Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Volpato

Criteri di confronto e di unicità per le soluzioni dell'equazione $p = f(x, y, z, q)$ coi dati di Cauchy

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 232-243

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__232_0>

CRITERI DI CONFRONTO E DI UNICITÀ PER LE SOLUZIONI DELL' EQUAZIONE $p = f(x, y, z, q)$ COI DATI DI CAUCHY

Nota (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*) (**).

In un recente lavoro (1) ho esteso un criterio di unicità, dato da WAŻEWSKI (2), relativo agli integrali dell'equazione:

$$\text{I)} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right),$$

soddisfacenti alla condizione di CAUCHY.

In questa Nota stabilisco (n. 2, 3), sotto ipotesi molto larghe, due criteri di confronto per le soluzioni dell'equazione I) verificanti sempre ai dati di CAUCHY.

Dal secondo di questi criteri deduco poi (n. 4) un teorema di unicità che estende notevolmente quello da me dato nel lavoro citato in (1).

Avverto che solo per semplicità mi sono limitato a considerare equazioni del tipo I) nelle quali la funzione incognita z dipende da due sole variabili indipendenti; le considerazioni svolte si estendono senza difficoltà anche alle equazioni più generali del tipo I) (3).

(*) Pervenuta in Redazione il 15 dicembre 1950.

(**) Lavoro eseguito nel *Seminario Matematico dell'Univ. di Ferrara*.

(1) M. VOLPATO: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine*, «Annali della Università di Ferrara», vol. VIII – Parte 1a, 1950.

(2) T. WAŻEWSKI: *Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 6a, vol. XVIII, (1933), pagg. 372-376.

(3) Per altri criteri di confronto per l'equazione I), dati però in ipotesi

1. - Enunciamo anzitutto un lemma, di cui ci serviremo in seguito, e che costituisce una estensione di quello dato nel n. 1 del lavoro citato in (1).

Sia $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, *una funzione reale delle variabili reali* $(x, y_1, \ldots, y_n)$, *continua, rispetto al complesso delle variabili, assieme alle sue derivate parziali prime, nell'insieme*:

$$T:\ 0 \leq x \leq a\,;\quad \sigma_1(x) \leq y_1 \leq \tau_1(x)\,;\ldots;\quad \sigma_n(x) \leq y_n \leq \tau_n(x),$$

ove $\sigma_i(x) < \tau_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *sono due* n-*uple di funzioni definite in* I: $0 \leq x \leq a$, *e sia* $M(u)$ *il massimo della funzione* φ *considerata sulla sezione* $S(u)$ *di* T *col piano* $x = u$.

Siano inoltre $\alpha_i(x, y_i)$ n *funzioni qualunque, aventi valori finiti, rispettivamente negli insiemi*:

$$T_i:\ 0 \leq x \leq a\,;\quad \sigma_i(x) \leq y_i \leq \tau_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Supponiamo che in un fissato punto x *di* I *esistano finite* $\sigma_i'(x), \tau_i'(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *e soddisfacciano alle*:

$$(1)\qquad \begin{cases} \sigma_i'(x) \geq \alpha_i[x, \sigma_i(x)] \\ \tau_i'(x) \leq -\alpha_i[x, \tau_i(x)] \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

In tali ipotesi esiste la derivata destra $M'_+(x)$ *di* $M(x)$ *ed esiste almeno un punto* $\bar{P}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ *di* $S(x)$ *ove sono soddisfatte le relazioni*:

$$M(x) = \varphi(\bar{P}),$$

e

$$M'_+(x) \leq \varphi'_x(\bar{P}) - \sum_1^n{}_i\, \alpha_i(x, \bar{y}_i)\,|\varphi'_{y_i}(\bar{P})|,$$

completamente diverse da quelle nelle quali ci siamo posti nella presente Nota, si veda il lavoro di J. Szarski: *Sur certaines inégalités entre les intégrales des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, tomo XXII, (1949), pagg. 1–34.

nella quale il segno d'uguaglianza vale certamente nel caso che sussista l'uguaglianza in tutte le (1).

Una stessa proprietà sussiste per la derivata sinistra $M'_{-}(x)$ *di* $M(x)$.

Nel lavoro citato in (1) avevo supposto che le funzioni $\alpha_i(x, y_i)$ fossero *non negative.*

Poichè il presente lemma si stabilisce con gli stessi ragionamenti fatti per provare quello che ho dato nel citato lavoro, credo di potermi esimere dalla dimostrazione.

