Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Annamaria Toso

A proposito di un problema al contorno per equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 299-306
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__299_0>

A PROPOSITO DI UN PROBLEMA AL CONTORNO PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL TERZO ORDINE

Nota (*) *di* Annamaria Toso (*a Padova*).

In questa Nota mi occupo del problema al contorno che consiste nel fissare in quattro punti distinti il valore dell' integrale di un' equazione del tipo

$$y''' = \lambda f(x, y, y', y''),$$

dove λ è un parametro. Limitandomi per semplicità al caso delle funzioni continue, dimostrerò che:

Data l' equazione

$$y''' = \lambda f(x, y, y', y''), \tag{1}$$

con $f(x, y, y', y'')$ *continua (e reale) nell' iperstrato*

$$S: \quad a \leq x \leq b, \ |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty, \ |y''| < +\infty$$

ed avente ivi un estremo inferiore m *positivo ed un estremo superiore* M *finito, se* x_1, x_2, x_3, x_4 *sono quattro punti di* $a \vdash\!\dashv b$ *ed* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *quattro numeri reali, esiste sempre almeno un valore* λ_0 *del parametro reale* λ *ed una funzione* $y(x)$ *definita in* $a \vdash\!\dashv b$ *tali da aversi*

(*) Pervenuta in redazione il 16 marzo 1951.

$$y'''(x) = \lambda_0 f(x, y(x), y'(x), y''(x)) \,, \quad y(x_i) = \alpha_i \quad (i = 1,2,3,4)\ \text{(1)}\,.$$

La dimostrazione fa ricorso ai noti procedimenti di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI. Ma non è escluso naturalmente che allo stesso risultato si possa giungere con procedimenti di altra natura.

1. - Per rendere più agevole la dimostrazione premettiamo due lemmi.

LEMMA 1. - *Se $g(t)$ è una funzione continua e positiva in $a \vdash\!\dashv b$ ed x_1, x_2, x_3, x_4 sono le ascisse di quattro punti di $a \vdash\!\dashv b$, con $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, risulta*

$$\int_{x_1}^{x_2} \{(x_4 - t)^2 - (x_4\, x_2\, x_1)\,(x_4\, x_2\, x_3)\,(x_2 - t)^2 - (x_4\, x_3\, x_1)\,(x_4\, x_3\, x_2)\,(x_3 - t)^2\}\, g(t)\, dt > 0 \ \text{(2)}\,.$$

Per provare l'asserto basta far vedere che la funzione

$$h(t) = (x_4 - t)^2 - (x_4\, x_2\, x_1)\,(x_4\, x_2\, x_3)\,(x_2 - t)^2 - (x_4\, x_3\, x_1)\,(x_4\, x_3\, x_2)\,(x_3 - t)^2$$

nell'intervallo $x_1 \leq t \leq x_2$ soddisfa alla $h(t) \geq 0$, la disuguaglianza valendo in senso forte in tutto un intervallo contenuto in $x_1 \vdash\!\dashv x_2$.

(1) Altri teoremi si possono dedurre, come casi particolari, da risultati di MAGENES [*Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$*, «Annali di Matematica pura ed applicata», serie IV, tomo XXVII (1948), pagg. 39-74; se ne vedano in particolare i numeri 3, 10 ed 11] e STAMPACCHIA [*Un' osservazione su un problema ai limiti per l'equazione $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$*, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», serie III, volume IV (1949), pagg. 235-239]. Per equazioni di primo e secondo ordine ricorderò soltanto che si conoscono teoremi di ZAWISCHA, TAKAHASCHI, CAFIERO, VOLPATO e ZWIRNER. Quest' ultimo mi ha suggerito di occuparmi delle presente questione.

(2) Con $(a\, b\, c)$ indico il rapporto $(a-c)/(b-c)$.

Ora, poichè risulta

$$(x_4\,x_1\,x_2)\,(x_4\,x_1\,x_3) + (x_4\,x_2\,x_1)\,(x_4\,x_2\,x_3) + \\ + (x_4\,x_3\,x_1)\,(x_4\,x_3\,x_2) = 1\ ,$$

si può scrivere

$$h(t) = x_4^2 - 2\,x_4\,t + t^2 + (x_4\,x_1\,x_2)\,(x_4\,x_1\,x_3)\,(x_2 - t)^2 - \\ - (x_4\,x_3\,x_1)\,(x_4\,x_3\,x_2)\,(x_3^2 - 2\,x_3\,t + t^2 - x_2^2 + 2\,x_2\,t - t^2) - \\ - x_2^2 + 2\,x_2\,t - t^2 = \frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_1}\Big[- (x_4 - x_3)\,(x_1 + x_2) + \\ + 2\,(x_4 - x_3)\,t + \frac{x_4 - x_3}{x_2 - x_1}\,(x_2 - t)^2\Big] = \frac{(x_4 - x_2)\,(x_4 - x_3)}{(x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)}\,[x_1^2 - \\ - x_2^2 + 2\,x_2\,t - 2\,x_1\,t + x_2^2 - 2\,x_2\,t + t^2] = \\ = (x_4\,x_1\,x_2)\,(x_4\,x_1\,x_3)\,(t - x_1)^2\,.$$

