RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

JAURÈS CECCONI

Sull'area di Peano e sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 307-314

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__307_0>

SULL' AREA DI PEANO E SULLA DEFINIZIONE ASSIOMATICA DELL' AREA DI UNA SUPERFICIE

Nota (*) *di* Jaurès Cecconi (*a Pisa*).

1. - In un recente lavoro [2], prendendo in esame una congettura di T. Radò [5], ho dimostrato che l'area secondo Lebesgue di una superficie di Fréchet S del tipo della 2-cella coincide con certe aree del tipo di Peano che si ottengono dando opportuni significati alle aree delle proiezioni, su piani generici, delle porzioni di S.

Quasi contemporaneamente appariva una nota di M. Pagni [4] in cui questi, occupandosi di un problema posto da R. Caccioppoli [1], assegnava un gruppo di condizioni adatte ad assicurare che un funzionale definito in una classe $\mathcal{S}$ di superficie di Fréchet, del tipo della 2-cella, quadrabili secondo Lebesgue e dotate di una opportuna rappresentazione, coincidesse sul generico elemento S di $\mathcal{S}$ con l'area secondo Lebesgue di S.

Nella formulazione di queste condizioni interveniva una disuguaglianza, di tipo di Peano, fra il valore che il funzionale prendeva su una generica porzione di S ed una opportuna area della proiezione di tale porzione su di un piano generico.

Il prof. L. Cesari ha richiamato la mia attenzione su questa circostanza suggerendomi di esaminare se da teoremi del tipo di quelli dati nella mia nota potesse dedursi un teorema del tipo di quello dato da M. Pagni, in cui peraltro si considerasse in luogo della classe $\mathcal{S}$ la classe F delle superficie di Fréchet del tipo della 2-cella.

(*) Pervenuta in Redazione il 27 marzo 1951.

A questo scopo nel presente lavoro viene considerato un nuovo tipo di area di PEANO, corrispondente ad un'area del tipo di GEOCZE introdotta da L. CESARI [3], e viene dimostrato che per ogni superficie di FRÉCHET S del tipo della 2-cella tale area di PEANO, che verrà indicata nel seguito con $P_u(S)$, coincide con l'area secondo LEBESGUE, $L(S)$, della superficie S.

Da questo teorema viene allora dedotto (n. 7), in modo assai semplice, che un funzionale definito nella classe F, verificante condizioni del tipo di quelle date da M. PAGNI, formulate però su di una generica rappresentazione di S, coincide con l'area secondo LEBESGUE del generico elemento S di F.

Precisamente si dimostra il seguente

TEOREMA. - Sia F la classe delle superficie di FRÉCHET del tipo della 2-cella.

Sia $S \equiv (T, Q)$

$$(1) \qquad T: x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in Q$$

una rappresentazione, nel quadrato unitario Q del piano uv, del generico elemento S di F.

Sia $\varphi(S)$ un funzionale definito in F avente le seguenti proprietà:

a) $\varphi(S)$ è semicontinuo inferiormente;

b) $\varphi(S)$ coincide con l'area elementare per ogni superficie poliedrica $S \in F$;

c) per ogni gruppo di poligoni semplici $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ privi a due a due di punti interni in comune si ha $\varphi(S) \geq \sum_{i=1}^{n} \varphi(S_i)$ essendo S_i la superficie definita dalla (1) in π_i;

d) per ogni piano α dello spazio xyz è $\varphi(S) \geq mis\, \sigma$, essendo C_α la curva piana proiezione sul piano α della curva continua C contorno della superficie S, $O(P; C_\alpha)$ l'indice topologico del punto P del piano α rispetto alla curva C_α, σ l'insieme dei punti P del piano α ove $O(P; C_\alpha) \neq 0$.

Allora è $\varphi(S) = L(S)$.

2. - Sia S la generica superficie di FRÉCHET del tipo della 2-cella considerata nel numero precedente e sia (T, Q) la rappresentazione di S ivi considerata.

Sia r una regione semplice di JORDAN appartenente a Q, sia r^* il suo contorno.

