Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Annamaria Toso

A proposito di alcuni teoremi di Trevisan e v. Kerékiártó

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 224-231

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__224_0>

A PROPOSITO DI ALCUNI TEOREMI DI TREVISAN E v. KERÉKIÁRTÓ

Nota (*) *di* ANNAMARIA TOSO (*a Padova*).

In questa Nota mi propongo, come scopo precipuo, di dedurre (§ 1) un teorema di v. KERÉKIÀRTÓ sull'esistenza di punti uniti in una trasformazione topologica del cerchio (1) da un altro teorema, dello stesso tipo, dato da TREVISAN (2).

Il teorema di v. KERÉKIÀRTÓ è stato utilizzato (3) da questo autore per dimostrare che se λ è un arco di traslazione di una traslazione piana generalizzata τ (4), la curva $\lambda + \tau(\lambda) + \tau^2(\lambda)$ è semplice ed aperta. Orbene, nel § 2 mostrerò che il teorema ed il ragionamento di v. KERÉKIÀRTÓ si prestano a dimostrare che lo stesso accade per la curva $\lambda + \tau(\lambda) + \ldots\ldots + \tau^n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e pervengo anzi a questo risultato utilizzando una definizione di arco di traslazione, data da SCORZA DRAGONI, leggermente meno restrittiva di quella considerata da v. KERÉKIÀRTÓ.

(*) Pervenuta in Redazione il 15 gennaio 1951.

(1) B. v. KERÉKIÀRTÓ: *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* [« Acta Lictterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae », tomo IV (1928), pagg. 86-102], § 1, n. 1, pagg. 87–89.

Veramente, v. KERÉKIÀRTÓ formula un teorema leggermente diverso da quello che riporto qui nel n. 1. Credo però che, volendo, anche il teorema effettivamente enunciato da v. KERÉKIÀRTÓ si possa dimostrare nell'indirizzo seguito in questa Nota.

(2) G. TREVISAN: *Punti uniti in trasformazioni del cerchio* [« Giornale di Matematiche » di BATTAGLINI, s. IV, vol. 79 (1949-50), pagg. 127-131], Teorema 2ª.

(3) Loc. cit. in (1), pag. 90.

(4) Vale a dire, τ è una trasformazione topologica di un piano in tutto se stesso, la quale conserva il senso delle rotazioni ed è priva di punti uniti

§ 1.

1. – Il teorema di Trevisan e quello di v. Kerékiártó. – L'ambiente è un piano (reale euclideo) π, nel quale si suppone fissato un verso positivo per le rotazioni. Questo verso positivo subordinerà allora un verso positivo su ogni curva semplice e chiusa di π.

Sia t una trasformazione topologica del cerchio G nell'insieme Γ; allora t muta il contorno g di G nel contorno γ di Γ. Esista un punto O interno sia a G che a Γ.

Se μ è un (eventuale) arco massimo di γ sotteso a g rispetto ad O (5), converremo di indicare con A e B gli estremi di μ, con I l'insieme $A + B$ e con ν il corrispondente arco massimo di g sutteso a γ rispetto ad O (6).

Il teorema di Trevisan afferma che:

Ferme queste convenzioni, la t ammette almeno un punto unito, contenuto nell'involucro di Jordan di G e Γ preso rispetto ad O, se ogni (eventuale) arco massimo μ, che non verifichi la

$$(\mu - A - B) \cdot t(\nu) = 0, \tag{1}$$

verifica per almeno un elemento X di I le

$$\left\{ \begin{array}{l} t(X) \cdot (\mu - A - B) \neq 0, \quad \alpha(X) - \alpha(X) \cdot t(\nu) \neq 0, \\ \qquad\qquad t(\nu) - \mu \cdot t(\nu) \neq 0, \end{array} \right. \tag{2}$$

dove $\alpha(X)$ è l'arco di μ di estremi X e $t(X)$ (7).

