RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE GRIOLI

Sulle deformazioni elastiche di un involucro omogeneo soggetto a pressione o trazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 278-285

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__278_0>

SULLE DEFORMAZIONI ELASTICHE DI UN INVOLUCRO OMOGENEO SOGGETTO A PRESSIONE O TRAZIONE

Nota (*) *di* GIUSEPPE GRIOLI (*a Padova*).

Mostrerò come mediante l'applicazione di proprietà di media possano ottenersi in forma semplice ed elegante indicazioni sulle deformazioni di un corpo elastico omogeneo avente una cavità e soggetto a pressioni o trazioni uniformi sui suoi due contorni.

Sotto la sola ipotesi che l'energia potenziale elastica sia espressa da una forma quadratica a coefficienti costanti nelle caratteristiche di tensione – qualunque sia la natura del materiale, anche anisotropo – si possono stabilire delle limitazioni per le variazioni dei volumi racchiusi dai due contorni del corpo (1).

Da esse risulta tra l'altro che se le sollecitazioni agenti sui due contorni che delimitano il corpo soddisfano a certe condizioni si può decidere se i volumi da essi racchiusi si contraggono o si dilatano indipendentemente dalla natura del materiale di cui è costituito il corpo.

Nel caso di un corpo con più cavità può stabilirsi un'analoga limitazione per la variazione del volume racchiuso da uno dei contorni che lo delimitano purchè le sollecitazioni agenti sugli altri abbiano tutte uguali intensità [o in particolare siano nulle].

(*) Pervenuta in Redazione il 6 marzo 1951.

(1) Limitazioni analoghe possono stabilirsi anche per i coefficienti di dilatazione lineare.

1. – Coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione esterna. – Indico con σ_e, σ_i i contorni esterno ed interno di un corpo, C, avente una cavità e con p_e, p_i le pressioni o trazioni costanti agenti su σ_e, σ_i, con la convenzione di ritenere positive p_e, p_i se trattasi di pressioni, negative nel caso opposto.

Siano inoltre: V_e, V_i i volumi racchiusi da σ_e, σ_i; $T_G \equiv (G, x_1, x_2, x_3)$ la terna centrale d'inerzia del volume occupato dal corpo; x'_r, x''_r le coordinate rispetto a T_G dei baricentri di V_e, V_i; n'_r, n''_r i coseni direttori rispetto a T_G delle normali a σ_e, σ_i rivolte verso l'interno di C.

Indicando con C anche il volume del corpo, le coordinate astatiche ed iperastatiche della sollecitazione esterna sono espresse da

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a_{rs} &= -\frac{1}{C}\left\{p_e\int_{\sigma_e} x_r\, n'_s\, d\sigma_e + p_i\int_{\sigma_i} x_r\, n''_s\, d\sigma_i\right\},\\ b_{rst} &= -\frac{1}{C}\left\{p_e\int_{\sigma_e} x_r\, x_s\, n'_t\, d\sigma_e + p_i\int_{\sigma_i} x_r\, x_s\, n''_t\, d\sigma_i\right\}, \end{aligned}\right. \qquad (r, s, t = 1, 2, 3).$$

Da (1) segue subito

$$(2)\qquad a_{rs} = \begin{cases} \dfrac{1}{C}(V_e p_e - V_i p_i), & \text{se } r = s = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{se } r \neq s, \end{cases}$$

$$(3)\qquad b_{rst} = \begin{cases} \dfrac{2}{C}\,|\, V_e x'_r p_e - V_i x''_r p_i|, & \text{se } r = s = t, \\ \dfrac{1}{C}\,|\, V_e x'_r p_e - V_i x''_r p_i|, & \text{se } r \neq s = t, \\ 0, & \text{se } r \text{ ed } s \neq t. \end{cases}$$