2. – Dimostriamo ora il seguente teorema:

Siano $f_1(x, y, z, q)$, $f_2(x, y, z, q)$ *due funzioni reali delle variabili reali* (x, y, z, q) *definite per* z, q *variabili da* $-\infty$ *a* $+\infty$ *e* x, y *nell'insieme*:

$$D:\ 0 \leq x \leq a\ ;\quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x)\ ,$$

ove $\sigma(x) < \tau(x)$ *sono due funzioni dotate di derivata prima finita in ogni punto di* I: $0 \leq x \leq a$, *e* $\alpha(x, y)$ *una funzione qualunque avente valori finiti in* D.

Supponiamo che:

I) *per ogni* x *di* I *sia*:

$$\begin{cases} \sigma'(x) \geq \alpha[x, \sigma(x)] \\ \tau'(x) \leq -\alpha[x, \tau(x)]\ ; \end{cases}$$

II) *per ogni punto* (x, y, z, q) *del campo ove son definite* f_1, f_2, *risulti*:

$$f_1(x, y, z, q) < f_2(x, y, z, q)\ ;$$

III) *per ogni coppia di punti* $[x, \sigma(x), z, \bar{q}]$, $[x, \sigma(x), z, q]$, *con* $\bar{q} \leq q$, *sia*:

$$f_1[x, \sigma(x), z, \bar{q}] - f_2[x, \sigma(x), z, q] < \alpha[x, \sigma(x)]\,|\,\bar{q} - q\,|\ ;$$

IV) *per ogni coppia di punti* $[x, \tau(x), z, \bar{q}]$, $[x, \tau(x), z, q]$, *con* $\bar{q} \geq q$, *sia*:

$$f_1[x, \tau(x), z, \bar{q}] - f_2[x, \tau(x), z, q] < \alpha[x, \tau(x)]\,|\,\bar{q} - q\,|\ .$$

In queste ipotesi, dette, rispettivamente, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ due eventuali soluzioni, continue assieme alle loro derivate parziali prime in D, delle equazioni:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f_2\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

soddisfacenti alla condizione:

$$\varphi_1(0, y) \leq \varphi_2(0, y), \tag{2}$$

si ha:

$$\varphi_1(x, y) < \varphi_2(x, y) \tag{3}$$

in $0 < x \leq a$; $\sigma(x) \leq y \leq \tau(x)$.

Posto:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y),$$

e indicato con $S(k)$ $(0 \leq k \leq a)$ l'intervallo: $\sigma(k) \leq y \leq \tau(k)$, sezione di D con la retta $x = k$, sia $M(x)$ il massimo della funzione $\varphi(x, y)$, pensata come funzione della sola variabile y, sulla sezione $S(x)$ di D. Per il lemma enunciato nel n. 1, ad ogni x di I si può associare almeno un $\bar{y}(x)$, con $\sigma(x) \leq \bar{y}(x) \leq \tau(x)$, in modo da aversi:

$$M(x) = \varphi[x, \bar{y}(x)]; \quad M'_+(x) \leq \varphi'_x[x, \bar{y}(x)] - \tag{4}$$

$$- \alpha[x, \bar{y}(x)] \, | \varphi'_y[x, \bar{y}(x)] |,$$

e almeno un $\bar{\bar{y}}(x)$, con $\sigma(x) \leq \bar{\bar{y}}(x) \leq \tau(x)$, in modo da aversi:

$$M(x) = \varphi[x, \bar{\bar{y}}(x)], \quad M'_-(x) \leq \varphi'_x[x, \bar{\bar{y}}(x)] - \tag{5}$$

$$- \alpha[x, \bar{\bar{y}}(x)] \, | \varphi'_y[x, \bar{\bar{y}}(x)] | .$$

Osserviamo ora che per la (2) esiste un intorno destro dello zero ove $M(x)$ è negativa. Infatti la cosa è evidente se la (2) è soddisfatta in senso forte. Nel caso contrario, si ha:

$$\varphi(0, y) = \varphi_1(0, y) - \varphi_2(0, y) = 0,$$

e

$$\varphi'_y(0, y) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{(0,y)} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{(0,y)} = 0, \tag{6}$$

e quindi, in virtù dell'ipotesi II), risulta:

$$\varphi'_x(0, y) = f_1\left[x, y, \varphi_1(0, y), \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{(0,y)}\right] -$$

$$- f_2\left[x, y, \varphi_2(0, y), \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{(0,y)}\right] < 0.$$

Di qui, dalla seconda delle (4) e dalla (6) segue

$$M'_+(0) \leq \varphi'_x(0, y) < 0,$$

e con ciò, dato che è $M(0) = 0$, risulta provata l'esistenza di un intorno destro dello zero ove $M(x)$ è negativa.