(5) Per la nomenclatura usata vedere G. Scorza Dragoni: *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [« Annali di Matematica pura ed applicata », serie 4ª, tomo XXV (1946), pagg. 43-65].

(6) Di guisa che A e B sono anche gli estremi di ν.

(7) Nell'enunciare il suo teorema, Trevisan parla di archi suttesi e sottesi, intendendo però che tali archi siano archi massimi.

Ed ecco ora il teorema di v. Kerékiàrtó:

La trasformazione topologica t del cerchio G nell'insieme Γ ammette almeno un punto unito se si presentano le seguenti circostanze: a) la trasformazione topologica t conserva il senso delle rotazioni; b) le curve g e γ hanno comune un arco non degenere φ; c) gli insiemi G e Γ giacciono dalla stessa banda di φ; d) su g esiste un arco s avente comuni con φ al più gli estremi e contenente tutti i punti di $(g - \varphi) \cdot (\gamma - \varphi)$; e) su γ esiste un arco σ avente comuni con φ al più gli estremi e contenente tutti i punti di $(g - \varphi) \cdot (\gamma - \varphi)$; f) l'immagine $t(s)$ di s e σ hanno comuni al più gli estremi; g) gli archi φ e $t(s)$ non separano l'uno dall'altro su γ gli archi σ e $t(\varphi)$.

Quest'ultima frase va intesa nel senso che esistono punti di φ che possono essere congiunti con punti di $t(s)$ mediante un arco di γ non avente alcun punto comune con σ e $t(\varphi)$.

2. - Deduzione del teorema di v. Kerékiártó dal teorema di Trevisan. - Nelle ipotesi di v. Kerékiàrtó, G e Γ hanno punti interni comuni e prossimi quanto si vuole ad un punto interno di φ arbitrariamente prefissato. Sia O un punto interno a G e Γ, tanto prossimo a punti interni a φ, che l'involucro di Jordan, j, di g e γ preso rispetto ad O contenga φ (8). E si ricordi che j è il contorno dell'involucro di Jordan, J, di G e Γ preso rispetto ad O.

Se G è contenuto in Γ (nel qual caso è $J = G$), l'esistenza di almeno un punto unito segue da un teorema di Brouwer (9). Analogamente se Γ è contenuto in G.

Tolti questi casi, esistono archi massimi di γ sottesi a g rispetto ad O.

Sia μ uno di questi. Allora μ ha soltanto gli estremi su j e ν ha soltanto gli estremi su γ. I punti interni di μ sono esterni

(8) Cfr. loc. cit. (5), pagg. 59 e 62.

(9) L. E. J. Brouwer: *Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* [«Matematische Annalen», vol. 71 (1912), pagg. 97–115], pag. 115.

a J e quelli interni a ν sono interni a Γ (10). Di qui segue che ν e φ hanno al più gli estremi comuni. E possono averne al più uno solo, perchè altrimenti sarebbe $j = \nu + \varphi = g$, e $G = J \subset \Gamma$, cosa già esclusa.

Se $\mu \cdot \varphi = 0$ (e quindi $\nu \cdot \varphi = 0$) gli archi ν e μ sono rispettivamente contenuti negli archi s e σ; quindi dalla condizione $f)$ si deduce immediatamente che è

$$(\mu - A - B) \cdot t(\nu) = 0$$

cioè che sussiste la (1).

Supponiamo ora che μ e φ abbiano un estremo comune, ad esempio A; detto C l'altro estremo di φ, non è essenzialmente restrittivo supporre che i punti C, A, B si succedano su γ nel verso assunto come positivo.

Conviene ora distinguere diversi casi.

1°) È: $t(A) \subset \mu$, $t(B) \subset \mu$ e $t(A)$ precede $t(B)$ se si percorre μ a partire da A.