Posto

$$(4)\qquad c_{rst} = \frac{1}{2}(b_{rts} + b_{str} - b_{rst}), \qquad (r, s, t = 1, 2, 3)$$

e tenuto conto della relazione

$$V_e x'_r - V_i x''_r = 0 , \qquad (r = 1 , 2 , 3) , \tag{5}$$

da (3) si deduce

$$c_{rst} = \begin{cases} \dfrac{V_e}{C} x'_r (p_e - p_i) = \dfrac{V_i}{C} x''_r (p_e - p_i) , & \text{se } r = s , \\ 0 , & \text{se } r \neq s . \end{cases} \tag{6}$$

2. - Adattamento di una disuguaglianza di Schwarz al caso dell'involucro. - Dette X_{rs} le caratteristiche di tensione, si ponga

$$\begin{cases} a_r = a_{rr} , & a_{r+3} = a_{r+1\, r+2} , \\ c_{rt} = c_{rrt} , & c_{r+3t} = c_{r+1\, r+2t} , \end{cases} \qquad (r , t = 1 , 2 , 3) , \tag{7}$$

$$X_r = X_{rr} , \quad X_{r+3} = X_{r+1\, r+2} , \qquad (r = 1 , 2 , 3) , \tag{8}$$

$$\rho_t^2 = \frac{1}{C} \int_C x_t^2 \, dC \qquad (t = 1 , 2 , 3) , \tag{9}$$

Se le costanti m_{rs}, $(r , s = 1 , 2 \ldots , 6)$, denotano i coefficienti di una qualunque forma quadratica in sei variabili definita o almeno semidefinita, si ha, com'è noto, [2]

$$\sum_{r,s=1}^{6} \int_C m_{rs} X_r X_s \, dC \geq C \sum_{r,s=1}^{6} m_{rs} \left\{ a_r a_s + \sum_{t=1}^{3} \frac{c_{rt} c_{st}}{\rho_t^2} \right\} . \tag{10}$$

La (10), tenuto conto di (2), (6), (7), diviene

$$\sum_{r,s=1}^{6} \int_C m_{rs} X_r X_s \, dC \geq \frac{1}{C} \sum_{r,s=1}^{3} m_{rs} \left\{ (p_e V_e - p_i V_i)^2 + \right. \\ \left. + V_e^2 (p_e - p_i)^2 \sum_{t=1}^{3} \frac{x'_r x'_s}{\rho_t^2} \right\} . \tag{11}$$

([2]) A. Signorini: *Sopra alcune questioni di Statica dei sistemi continui*, Annali della Scuola normale superiore di Pisa. Serie II, vol. II, 1933.

Se gli m_{rs} sono coefficienti di una forma quadratica definita positiva nella (11) vale il segno di eguaglianza allora e soltanto allora che le X_r sono funzioni lineari delle coordinate [3].

Non sarebbe però difficile riconoscere che non possono aversi soluzioni lineari per le X_r.

Si conclude che se gli m_{rs} sono coefficienti di una forma quadratica definita positiva nella (11) vale il segno di eguaglianza allora e soltanto allora che sia $p_e = p_i = p$ nel qual caso, com'è noto, risulta $X_1 = X_2 = X_3 = p$ e $X_4 = X_5 = X_6 = 0$.

Dalla (11), ponendo uguali a zero tutti gli m_{rs} tranne uno dei tre m_{rr}, $(r = 1, 2, 3)$ si deduce, in modo evidente, una limitazione inferiore per il massimo del modulo di X_r, $(r=1, 2, 3)$.

In particolare, se $p_i = 0$, si ottiene

$$(12) \qquad |X_r|_{max} \geq \frac{V_e\,|p_e|}{C}\sqrt{1 + x_r'^2 \sum_{t=1}^{3} \frac{1}{\rho_t^2}} =$$

$$= |p_e|\left(1 + \frac{V_i}{C}\right)\sqrt{1 + x_r'^2 \sum_{t=1}^{3} \frac{1}{\rho_t^2}}, \quad (r = 1, 2, 3),$$

ove vale il segno di eguaglianza quando e soltanto quando è $V_i = 0$ [il che implica $x_r' = 0$, $(r = 1, 2, 3)$].