Proviamo allora che risulta

$$M(x) < 0$$

per ogni x di $0 < x \leq a$, e con ciò il teorema sarà dimostrato.

Essendo $M(x)$ continua, ove non sia $M(x) < 0$ in tutto $0 < x \leq a$, vi sarà un punto x_0 $(0 < x_0 \leq a)$ ove risulterà:

$$\begin{cases} M(x_0) = 0 \\ M(x) < 0 \qquad \text{per } 0 < x < x_0, \end{cases} \tag{7}$$

e quindi

$$M'_-(x_0) \geq 0. \tag{8}$$

Detto P_0 il punto di coordinate $[x_0, \overline{\overline{y}}(x_0)]$, dalla (8) e dalla seconda delle (5), si avrebbe:

$$(9) \qquad 0 \leq M'_-(x_0) \leq \varphi'_x(P_0) - \alpha(P_0) \mid \varphi'_y(P_0) \mid,$$

il che, come dimostreremo subito, è assurdo.

Infatti, poichè per $y = \overline{\overline{y}}(x_0)$ la funzione $\varphi(x_0, y)$ è massima, si ha:

$$\varphi'_y(P_0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{P_0} = 0 \quad \text{se è } \sigma(x_0) < \overline{\overline{y}}(x_0) < \tau(x_0),$$

$$\varphi'_y(P_0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{P_0} \leq 0 \quad \text{se è } \overline{\overline{y}}(x_0) = \sigma(x_0),$$

$$\varphi'_y(P_0) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{P_0} \geq 0 \quad \text{se è } \overline{\overline{y}}(x_0) = \tau(x_0),$$

e quindi ove si tengano presenti le ipotesi II), III), IV) e la prima delle (7), risulta:

$$\varphi'_x(P_0) = f_1\left[x_0, \overline{\overline{y}}(x_0), \varphi_1(P_0), \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{P_0}\right] -$$

$$- f_2\left[x_0, \overline{\overline{y}}(x_0), \varphi_2(P_0), \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_{P_0}\right] < 0$$

per $\sigma(x_0) < \overline{\overline{y}}(x_0) < \tau(x_0)$, mentre si ha:

$$\varphi'_x(P_0) \leq \alpha(P_0) \mid \varphi'_y(P_0) \mid$$

sia per $\overline{\overline{y}}(x_0) = \sigma(x_0)$ che per $\overline{\overline{y}}(x_0) = \tau(x_0)$.

Queste conclusioni contraddicono appunto la (9).

3. - Dimostriamo ora un secondo criterio di confronto sempre relativo al problema precedentemente considerato.

Siano $f_1(x, y, z, q)$, $f_2(x, y, z, q)$ *due funzioni reali delle variabili reali* (x, y, z, q), *definite per* z, q *variabili da* $-\infty$ $+\infty$ *e* x, y *nell'insieme*:

$$D:\ 0 \leq x \leq a\ ;\quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x),$$

ove $\sigma(x) < \tau(x)$ *sono due funzioni continue in* I: $0 \leq x \leq a$, *aventi derivata prima finita in ogni punto* x *di un insieme* I', *contenuto in* I, *per il quale* $I - I'$ *è numerabile*; $\alpha(x, y)$ *una funzione qualunque avente valori finiti in* D; $F(x, u)$ *una funzione definita per* x *in* I *e* $u > 0$, *continua per ogni fissato valore di* u *in tutti i punti di* I', *continua rispetto ad* u *per ogni fissato* x *di* I, *non superata in modulo da una funzione della* x (*non negativa e*) *sommabile in* I.