In questo caso è certamente $t(A) \neq B$ e $t(B) \neq A$. Si può allora supporre che $t(A)$ e $t(B)$ siano entrambi interni a μ, perchè altrimenti la t ammetterebbe o A o B come punto unito.

Dico che $t(s)$ è contenuto in μ. Infatti B è un punto di $(g - \varphi) \cdot (\gamma - \varphi)$ e quindi di s e di σ, epperò il punto $t(B)$, interno a μ, è un punto di $t(s)$. Inoltre $t(s)$ non può contenere nell' interno nè B per la $f)$, nè $t(A)$ per la $d)$. Da ciò segue appunto quanto affermato.

Se poi è $t(C) = C$, la t ha un punto unito in C. Nel caso contrario, dico che $t(C)$ non può essere contenuto nel sottarco, δ, di γ di estremi C e $t(A)$, contenente A. Infatti, si supponga che $t(C)$ appartenga a δ; allora $t(C)$ è certamente interno a δ, e poichè t conserva il senso delle rotazioni, $t(\varphi)$ è l'arco di δ di estremi $t(C)$ e $t(A)$. E quindi φ e $t(s)$ separano, su γ, σ e $t(\varphi)$, contro la $g)$.

(10) Loc. cit. (5), n. 5.

Da quanto detto, segue allora, sempre perchè t conserva il senso delle rotazioni, che $t(\varphi)$ contiene φ. E quindi t ammette almeno un punto unito (in φ) [11].

2°) È: $t(A) \subset \mu$, $t(B) \subset \mu$ e $t(B)$ precede $t(A)$ se si percorre μ a partire da A.

In tal caso, poichè t conserva il senso delle rotazioni, $t(\nu)$ è l'arco di γ di estremi $t(A)$ e $t(B)$ contenente $(\gamma - \mu)$. Allora, se $t(A)$ è interno a μ, preso $X = A$, di guisa che $\alpha(X)$ è il sottarco di μ di estremi A e $t(A)$, si riconosce immediatamente che le (2) sono verificate. Se invece $t(A) = B$, mentre $t(B)$ è interno a μ, si procede analogamente assumendo $X = B$.

Se poi $t(A) = B$ e $t(B) = A$, è

$$(\mu - A - B) \cdot t(\nu) = 0$$

cioè è verificata la (1).

3°) È: $t(A) \subset \gamma - \mu$, $t(B) \subset \mu$.

Se $t(B) = B$, la t ha in B un punto unito. Escluso tale caso, $t(\nu)$ è allora l'arco di γ di estremi $t(A)$ e $t(B)$ non contenente B, e quindi se $t(B) = A$ è verificata la (1), mentre se $t(B)$ è interno a μ, preso $X = B$, sono verificate le (2).

4°) È: $t(A) \subset \mu$, $t(B) \subset \gamma - \mu$.

Se $t(A) = A$, la t ha in A un punto unito. Escluso tale caso, $t(\nu)$ è allora l'arco di γ di estremi $t(A)$ e $t(B)$ contenente B, e quindi se $t(A) = B$ è verificata la (1), mentre se $t(A)$ è interno a μ, preso $X = A$, sono verificate le (2).

5°) È: $t(A) \subset \gamma - \mu$, $t(B) \subset \gamma - \mu$ e $t(A)$ precede $t(B)$ se si percorre $\gamma - \mu$ a partire da B.

In tal caso, $t(\nu)$ è l'arco di $\gamma - \mu$ di estremi $t(A)$ e $t(B)$ e quindi

$$(\mu - A - B) \cdot t(\nu) = 0$$

cioè è verificata la (1).

(11) Loc. cit. (9).

6°) È: $t(A) \subset \gamma - \mu$, $t(B) \subset \gamma - \mu$ e $t(B)$ precede $t(A)$ se si percorre $\gamma - \mu$ a partire da B.

