RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO GHIZZETTI

Sui problemi di Dirichlet e di Neumann per l'ellisse

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 244-248

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__244_0>

SUI PROBLEMI DI DIRICHLET E DI NEUMANN PER L' ELLISSE (1)

Nota (*) *di* ALDO GHIZZETTI (*a Roma*).

I problemi di DIRICHLET e di NEUMANN per l' equazione $\Delta_2 u(x, y) = 0$ e per il dominio E limitato dall' ellisse $x = a \cos \theta$, $y = b \operatorname{sen} \theta$ (con $a > b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) si risolvono di solito ricorrendo alla rappresentazione conforme del dominio E (tagliato lungo il segmento che unisce i due fuochi F, F' dell' ellisse) su una corona circolare C, per esempio mediante la formula

$$(1) \quad z = \frac{a+b}{2} w + \frac{a-b}{2} \frac{1}{w} \quad (\text{con } z = x + iy, \, w = u + iv).$$

Detta $F(z)$ la funzione olomorfa che ha come parte reale la $u(x, y)$, valendosi successivamente dello sviluppo di LAURENT della $G(w) = F\left(\frac{a+b}{2} w + \frac{a-b}{2} \frac{1}{w}\right)$ che riesce olomorfa in C, si perviene, attraverso alcune ulteriori considerazioni non troppo semplici, ad uno sviluppo in serie della $u(x, y)$ richiesta (2).

In questa Nota mi propongo, a scopo didattico, di indicare una modificazione del procedimento dianzi descritto che permette di inquadrarlo nel generale *metodo delle trasformate* e di arrivare quasi immediatamente allo scopo.

(*) Pervenuta in Redazione il 3 gennaio 1951.

(1) Lavoro eseguito presso l' Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Per una esauriente trattazione dei due problemi, vedi M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*; Ed. Rondinella, Napoli 1940, pagg. 355-362.

Posto $w = \rho e^{i\theta}$, dalla (1) discende

$$x = \left(\frac{a+b}{2}\rho + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\rho}\right) \cos\theta\,, \tag{2}$$

$$y = \left(\frac{a+b}{2}\rho - \frac{a-b}{2}\frac{1}{\rho}\right) \operatorname{sen}\theta\,,$$

ed è chiaro che questo cambiamento delle variabili trasforma il dominio E (tagliato nel modo sopradetto) nella corona circolare C definita da $q \leq \rho \leq 1$ con $q = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; inoltre alle ellissi omofocali alla data corrispondono le circonferenze concentriche a quelle che limitano C ed il parametro θ ha il significato di anomalia eccentrica sulle prime e di anomalia sulle seconde. La $u(x, y)$ si trasforma in una $u(\rho, \theta)$ armonica in C *la quale sulla circonferenza* $\rho = q$ (che corrisponde al segmento focale FF') *deve evidentemente essere una funzione pari di* θ, *mentre la sua derivata* $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ *deve essere una funzione dispari di* θ.

È appunto su questa semplice osservazione che si fonda la modificazione del procedimento classico (3).

* * *

Incominciamo col *problema di Dirichlet*. Detta $f(\theta)$ la funzione continua a cui deve ridursi la $u(x, y)$ sulla frontiera di E, da quanto precede risulta che il nostro problema ci porta a considerare quello di costruire una funzione $u(\rho, \theta)$ verificante le condizioni seguenti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\,, \qquad (\text{per } q < \rho < 1)\,, \tag{3}$$

$$u(1, \theta) = f(\theta)\,, \tag{4}$$

(5) $\quad u(q, \theta)$ funzione pari; $u_\rho(q, \theta)$ funzione dispari;

da quanto segue risulterà che questo nuovo problema è determinato e quindi equivalente al primo.

(3) Per ragioni di brevità, in quanto segue sorvolo sulla precisazione delle ipotesi qualitative, che sono ben note.