Si riconosce così che la presenza di una cavità provoca nel corpo uno stato tensionale con un massimo di $|X_r|$, $(1 = 1, 2, 3)$, superiore al valore $|p_e|$ che a $|X_r|$ compete in assenza di cavità.

3. – Limitazioni per le variazioni dei volumi racchiusi dai due contorni che delimitano C. – Supposto C omogeneo si identifichino gli m_{rs} con i coefficienti, m_{rs}^*, della forma quadratica nelle X_r che esprime il doppio dell'energia potenziale elastica.

Il primo membro di (11) risulta allora, per il teorema di Clapeyron, uguale al lavoro della sollecitazione esterna.

(3) V. loco cit. in (2).

Posto

$$(13) \qquad A = \sum_{r,s=1}^{3} m_{rs}^{*} > 0 \,, \qquad B = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\rho_i^2} \sum_{r,s=1}^{3} m_{rs}^{*} x_r' x_s' \geq 0 \,,$$

e dette ΔV_e, ΔV_i le variazioni dei volumi V_e, V_i, da (11) segue, pertanto,

$$(14) \quad -p_e \Delta V_e + p_i \Delta V_i > \frac{1}{C} \left\{ A (p_e V_e - p_i V_i)^2 + B V_e^2 (p_e - p_i)^2 \right\},$$

ove si è escluso il segno di eguaglianza corrispondente al caso banale $p_e = p_i$.

Dette ε_{rs} le caratteristiche di deformazione e posto

$$(15) \qquad \varepsilon_r = \varepsilon_{rr} \,, \qquad \varepsilon_{r+3} = \varepsilon_{r+1\;r+2} \,, \qquad (r = 1 \,,\, 2 \,,\, 3) \,.$$

la legge di Hooke implica

$$(16) \qquad \varepsilon_r = - \sum_{s=1}^{6} m_{rs}^{*} X_s \,.$$

Da (16) si deduce che la variazione di volume dell'involucro è espresso da

$$(17) \qquad \Delta V_e - \Delta V_i = - \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{6} m_{rs}^{*} \int_C X_s \, dC \,.$$

Poichè i valori medi delle caratteristiche di tensione coincidono ([4]) con le coordinate astatiche della sollecitazione, da (2), (7,1), (13,1), (17) segue

$$(18) \qquad \Delta V_e - \Delta V_i = A (p_i V_i - p_e V_e) \,.$$

([4]) V. loco citato in (2).

Da (14), (18) si deduce

$$(19)\qquad \begin{cases} \Delta V_e \gtrless \dfrac{V_e}{C}\left\{A\,(p_i V_i - p_e V_e) + B V_e\,(p_i - p_e)\right\} . \\ \Delta V_i \gtrless \dfrac{1}{C}\left\{A\,V_i\,(p_i V_i - p_e V_e) + B V_e^2\,(p_i - p_e)\right\} , \end{cases}$$

con l'avvertenza di ritenere validi i segni $>$ o $<$ a seconda che $p_i - p_e$ sia positiva oppure negativa.

Sulle (19) si riconosce:

a) se $p_i - p_e < 0$ i due secondi membri di (19) sono negativi e i due volumi V_i, V_e decrescono di quantità superiori ai moduli dei secondi membri delle (19), qualunque sia la natura del materiale omogeneo di cui è costituito il corpo, quando la sollecitazione agente su σ_i ha il carattere di pressione o è nulla $[p_i \geq 0]$, come pure quando, essendo $p_i < 0$, la differenza $q = p_i - p_e$ soddisfi alla disuguaglianza

$$(20)\qquad q < p_i \frac{V_e - V_i}{V_e} .$$

b) Se $p_i - p_e > 0$ i due secondi membri di (19) riescono positivi e V_i, V_e crescono qualunque sia il materiale se la sollecitazione agente su σ_e ha il carattere di trazione o è nulla $[p_e \leq 0]$ o se, essendo $p_e > 0$ risulta

$$(21)\qquad q > p_e \frac{V_e - V_i}{V_i} .$$

Nei casi diversi da quelli considerati in *a)* e *b)*, supposto $B > 0$, può decidersi della dilatazione o contrazione dei volumi V_e, V_i solo in dipendenza della natura del materiale.