Dunque è $h(x_1) = 0$, mentre per ogni altro valore di t è $h(t) > 0$.

Lemma 2. - *Nelle ipotesi del lemma precedente, si ha pure*

$$\int_{x_2}^{x_3} \{(x_4 - t)^2 - (x_4\,x_3\,x_1)\,(x_4\,x_3\,x_2)\,(x_3 - t)^2\}\,g(t)\,dt > 0\,.$$

Anche in questo caso basterà far vedere che la funzione

$$k(t) = (x_4 - t)^2 - (x_4\,x_3\,x_1)\,(x_4\,x_3\,x_2)\,(x_3 - t)^2$$

soddisfa alla $k(t) > 0$ nell' intervallo $x_2 \leq t \leq x_3$.

Ora è

$$k(t) = \{1 - (x_4\,x_3\,x_1)\,(x_4\,x_3\,x_2)\}\,t^2 - \\ - 2\,\{x_4 - (x_4\,x_3\,x_1)\,(x_4\,x_3\,x_2)\,x_3\}\,t + x_4^2 - (x_4\,x_3\,x_1)\,(x_4\,x_3\,x_2)\,x_3^2\,.$$

Le due radici dell'equazione $k(t) = 0$ sono

$$t_2 = \frac{x_4 - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)\, x_3 - (x_4 - x_3)\sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)}}{1 - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)} =$$

$$= \frac{x_4 + x_3\sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)}}{1 + \sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)}} > \frac{x_3 + x_3\sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)}}{1 + \sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)}} = x_3$$

e

$$t_1 = \frac{x_4 - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)\, x_3 + (x_4 - x_3)\sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)}}{1 - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)} =$$

$$= \frac{x_3\sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)} - x_4}{\sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)} - 1}.$$

Dimostriamo che è $t_1 < x_2$. Supponiamo infatti $t_1 \geq x_2$, cioè

$$(x_3 - x_2)\sqrt{(x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)} \geq x_4 - x_2,$$

da cui, innalzando al quadrato e semplificando,

$$(x_4\, x_3\, x_1)(x_3 - x_2) \geq x_4 - x_2$$

e, sviluppando,

$$x_3\, x_4 - x_2\, x_4 - x_1\, x_3 + x_1\, x_2 \geq x_3\, x_4 - x_2\, x_3 - x_1\, x_4 + x_1\, x_2,$$

ossia

$$x_3 (x_2 - x_1) - x_4 (x_2 - x_1) \geq 0,$$

il che è assurdo, essendo per ipotesi $x_4 > x_3$, $x_2 > x_1$. Dunque è, effettivamente, $t_1 < x_2$. Ora, poichè è $k(t) > 0$ per $t_1 < t < t_2$, si ha pure $k(t) > 0$ per t variabile nello intervallo $x_2 \vdash\!\dashv x_3$, come appunto volevasi.

2. – Veniamo ora alla dimostrazione del teorema.

Posto per brevità

$$F(\varphi(x), x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)),$$

osserviamo anzitutto che, se $\varphi(x)$ è una funzione continua in $a \vdash b$ insieme con le derivate prime e seconde, la

$$\tau(x) = \lambda \int_{x_1}^{x} \frac{(x-t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt + \psi(\varphi(x), x),$$

con

$$\psi(\varphi(x), x) = (x\, x_1\, x_2)(x\, x_1\, x_3)\, \alpha_1 +$$

$$+ \left\{ \alpha_2 - \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2-t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt \right\} (x\, x_2\, x_1)(x\, x_2\, x_3) +$$

$$+ \left\{ \alpha_3 - \lambda \int_{x_1}^{x_3} \frac{(x_3-t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt \right\} (x\, x_3\, x_1)(x\, x_3\, x_2),$$

ha come derivata terza $\lambda F(\varphi(x), x)$ ed assume i valori α_1, α_2, α_3 nei punti x_1, x_2, x_3.