Siano, come in [2], T_1, T_2, T_3 le trasformazioni piane associate a T.

Uguale significato che in [2] abbiano inoltre i simboli $O(y, z; T_1, r)$, $O(z, x; T_2, r)$, $O(x, y; T_3, r)$, K, K_i; $i = 1, 2, 3$.

Essendo r la generica regione semplice di JORDAN appartenente a Q, sia $r_1, r_2, \ldots r_n$ un gruppo di regioni semplici di JORDAN, prive a due a due di punti interni in comune, appartenenti ad r e σ_r serva ad indicare, come in [2], tale gruppo di regioni.

Sia $o(y, z; T_1; r) = 1$ se $O(y, z; T, r) \neq 0$; $= 0$ altrimenti ed analogo significato abbiano $o(z, x; T_2, r)$, $o(x, y; T_3, r)$.

Pongo, seguendo L. CESARI [3],

$$u(T_1, r) = \iint_{K_1} o(y, z; T_1, r)\, dy\, dz$$

ed in modo analogo introduco le quantità $u(T_2, r)$, $u(T_3, r)$.

Pongo quindi

$$u(T, r) = [u^2(T_1, r) + u^2(T_2, r) + u^2(T_3, r)]^{1/2}$$

ed infine

$$U(T, r) = \underset{\sigma_r}{extr\ sup} \sum_{s=1}^{n} u(T, r_s)$$

$$U(T_i, r) = \underset{\sigma_r}{extr\ sup} \sum_{s=1}^{n} u(T_i, r_s)\,; \qquad i = 1, 2, 3\,;$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i possibili gruppi di regioni σ_r di r.

Risultano in particolare definite le quantità $U(T, Q), U(T_i, Q)$; $i = 1, 2, 3$; per la prima delle quali L. Cesari [3] ha dimostrato la indipendenza dalla rappresentazione di S rispetto agli assi xyz e la indipendenza dalla orientazione degli assi xyz.

Possiamo perciò scrivere $U(S)$ in luogo di $U(T, Q)$.

Si ha inoltre; L. Cesari [3]; $L(S) = U(S)$ per ogni superficie S di Fréchet del tipo della 2-cella.

3. - Sia $\xi\eta\zeta$ una terna cartesiana congruente alla terna xyz sopra considerata, il piano $\xi\eta$ sul quale risulta fissata una pagina positiva sarà indicato nel seguito con π.

Sia (T', Q) la rappresentazione di S che si deduce da (T, Q) mediante il passaggio dalle coordinate xyz alle $\xi\eta\zeta$. I simboli K', K'_i; $i = 1, 2, 3$; $T'(r^*)$, $T'_i(r^*)$; $i = 1, 2, 3$; abbiano il significato ad essi attribuito in [2].

Altrettanto dicasi per la quantità $O(\xi, \eta; T'_3, r)$.

Sia, come sopra, $o(\xi, \eta; T'_3, r) = 1$ se $O(\xi, \eta; T'_3, r) \neq 0$; $= 0$ altrimenti.

Pongo

$$p_u(T, r) = \underset{\pi}{extr\ sup} \iint_{K'_3} o(\xi, \eta; T'_3, r)\, d\xi\, d\eta$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutte le possibili giaciture del piano π.

Pongo infine

$$P_u(T, r) = \underset{\sigma_r}{extr\ sup} \sum_{i=1}^{n} p_u(T, r_i)$$

ove $r_1, r_2, \dots r_n$ e σ_r hanno rispetto ad r il significato sopra richiamato e dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutti i possibili gruppi di regioni σ_r di r.

Risulta così definita la quantità $P_u(T, Q)$, che come vedremo nel prossimo numero è indipendente dalla rappresentazione di S; essa è l'area del tipo di Peano cui si è fatto cenno nel n. 1.