Introdotti i coefficienti di Fourier

$$\begin{matrix} a_k(\rho) \\ b_k(\rho) \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\tau) \begin{matrix} \cos k\tau \\ \operatorname{sen} k\tau \end{matrix} \, d\tau \,, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

dalle (3), (4), (5) segue

$$(3') \qquad \begin{aligned} &a_k''(\rho) + \frac{1}{\rho} a_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2} a_k(\rho) = 0\,, \\ &b_k''(\rho) + \frac{1}{\rho} b_k'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2} b_k(\rho) = 0\,, \end{aligned}$$

$$(4') \quad a_k(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) \cos k\tau \, d\tau \,, \quad b_k(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) \operatorname{sen} k\tau \, d\tau \,,$$

$$(5') \quad b_k(q) = 0\,; \qquad\qquad a_k'(q) = 0\,.$$

Dalle (3′) si ricava poi

$$(3'') \qquad a_0(\rho) = A_0 + B_0 \log \rho \,, \quad a_k(\rho) = A_k \rho^k + B_k \rho^{-k}\,,$$

$$b_k(\rho) = C_k \rho^k + D_k \rho^{-k}\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

con $A_0, B_0, \ldots$ costanti abitrarie, per le quali le (4′), (5′) danno le equazioni

$$(4'') \qquad A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\, d\tau \,, \; A_k + B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) \cos k\tau \, d\tau \,,$$

$$C_k + D_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau) \operatorname{sen} k\tau \, d\tau \,,$$

$$(5'') \quad C_k q^k + D_k q^{-k} = 0\,; \quad B_0 = 0\,, \; A_k q^k - B_k q^{-k} = 0\,.$$

Si ha pertanto

$$a_0(\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau\,,\; a_k\;(\rho)=\frac{1}{\pi}\,\rho^k\,\frac{1+\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1+q^{2k}}\int_0^{2\pi} f(\tau)\cos k\tau\,d\tau\,,$$

$$b_k(\rho)=\frac{1}{\pi}\,\rho^k\,\frac{1-\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1-q^{2k}}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,sen\,k\tau\,d\tau$$

e quindi il teorema di unicità e la formula risolutiva del problema:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\int_0^{2\pi} f(\tau)\left[\frac{1+\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1+q^{2k}}\cos k\theta\cos k\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1-q^{2k}}\,sen\,k\theta\,sen\,k\tau\right]d\tau\,.$$

* * *

Passiamo al *problema di Neumann*. Indicando con $f(\theta)$ i valori assegnati della $\frac{\partial u}{\partial n}$ (n normale interna) sulla frontiera di E, il nostro problema ci porta ad esaminare quest' altro:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0\,,\ (\text{per } q<\rho<1)\,,$$

$$u_\rho(1,\theta)=-p(\theta)\,f(\theta)\ \text{con}\ p(\theta)=\sqrt{a^2\,sen^2\,\theta+b^2\cos^2\theta}\,,$$

$u(q,\theta)$ funzione pari; $u_\rho(q,\theta)$ funzione dispari,

che, come ora si vedrà, risulta equivalente al primo.

Procedendo come dianzi si trova che devono valere le (3″) accompagnate dalle

$$B_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(\tau) f(\tau)\, d\tau\,,\; k(A_k - B_k) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(\tau) f(\tau) \cos k\tau\, d\tau\,,$$

$$k(C_k - D_k) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(\tau) f(\tau)\, \mathrm{sen}\, k\tau\, d\tau$$

e dalle (5″). Ne segue anzitutto la *condizione di compatibilità* $\int_0^{2\pi} p(\tau) f(\tau)\, d\tau = 0$ ossia $\int_{FE} f\, ds = 0$ ed inoltre che deve essere

$$a_k(\rho) = -\frac{1}{\pi k}\rho^k \frac{1+\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1-q^{2k}}\int_0^{2\pi} p(\tau) f(\tau) \cos k\tau\, d\tau\,,$$

$$b_k(\rho) = -\frac{1}{\pi k}\rho^k \frac{1-\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1+q^{2k}}\int_0^{2\pi} p(\tau) f(\tau)\, \mathrm{sen}\, k\tau\, d\tau\,,$$

mentre $a_0(\rho)$ risulta uguale alla costante A_0 che rimane arbitraria. Indicando quest' ultima con c, abbiamo in conclusione la formula risolutiva

$$u(\rho, \theta) = c - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\int_0^{2\pi} p(\tau) f(\tau) \left[\frac{1+\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1-q^{2k}} \cos k\theta \cos k\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\left(\frac{q}{\rho}\right)^{2k}}{1+q^{2k}}\, \mathrm{sen}\, k\theta\, \mathrm{sen}\, k\tau\right] d\tau\,.$$