Un tale caso non si può presentare. Infatti $t(B)$, essendo un punto di $t(s)$, per la f) non può essere interno a σ, e perciò percorrendo γ nel verso positivo a partire da A fino a $t(A)$ si incontrano nell'ordine A, B, $t(B)$, $t(C)$ e $t(A)$, cioè si incontra σ, $t(s)$, e si percorre tutto $t(\varphi)$ mentre non si esaurisce φ; ma allora φ e $t(s)$ separano, su γ, σ e $t(\varphi)$.

§ 2.

3. - Un arco semplice λ, di estremi A e B, si dice un arco di traslazione, della traslazione piana generalizzata τ, se $B = \tau(A)$ e se λ e la sua immagine $\tau(\lambda)$ non hanno in comune punti che siano interni ad entrambi.

Teorema. - *Un arco di traslazione* λ *e le sue immagini* $\tau(\lambda)$, $\tau^2(\lambda)$..., $\tau^n(\lambda)$ $(n = 1, 2, ...)$ *formano un arco semplice.*

1°) Supponiamo che λ e $\tau(\lambda)$ non formino un arco semplice. Allora λ e $\tau(\lambda)$ possono avere in comune, al più, i punti A, $\tau(A)$ e $\tau^2(A)$. In ogni caso, o risulta

$$\lambda \cdot \tau(\lambda) \supset A + \tau(A)$$

oppure risulta

$$\lambda \cdot \tau(\lambda) \supset \tau(A) + \tau^2(A) .$$

Supponiamo che si verifichi quest'ultima ipotesi.

Consideriamo la curva semplice e chiusa g costituita dal sottarco di λ di estremi $\tau^2(A)$ e $\tau(A)$ e dall'arco $\tau(\lambda)$. L'immagine di g è la curva semplice e chiusa γ costituita dal sottarco di $\tau(\lambda)$ di estremi $\tau^3(A)$ e $\tau^2(A)$ e dall'arco $\tau^2(\lambda)$. Indichiamo con φ il sottarco di $\tau(\lambda)$ di estremi $\tau^3(A)$ e $\tau^2(A)$, con s il sottarco di λ di estremi $\tau^2(A)$ e $\tau(A)$ e con σ l'arco $\tau^2(\lambda)$.

Le due curve g e γ hanno in comune l'arco non degenere φ;

inoltre, quando un punto variabile P descrive g in modo da percorrere φ nel verso da $\tau^3(A)$ a $\tau^2(A)$, il punto immagine $\tau(P)$ descrive γ percorrendo φ nello stesso verso, e quindi. atteso che la trasformazione τ conserva il senso delle rotazioni, gli interni di g e γ giacciono dalla stessa banda di φ. Gli archi s e σ contengono entrambi tutti i punti comuni a $g - \varphi$ e $\gamma - \varphi$ (infatti $\gamma - \varphi$ è $\tau^2(\lambda)$ privato degli estremi e quindi $\gamma - \varphi$ non può contenere punti interni di $\tau(\lambda)$); l'immagine $\tau(s) = \varphi$ di s non ha punti comuni con σ eccettuati gli estremi ed infine gli archi φ e $\tau(s)$ non separano l'uno dall'altro, su γ, gli archi σ e $\tau(\varphi) \subset \sigma$.

Tutte le condizioni del teorema di v. Kerékjártó risultano così soddisfatte e quindi la trasformazione τ ha almeno un punto unito, contro l'ipotesi che τ sia una traslazione piana generalizzata. Dunque la $\lambda \cdot \tau(\lambda) \supset \tau(A) + \tau^2(A)$ è assurda.

Se poi si avesse

$$\lambda \cdot \tau(\lambda) \supset A + \tau(A)$$

basterebbe ripetere lo stesso ragionamento considerando, anzichè la trasformazione τ, la sua inversa τ^{-1}.

Abbiamo così provato che λ e la sua immagine $\tau(\lambda)$ formano un arco semplice.