Si riconosce poi che, posto

$$D(\varphi(x)) = \int_{x_1}^{x_4} \frac{(x_4-t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt -$$

$$- (x_4\, x_2\, x_1)(x_4\, x_2\, x_3) \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2-t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt -$$

$$- (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2) \int_{x_1}^{x_3} \frac{(x_3-t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt,$$

risulta anche $\tau(x_4) = \alpha_4$, se è

$$\lambda = L(\varphi(x)) = \frac{1}{D(\varphi(x))} \{\alpha_4 - (x_4\, x_1\, x_2)(x_4\, x_1\, x_3)\, \alpha_1 -$$

$$- (x_4\, x_2\, x_1)(x_4\, x_2\, x_3)\, \alpha_2 - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)\, \alpha_3 \}.$$

Quindi il problema posto consiste nel trovare una $\vartheta(x)$ tale da aversi

$$\vartheta(x) = L(\vartheta(x)) \int_{x_1}^{x} \frac{(x-t)^2}{2} F(\vartheta(t), t)\, dt + \psi(\vartheta(x), x)$$

cioè nel trovare un punto unito della trasformazione funzionale

$$(2) \quad \tau(x) = L(\varphi(x)) \int_{x_1}^{x} \frac{(x-t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt + \psi(\varphi(x), x) \text{ (}^3\text{)}.$$

Cominciamo perciò con l'osservare che $\tau(x)$ è una funzione continua del 2° ordine di $\varphi(x)$, nel senso che, se $\varphi_0(x)$ è una $\varphi(x)$ prefissata, dato $\varepsilon > 0$, si può trovare un $\delta > 0$ tale che, se per la funzione $\varphi(x)$ si ha

$$|\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \delta, \; |\varphi'(x) - \varphi_0'(x)| < \delta, \; |\varphi''(x) - \varphi_0''(x)| < \delta$$

in tutto $a \vdash\!\dashv b$, riesca allora

$$|\tau(x) - \tau_0(x)| < \varepsilon \qquad (a \leq x \leq b),$$

(3) Anche seguendo MAGENES si tradurrebbe il problema attuale nella ricerca di un elemento unito di una trasformazione funzionale; e volendo si potrebbe vedere di dedurre il teorema di questa Nota attraverso i risultati di MAGENES.

essendo $\tau(x)$ e $\tau_0(x)$ le funzioni corrispondenti rispettivamente a $\varphi(x)$ e $\varphi_0(x)$ nella trasformazione funzionale (2). Ciò segue dal fatto che funzioni continue del 2° ordine di $\varphi(x)$ sono evidentemente $F(\varphi(x), x)$, $L(\varphi(x))$, e $\psi(\varphi(x), x)$.

Inoltre, al variare di $\varphi(x)$, la funzione $L(\varphi(x))$ si mantiene limitata. Infatti risulta

$$
\begin{aligned}
D(\varphi(x)) = & \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_4 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt + \int_{x_2}^{x_3} \frac{(x_4 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt + \\
& + \int_{x_3}^{x_4} \frac{(x_4 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt - \\
& - (x_4\, x_2\, x_1)(x_4\, x_2\, x_3) \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt - \\
& - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2) \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_3 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt + \right. \\
& \left. + \int_{x_2}^{x_3} \frac{(x_3 - t)^2}{2} F(\varphi(t), t)\, dt \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \Big[(x_4 - t)^2 - \right. \\
& - (x_4\, x_2\, x_1)(x_4\, x_2\, x_3)(x_2 - t)^2 - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)(x_3 - \\
& - t)^2 \Big] F(\varphi(t), t)\, dt + \int_{x_2}^{x_3} \Big[(x_4 - t)^2 - (x_4\, x_3\, x_1)(x_4\, x_3\, x_2)(x_3 - \\
& \left. - t)^2 \Big] F(\varphi(t), t)\, dt + \int_{x_3}^{x_4} (x_4 - t)^2 F(\varphi(t), t)\, dt \right\},
\end{aligned}
$$

e poichè, per ipotesi, $F(\varphi(x), x)$ non è mai minore di m, si riconosce, in virtù dei lemmi 1 e 2, che $D(\varphi(x))$ si mantiene in $a \vdash\!\dashv b$ superiore ad un numero positivo.

L' esistenza di un elemento unito della (2) si stabilisce allora facilmente coi procedimenti funzionali ricordati nella prefazione [1].

[1] Per esempio, si può trasportare al caso attuale (e la cosa riesce facilmente appunto perchè anche $L'(\varphi(x))$ è continua) il ragionamento esposto in Severi - Scorza Dragoni, *Lezioni di Analisi* (Zuffi, Bologna), vol. III. n. 41.