Supponiamo che:

I_1) *per ogni* x *di* I' *sia*:

$$\begin{cases} \sigma'(x) \geq \alpha[x, \sigma(x)] \\ \tau'(x) \leq -\alpha[x, \tau(x)]\ ; \end{cases}$$

II_1) *per ogni coppia di punti* $(x, y, \bar{z}, q)$, (x, y, z, q) *aventi la* x *in* I', *la* y *in* $\sigma(x) < y < \tau(x)$ *e* $\bar{z} > z$, *sia*:

$$f_1(x, y, \bar{z}, q) - f_2(x, y, z, q) \leq F(x, \bar{z} - z)\ ;$$

III_1) *per ogni coppia di punti* $[x, \sigma(x), \bar{z}, \bar{q}]$, $[x, \sigma(x), z, q]$, *aventi la* x *in* I', $\bar{z} > z$ *e* $\bar{q} \leq q$, *sia*:

$$f_1[x, \sigma(x), \bar{z}, \bar{q}] - f_2[x, \sigma(x), z, q] \leq \alpha[x, \sigma(x)](\bar{q} - q) +$$
$$+ F(x, \bar{z} - z)\ ;$$

IV_1) *per ogni coppia di punti* $[x, \tau(x), \bar{z}, \bar{q}]$, $[x, \tau(x), z, q]$ *aventi la* x *in* I', $\bar{z} > z$, $\bar{q} \geq q$, *sia*:

$$f_1[x, \tau(x), \bar{z}, \bar{q}] - f_2[x, \tau(x), z, q] \leq \alpha[x, \tau(x)] \mid \bar{q} - q \mid +$$

$$+ F(x, \bar{z} - z);$$

V$_1$) *fissato un numero* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, esista un* $h_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni punto* ξ_0 *interno ad* I, *l'integrale superiore dell'equazione*:

$$u = h_\varepsilon + \int_{\xi_0} F(t, u)\, dt,$$

risulti, a destra di ξ_0, *minore o uguale ad* ε.

In queste condizioni, dette, rispettivamente, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ *due eventuali soluzioni, continue assieme alle loro derivate parziali prime in* D, *delle equazioni*:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial z}{\partial x} = f_2\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

soddisfacenti alla condizione:

(10) $$\varphi_1(0, y) \leq \varphi_2(0, y),$$

si ha:

(11) $$\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$$

in tutto D.

Posto:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y),$$

sia $M(x)$ il massimo di $\varphi(x, y)$ sulla sezione $S(x)$ di D.

Osserviamo intanto che per la (10) è $M(0) \leq 0$. Proviamo che in tutto I risulta:

(12) $$M(x) \leq 0,$$

e con ciò il teorema sarà dimostrato.

A tale scopo, supponiamo, per assurdo, che esista un punto x_0 $(0 < x_0 \leq a)$ in cui risulta $M(x_0) > 0$. Essendo $M(0) \leq 0$, esisterà in I un punto $\bar{x}_0$, alla sinistra di x_0, ove

$$(13) \qquad \begin{cases} M(\bar{x}_0) = 0 \\ M(x) > 0 \quad \text{per } \bar{x}_0 < x \leq x_0 . \end{cases}$$

Sia ora t un punto qualunque dell'intervallo $\bar{x}_0 < x \leq x_0$ e appartenente ad I' e $Q[t, \bar{y}(t)]$ un punto di $S(t)$ in cui, per il lemma del n. 1, risulti:

$$(14) \qquad M(t) = \varphi(Q) = \varphi_1(Q) - \varphi_2(Q)$$

$$(15) \qquad M'_+(t) \leq \varphi'_x(Q) - \alpha(Q)\,|\,\varphi'_y(Q)\,| .$$

Sarà allora:

$$\varphi'_y(Q) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_Q - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_Q = 0 \quad \text{se è } \sigma(t) < \bar{y}(t) < \tau(t) ,$$

$$\varphi'_y(Q) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\varphi y}\right)_Q - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_Q \leq 0 \quad \text{se è } \bar{y}(t) = \sigma(t) ,$$

$$\varphi'_y(Q) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_Q - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_Q \geq 0 \quad \text{se è } \bar{y}(t) = \tau(t) ,$$

mentre per la seconda delle (13) è:

$$\varphi_1(Q) > \varphi_2(Q) .$$

Di qui, in virtù delle ipotesi II_1), III_1), IV_1), si ha:

$$\varphi'_x(Q) = f_1\left[t, \bar{y}(t), \varphi_1(Q), \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_Q\right] -$$

$$- f_2\left[t, \bar{y}(t), \varphi_2(Q), \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)_Q\right] \leq F\,[t, \varphi_1(Q) - \varphi_2(Q)]$$

per $\sigma(t) < \bar{y}(t) < \tau(t)$, e

$$\varphi'_x(Q) \leq \alpha(Q) \mid \varphi'_y(Q) \mid + F[t, \varphi_1(Q) - \varphi_2(Q)],$$

per $\bar{y}(t) = \sigma(t)$ oppure $\bar{y}(t) = \tau(t)$.