2°) Poichè il teorema enunciato è vero per $n = 1$, possiamo supporre $n > 1$ e dimostrare che, se l'arco $\lambda + \tau(\lambda) + \ldots\ldots + \tau^{n-1}(\lambda)$ è un arco semplice, lo è pure, di conseguenza, l'arco $\lambda + \tau(\lambda) + \ldots\ldots + \tau^n(\lambda)$.

Supponiamo infatti che l'arco $\lambda + \tau(\lambda) + \ldots\ldots + \tau^n(\lambda)$ non sia un arco semplice. Poichè il teorema è vero per l'arco $\tau(\lambda) + \ldots\ldots + \tau^n(\lambda) = \tau(\lambda + \ldots\ldots + \tau^{n-1}(\lambda))$, segue che l'arco $\tau^n(\lambda)$ può incontrare soltanto l'arco λ.

Indichiamo con P il primo punto in cui l'arco $\tau^n(\lambda)$, percorso da $\tau^n(A)$ verso $\tau^{n+1}(A)$, incontra l'arco λ ed osserviamo che è certamente $P \neq \tau(A)$. L'immagine $\tau(P)$ di P appartiene all'arco $\tau(\lambda)$ ed è il primo punto d'intersezione dell'arco $\tau^{n+1}(\lambda)$ (percorso da $\tau^{n+1}(A)$ verso $\tau^{n+2}(A)$) con $\tau(\lambda)$.

Indichiamo con g la curva semplice e chiusa costituita dal sottarco di λ di estremi P e $\tau(A)$, dagli archi $\tau(\lambda)$, $\tau^2(\lambda)$, ..., $\tau^{n-1}(\lambda)$ e dal sottarco di $\tau^n(\lambda)$ di estremi $\tau^n(A)$ e P. L'immagine di g è la curva semplice e chiusa γ costituita dal sottarco di $\tau(\lambda)$ di estremi $\tau(P)$ e $\tau^2(A)$, dagli archi $\tau^2(\lambda)$, $\tau^3(\lambda)$, ..., $\tau^n(\lambda)$ e dal sottarco di $\tau^{n+1}(\lambda)$ di estremi $\tau^{n+1}(A)$ e $\tau(P)$.

Denotiamo poi con φ l'arco composto dal sottarco di $\tau(\lambda)$ di estremi $\tau(P)$ e $\tau^2(A)$, dagli archi $\tau^2(\lambda)$, ..., $\tau^{n-1}(\lambda)$ e dal sottarco di $\tau^n(\lambda)$ di estremi $\tau^n(A)$ e P, con s il sottarco di λ di estremi P e $\tau(A)$ e con σ l'arco composto dal sottarco di $\tau^n(\lambda)$ di estremi P e $\tau^{n+1}(A)$ e dal sottarco di $\tau^{n+1}(\lambda)$ di estremi $\tau^{n+1}(A)$ e $\tau(P)$.

Le due curve g e γ hanno in comune l'arco non degenere φ e col solito ragionamento si riconosce che i loro interni stanno da una stessa banda di φ.

Gli archi s e σ contengono entrambi tutti i punti comuni a $g - \varphi$ e $\gamma - \varphi$ (ricordiamo che $\tau(P)$ è il primo punto comune agli archi $\tau(\lambda)$ e $\tau^{n+1}(\lambda)$); l'immagine $\tau(s)$ $(\subset \varphi)$ di s non ha punti comuni con σ eccettuato l'estremo $\tau(P)$ e gli archi φ e $\tau(s)$ non separano su γ gli archi $\tau(\varphi)$ e $\sigma\,(\subset \tau(\varphi))$.

Perciò, in virtù del teorema di v. Kerékjártó, si conclude che l'arco $\lambda + \tau(\lambda) + \ldots\ldots + \tau^n(\lambda)$ dev'essere un arco semplice, perchè altrimenti la τ avrebbe punti uniti.