4. - Sia S la superficie di Fréchet considerata nel n. 1 e sia $S_1, S_2, \dots S_n, \dots$ una successione di superficie di Fréchet del tipo della 2-cella tali che detta $S_n \equiv (T_n, Q)$,

$$T_n : x = x_n(u, v), \quad y = y_n(u, v), \quad z = z_n(u, v), \quad (u, v) \in Q$$

una rappresentazione di S_n si abbia uniformemente in Q

$$\lim_{n \to \infty} x_n(u,v) = x(u,v), \lim_{n \to \infty} y_n(u,v) = y(u,v), \lim_{n \to \infty} z_n(u,v) = z(u,v).$$

Alla stessa maniera che in [2] si dimostra che

$$P_u(T, Q) \leq \varliminf_{n \to \infty} P_u(T_n, Q).$$

Basta infatti sostituire ovunque nella dimostrazione ricordata $0(\xi, \eta; T'_3, r)$ con $o(\xi, \eta: T'_3, r)$, $p(T, r)$ con $p_u(T, r)$, $P_c(T, r)$ con $P_u(T, r)$ e ricordare che sussiste la relazione

$$\iint_{K'_3} o(\xi, \eta; T'_3, r)\, d\xi d\eta \leq \varliminf_{n \to \infty} \iint_{K'_3} o(\xi, \eta; T'_{n,3}, r)\, d\xi d\eta.$$

Alla stessa maniera che in [2] si dimostra allora che la quantità $P_u(T, Q)$ è indipendente dalla rappresentazione (T, Q) adottata per S.

Siamo così autorizzati a scrivere $P_u(S)$ in luogo di $P_u(T, Q)$.

5. - Allo stesso modo che in [2] si dimostra che per ogni superficie di Fréchet del tipo della 2-cella, $S \equiv (T, Q)$, si ha

$$P_u(T, Q) \leq L(T, Q) \leq 3 P_u(T, Q).$$

Basta infatti tenere presenti gli accorgimenti segnalati nel numero precedente ed osservare che si ha, per ogni regione r appartenente a Q

$$u(T_i, r) \leq p_u(T, r) \qquad i = 1, 2, 3$$

6. - Sia $S \equiv (T, Q)$ la superficie considerata nel n. 1 e siano $G_c(T, Q)$, $G_c(T_i, Q)$; $i = 1, 2, 3$; le quantità ad essa relative considerate nella nota [2].

In virtù di un risultato di L. CESARI [3] si ha

$$U(T, r) = G_c(T, r), \quad U(T_i, r) = G_c(T_i, r); \quad i = 1, 2, 3;$$

per modo che nell'enunciato del Teorema III° del n. 10 della nota [2] può porsi $U(T'_i, q)$ in luogo di $G_c(T'_i, q)$; $i = 1, 2, 3$.

Con lo stesso ragionamento e con lo stesso significato dei simboli si dimostra allòra che comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ esistono n quadrati $q_1, q_2, \ldots q_n$, appartenenti a Q, altrettanti punti (u_i, v_i) appartenenti a questi quadrati ed altrettante terne $\xi^{(i)}\eta^{(i)}\zeta^{(i)}$ di origine $P_i \equiv S(u_i, v_i)$ tali che detta $(T^{(i)}, Q)$ la rappresentazione di S che si deduce da (T, Q) passando dalla terna $x\,y\,z$ alla terna $\xi^{(i)}\eta^{(i)}\zeta^{(i)}$; $i = 1, 2, \ldots n$; si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} U(T_3^{(i)}, q_i) > L(T, Q) - 3\,\varepsilon.$$

Da questa si deduce allora in virtù della definizione di $(T_3^{(i)}, q_i)$ l'esistenza di un gruppo di regioni semplici di JORDAN $\pi_{i,s}$; $s = 1, 2, \ldots n_i$; appartenenti a q_i tali che si abbia

$$\sum_{s=1}^{n_i} \iint_{K_3^{(i)}} o(\xi^{(i)}, \eta^{(i)}; T_3^{(i)}, \pi_{i,s})\, d\xi^{(i)}\, d\eta^{(i)} > U(T_3^{(i)}, q_i) - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Da questa si ricava