Le (19) mostrano, ad es., chè se $p_i - p_e > 0$ con $p_e > 0$ i due secondi membri riescono positivi anche quando non è soddisfatta la (21) purchè sia [5]

[5] Si tenga presente che per $B > 0$ è $\dfrac{1}{V_i} > \dfrac{A}{A V_i + B V_e} > \dfrac{A V_i}{A V_i^2 + B V_e^2}$

$$q > \frac{A\,(V_e - V_i)}{A V_i + B V_e}\, p_e \,. \tag{22}$$

In tal caso i volumi racchiusi da σ_e, σ_i crescono ambedue con accrescimenti superiori ai valori dei secondi membri di (19).

c) Si può anche aggiungere che se $p_i - p_e > 0$ e $p_e > 0$ il secondo membro di (19,2) è positivo, supposto $B > 0$, anche se non è verificata la (22) purchè risulti [6]

$$q > \frac{A V_i\,(V_e - V_i)}{A V_i^2 + B V_e^2}\, p_e \,. \tag{23}$$

In tale caso le (19) mostrano soltanto che il volume della cavità cresce e il secondo membro di (19,2) dà una limitazione inferiore al suo accrescimento.

4 - Caso di un corpo con più cavità. - Se C ha più cavità di volumi V_1, V_2, ... V_n la disuguaglianza (11) si generalizza facilmente e diviene

$$\sum_{r,s=1}^{6} \int_C m_{rs}\, X_r\, X_s\, dC \geq \frac{1}{C} \sum_{r,s=1}^{3} m_{rs} \left\{ \left(p_e V_e - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu V_\nu \right)^2 + \right. \tag{24}$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{n} (p_e - p_\nu)^2\, V_\nu^2 \sum_{t=1}^{3} \frac{x_r^{(\nu)}\, x_s^{(\nu)}}{\rho_t^2} \right\},$$

ove le $x_r^{(\nu)}$, $(r = 1, 2, 3\,;\ \nu = 1, 2\,\ldots, n)$, sono le coordinate del baricentro di V_ν.

In particolare, supposto $p_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2\,\ldots, n)$, la (12) si mantiene valida purchè si interpreti V_i come somma dei volumi di tutte le cavità.

Invece il procedimento esposto non può evidentemente fornire limitazioni per le variazioni dei volumi racchiusi dai vari

(6) V. nota (5).

contorni. Fa eccezione il caso che le pressioni o trazioni agenti sui contorni di C siano tutte uguali meno una, come accade, ad es., nell'ipotesi che solo uno dei contorni sia sollecitato.

È facile constatare che in tal caso dalla (24) si deduce una limitazione per la variazione del volume racchiuso dal contorno sollecitato in modo diverso dagli altri.

In particolare se le sollecitazioni agenti sui contorni delle cavità, pur essendo diverse da quella presente sul contorno, esterno, sono tutte uguali, si riconosce facilmente che la disuguaglianza (14) mantiene la sua validità purchè si interpreti V_i come somma dei volumi di tutte le cavità, ΔV_i come variazione di V_i e p_i indichi la comune pressione agente sui contorni delle singole cavità. Anche la (18) si mantiene valida. Ne segue che la (19,1) dà una limitazione per la variazione del volume racchiuso dal contorno esterno del corpo.

Si deduce che V_e decresce certamente qualunque sia il numero delle cavità se p_i e p_e verificano la condizione $a)$ mentre cresce se è soddisfatta la condizione $b)$ o se, essendo $p_e > 0$, è verificata la (22).