO (9):

Sia: $\alpha_1(x)$ *una funzione continua non negativa in* $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, $\omega_1(u)$ *una funzione continua non negativa e non decrescente in* $-\infty < u < +\infty$ *e supponiamo che esistano tre numeri* $\delta_1 > 0$, p *e* H *con* $p < H$ *per cui sia*:

$$\int_p^H \frac{du}{\omega_1(u)} \geq \delta_1 \int_{x_0}^{x_0+\delta} \alpha_1(x)\, dx\,.$$

In tali ipotesi, se $z(x, y)$ *è una funzione continua in* R: $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta, y_0 \leq y \leq y_0 + \delta_1$ *e ivi soddisfacente alla diseguaglianza*:

$$z(x, y) \leq \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \alpha_1(\xi)\, \omega_1(z(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta + p,$$

riesce, in tutto R:

$$z(x, y) \leq H.$$

OSSERVAZIONE 1ª - Se nel teorema dimostrato si pone:

$$\alpha_1(x) \equiv 1, \omega_1(u) = A u + B, p > -\frac{B}{A} \; (A \geq 0, B \geq 0)$$

(9) S. FAEDO: *Su un teorema di esistenza di calcolo delle variazioni e una proposizione generale di calcolo funzionale* [Annali della Scuola Normale di Pisa, s. II, vol. XII (1943), pp. 119-133], pp. 124-126.

e si determina $H > p$ in modo che risulti

$$\int_p^H \frac{du}{A u + B} = \delta \delta_1$$

con facili calcoli si trova:

$$H = p e^{A \delta \delta_1} + \frac{B}{A} (e^{A \delta \delta_1} - 1) \leq p e^{A \delta \delta_1} + B \delta \delta_1 e^{A \delta \delta_1}$$

e quindi:

Se in R risulta:

$$-\frac{B}{A} < z(x, y) \leq \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} [A z(\xi, \eta) + B] \, d\xi \, d\eta + p$$

allora risulta anche:

$$z(x, y) \leq p e^{A \delta \delta_1} + B \delta \delta_1 e^{A \delta \delta_1} .$$

Osservazione 2ª – Il teorema enunciato in quest'ultimo numero si estende, evidentemente, senza nessuna difficoltà alle funzioni continue di più di due variabili.

8. – Dimostriamo da ultimo un teorema che estende quello enunciato nel n. 6.

Sia $F_0(x, y, z)$ una funzione continua, limitata, non decrescente rispetto a z nello strato S e $\omega_0(x, y)$ una funzione continua in R e soddisfacente ivi alla diseguaglianza:

$$(9) \qquad \omega_0(x, y) \leq \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} F_0(\xi, \eta, \omega_0(\xi, \eta)) \, d\xi \, d\eta + p \qquad (p = cost.) .$$

In tali ipotesi, se $G_p(x, y)$ *è l'integrale superiore della equazione*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F_0(x, y, z) \tag{10}$$

soddisfacente alle condizioni:

$$G_p(x_0, y) = p, \quad G_p(x, y_0) = p,$$

risulta, in tutto R,

$$\omega_0(x, y) \leq G_p(x, y).$$

Indichiamo con q un numero maggiore di p e con $G_q(x, y)$ l'integrale superiore dell'equazione (10) soddisfacente le condizioni:

$$G_q(x_0, y) = q, \quad G_q(x, y_0) = q$$

e dimostriamo intanto che in tutto R riesce:

$$G_q(x, y) > \omega_0(x, y). \tag{11}$$

Infatti, essendo:

$$G_q(x_0, y_0) > \omega_0(x_0, y_0)$$

esisterà un rettangolo R_1 (contenuto in R) con i lati paralleli agli assi coordinati e avente un vertice nel punto $A \equiv (x_0, y_0)$, in cui risulterà:

$$G_q(x, y) > \omega_0(x, y).$$

Premesso ciò, supponiamo, se possibile, che esistano punti di R, esterni a R_1, in cui risulta:

$$G_q(x, y) = \omega_0(x, y)$$

e diciamo l l'estremo inferiore delle distanze di tali punti dal vertice A. Vi sarà evidentemente un punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ $(x_1 \neq x_0, y_1 \neq y_0)$ distante l da A in cui risulta:

$$G_q(x_1, y_1) = \omega_0(x_1, y_1) \tag{12}$$

mentre risulta

$$G_q(x, y) > \omega_0(x, y)$$

in ogni altro punto avente da A una distanza minore di l.

Detto R_2 il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati e avente due vertici opposti in A e P_1, si avrà, in tutto R_2,

$$G_q(x, y) \geq \omega_0(x, y) . \tag{13}$$

Per la (9), si ha:

$$G_q(x_1, y_1) - \omega_0(x_1, y_1) \geq q - p +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \left\{ F_0[x, y, G_q(x,y)] - F_0(x, y, \omega_0(x, y)) \right\} dx\, dy .$$

Di qui, dalla (13) e dalla non decrescenza della $F_0(x, y, z)$ rispetto a z, si ha:

$$G_q(x_1, y_1) - \omega_0(x_1, y_1) \geq q - p > 0,$$

il che contraddice la (12).

In tutto R risulta quindi verificata la (11).

È noto poi ([10]) che $G_q(x, y)$ è, per ogni fissato (x, y), funzione crescente di q e che tende per $q \to p$ a $G_p(x, y)$ e quindi dalla (11) segue, in tutto R,

$$G_p(x, y) \geq \omega_0(x, y),$$

il che prova il teorema enunciato.

([10]) Cfr. loc. cit. in ([1]).