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n_i} \iint_{K_3^{(i)}} o(\xi^{(i)}, \eta^{(i)}; T_3^{(i)}, \pi_{i,s})\, d\xi^{(i)}\, d\eta^{(i)} > L(T, Q) - 4\,\varepsilon$$

e quindi per la definizione di $P_u(T, Q)$ e per l'arbitrarietà di ε

$$P_u(S) = P_u(T, Q) \geq L(S).$$

Resta così provato che per ogni superficie di Fréchet del tipo della 2 cella si ha

$$P_u(S) = L(S).$$

Osservo a questo punto che avrei potuto soddisfare le disuguaglianze sopra stabilite considerando in luogo delle regioni semplici di Jordan $\pi_{i,s}$; $s = 1, 2, \ldots n_i$; appartenenti a q_i; $i = 1, 2, \ldots n$; poligoni semplici $\pi'_{i,t}$; $t = 1, 2, \ldots n'_i$; appartenenti a q_i; $i = 1, 2, \ldots n$.

7. – Sono ora in grado di dimostrare il teorema enunciato nel n. 1.

Dalle condizioni a) e b) del teorema segue intanto, tenendo conto della definizione di area secondo Lebesgue di S, per ogni superficie $S \in F$,

$$\varphi(S) \leq L(S).$$

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio determino quindi un gruppo di poligoni π_i; $i = 1, 2, \ldots n$; appartenenti a Q, ed altrettante terne $\xi^{(i)} \eta^{(i)} \zeta^{(i)}$ congruenti alla terna $x\,y\,z$ tali che, detta (T_i, Q); $i = 1, 2, \ldots n$; la rappresentazione di S che si deduce da (T, Q) passando dalla terna $x\,y\,z$ alla $\xi^{(i)} \eta^{(i)} \zeta^{(i)}$, si abbia

$$P_u(S) < \sum_{i=1}^{n} \iint_{K_3^{(i)}} o(\xi^{(i)}, \eta^{(i)}; T_3^{(i)}, \pi_i)\, d\xi^{(i)}\, d\eta^{(i)} + \varepsilon;$$

ciò è possibile in virtù di quanto si è detto nel numero precedente.

Si ha perciò ricordando la definizione di $o(\xi^{(i)}, \eta^{(i)}; T_3^{(i)}, \pi_i)$ ed in virtù delle condizioni c) e d) dell'enunciato del teorema

$$P_u(S) < \sum_{i=1}^{n} \varphi(S_i) + \varepsilon \leq \varphi(S) + \varepsilon,$$

essendo S_i la superficie individuata da (T, Q) su π_i, e da quest'ultima per l'arbitrarietà di ε si deduce

$$P_u(S) \leq \varphi(S).$$

Si ha quindi per ogni superficie $S \in F$

$$P_u(S) \leq \varphi(S) \leq L(S)$$

e per il teorema dimostrato nel numero precedente

$$\varphi(S) = L(S).$$

Il teorema enunciato nel n. 1 è così dimostrato.

8. - Osservo infine che ciascuna delle disuguaglianze

$$u(T_s, r) \leq g(T_s, r), \quad u(T_s, r) \leq \varphi(T_s, r),$$

$$u(T_s, r) \leq g_e(T_s, r); \qquad s = 1, 2, 3;$$

considerate nella nota [2] dà luogo ad un teorema del tipo di quello ora dimostrato.

Ciascuno di tali teoremi si enuncia modificando adeguatamente la condizione d) del teorema sopra dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

1. R. Caccioppoli: *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie*, Rend. Circ. Mat. di Palermo 54, 217-262 (1930).
2. J Cecconi : *Su una congettura di T. Radó*, Rend. Sem. Mat. di Padova 19, 342-366 (1950).
3. L. Cesari : *Sui fondamenti geometrici dell' integrale classico per l' area delle superficie in forma parametrica*, Mem. Accad. Ital., 13, 1323-1481 (1943).
4. M. Pagni : *Sulla definizione dell' area di una superficie curva per via assiomatica*, Rend. Sem. Mat. di Padova 19, 303-316 (1950).
5. T. Radó : *Sur l' aire des surfaces continues*, Atti Cong. Int. Mat. Bologna Vol. 6, 355-360 (1928).