Dalle (14), (15) segue

$$M'_+(t) \leq F[t, M(t)],$$

per ogni t dell'intervallo $\bar{x}_0 < x \leq x_0$ e appartenente ad I'.

Arrivati a questo punto basta riprendere il ragionamento che ho avuto occasione di svolgere nella Nota citata in (1) per arrivare ad un assurdo. Resta così dimostrato che in tutto I vale la (12) e con ciò il teorema è provato.

4. – Dal teorema di confronto dimostrato nel numero precedente segue immediatamente un criterio di unicità per gli integrali dell'equazione:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

soddisfacenti alla condizione di Cauchy; criterio che estende notevolmente quello da me stabilito nel lavoro citato in (1).

Crediamo perciò opportuno enunciarlo esplicitamente.

Siano: $f(x, y, z, q)$ *una funzione reale delle variabili reali* (x, y, z, q) *definita per* z, q *variabili da* $-\infty$ *a* $+\infty$ *e* x, y *nell'insieme*:

$$D: 0 \leq x \leq a; \quad \sigma(x) \leq y \leq \tau(x),$$

ove $\sigma(x) < \tau(x)$ *sono due funzioni continue in* $I: 0 \leq x \leq a$, *aventi derivata prima finita in ogni punto* x *di un insieme* I', *contenuto in* I, *per il quale* $I - I'$ *è numerabile*; $\alpha(x, y)$ *una funzione qualunque avente valori finiti in* D; $F(x, u)$ *una funzione definita per* x *in* I *e* $u > 0$, *continua per ogni fissato valore di* u *in tutti i punti di* I', *continua rispetto ad* u *per* *ogni fissato* x *di* I, *non superata in modulo da una funzione della* x (*non negativa e*) *sommabile in* I.

Supponiamo che:

I_2) *per ogni* x *di* I' *sia*:

$$\begin{cases} \sigma'(x) \geq \alpha\,[x, \sigma(x)] \\ \tau'(x) \leq -\alpha\,[x, \tau(x)]\,; \end{cases}$$

II_2) *per ogni coppia di punti* $(x, y, \bar{z}, q)$, (x, y, z, q) *aventi la* x *in* I', *la* y *in* $\sigma(x) < y < \tau(x)$ *e* $\bar{z} > z$, *sia*:

$$f(x, y, \bar{z}, q) - f(x, y, z, q) \leq F(x, \bar{z} - z)\,;$$

III_2) *per ogni coppia di punti* $[x, \sigma(x), \bar{z}, \bar{q}]$, $[x, \sigma(x), z, q]$, *aventi la* x *in* I', $\bar{z} > z$ *e* $\bar{q} \leq q$, *sia*:

$$f[x, \sigma(x), \bar{z}, \bar{q}] - f[x, \sigma(x), z, q] \leq \alpha[x, \sigma(x)]\,|\bar{q} - q| + F(x, \bar{z} - z)\,;$$

IV_2) *per ogni coppia di punti* $[x, \tau(x), \bar{z}, \bar{q}]$, $[x, \tau(x), z, q]$, *aventi la* x *in* I', $\bar{z}, > z$ *e* $\bar{q} \geq q$, *sia*:

$$f[x, \tau(x), \bar{z}, \bar{q}] - f[x, \tau(x), z, q] \leq \alpha\,[x, \tau(x)]\,|\bar{q} - q| + F(x, \bar{z} - z)\,;$$

V_2) *fissato un numero* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, esista un* $h_\varepsilon > 0$ *tale che, per ogni punto* ξ_0 *interno ad* I, *l'integrale superiore dell'equazione*:

$$u = h_\varepsilon + \int_{\xi_0}^{x} F(t, u)\, dt\,,$$

risulti, a destra di ξ_0, *minore o uguale ad* ε.

In queste ipotesi, dette $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ *due eventuali soluzioni, continue assieme alle loro derivate parziali prime in* D, *della equazione*:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

soddisfacenti alla condizione:

$$\varphi_1(0, y) = \varphi_2(0, y),$$

risulta, in tutto D,

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y).$$