Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

G. Colombo

# Osservazioni ed aggiunte ad una nota precedente

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 20 (1951), p. 219-223

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__219_0>

# OSSERVAZIONI ED AGGIUNTE AD UNA NOTA PRECEDENTE

*Nota* (*) *di* G. Colombo (*a Padova*).

In una mia precedente Nota (1) allo scopo di studiare la stabilità dei moti merostatici di un giroscopio sollecitato da forze di potenza nulla, ho fatto alcune considerazioni preliminari nell' intento di generalizzare quanto il Levi-Civita dice a proposito del problema della stabilità dei moti stazionari di un giroscopio pesante (2). Qui riprendo le considerazioni ivi fatte poichè esse rientrano in altre di carattere più generale.

**1.** – Sia $S$ un sistema conservativo a vincoli indipendenti dal tempo, ad $N$ gradi di libertà e siano $q_1, q_2 \ldots q_n, p_1, p_2 \ldots p_k$ le coordinate lagrangiane del sistema.

Sia

$$T = \frac{1}{2} \sum_{(i,h)}{}_{1}^{n} a_{ih} \dot{q}_i \dot{q}_h + \sum_{i}{}_{1}^{n} \sum_{h}{}_{1}^{k} b_{ih} \dot{q}_i \dot{p}_h + \frac{1}{2} \sum_{(i,h)}{}_{1}^{k} c_{ih} \dot{p}_i \dot{p}_h \tag{1}$$

la forza viva del sistema, ove $a_{ih}, b_{ih}, c_{ih}$ sono funzioni delle sole $q$, ed $U(q_1 \ldots q_n)$ il potenziale da cui deriva la sollecitazione.

(*) Pervenuta in Redazione il 19 gennaio 1951.

(1) *Osservazioni sulla stabilità dei moti merostatici di un giroscopio ed applicazioni ad un caso notevole* (questo stesso volume p. 59-77).

(2) Cfr. Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi: *Lezioni di Meccanica razionale,* Zanichelli, Bologna, 1927 – Vol. II°, parte II^a^, p. 170.

Le $p$ sono coordinate cicliche [3] e si hanno in corrispondenza $K$ integrali dei momenti

$$(2) \qquad \sum_{i}^{k} c_{ih}\, \dot{p}_i + \sum_{i}^{n} b_{ih}\, \dot{q}_i = \beta_h$$

che, esplicitati rispetto alle $\dot{p}_i$, danno

$$(3) \qquad \dot{p}_r = \sum_{1\,s}^{k} C_{rs}\,(\beta_s - \sum_{1\,l}^{n} b_{ls}\, \dot{q}_l)\,.$$

L' integrale dell' energia diventa, in conseguenza,

$$(4) \qquad \frac{1}{2} \sum_{1\,ih}^{n} (a_{ih} - \sum_{1\,ls}^{k} C_{ls}\, b_{il}\, b_{hs})\, \dot{q}_i\, \dot{q}_h -$$

$$- \,(U - \frac{1}{2} \sum_{ls} C_{ls}\, \beta_l\, \beta_s) = h\,.$$

Posto $\beta_h = \beta_h^0$ $(h = 1, \ldots, k)$, il sistema ammette un moto merostatico in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$(5) \qquad \dot{q}_i\,(0) = 0\,, \quad q_i = q_i^0, \quad \dot{p}_h\,(0) = \dot{p}_h^0$$

ove le $q_i^0$ sono soluzioni del sistema

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial q_i} \left( U - \frac{1}{2} \sum_{ls} C_{ls}\, \beta_l^0\, \beta_s^0 \right) = 0$$

e le $p_h^0$ sono date da

$$(7) \qquad p_h^0 = \sum_s C_{hs}^0\, \beta_s^0\,. \qquad (C_{hs}^0 = C_{hs}\,(q_1^0, \ldots q_n^0))$$

[3] Cfr. E. T. Whittaker: *Analytical Dyramics* (4ª edizione) p. 193.

Si avranno quindi $\infty^k$ moti merostatici in corrispondenza alle $\infty^k$ scelte delle costanti dei momenti $\beta_h$.

In generale la stabilità incondizionata non sussiste come è facile vedere per esempio confrontando due soluzioni merostatiche infinitamente prossime (supposto che esistano). Interessa invece studiare la stabilità ridotta, relativa alle coordinate non ignorabili, la quale in generale assicura la stabilità *orbitale*.

Per quanto riguarda questo tipo di stabilità, si dimostra, con considerazioni perfettamente analoghe a quelle con le quali si prova il teorema di Dirichlet sulla stabilità dell'equilibrio, partendo cioè dall'integrale dell'energia ([1]), il seguente teorema (4):

*Se la funzione* $V = U - \frac{1}{2} \Sigma_{cs} C_{cs} \beta_c^0 \beta_s^0$ *ha un massimo effettivo nel punto* $q_1^0, \ldots, q_n^0$, *la soluzione merostatica corrispondente alle condizioni iniziali* (5) *è stabile rispetto alle* $q$.

Nel caso che sia $n = 1$ il teorema di Dirichlet si inverte come segue:

*Se la funzione*

$$V(q, \beta_1^0, \ldots, \beta_k^0) = U(q) - \frac{1}{2} \Sigma_{ls} C_{ls} \beta_l^0 \beta_s^0 \tag{8}$$

*è stazionaria in* $q_0$ *e se esiste un* $\delta > 0$ *tale che in uno (almeno) di due intervalli* $q_0 \leq q \leq q_0 + \delta$, $q_0 - V \leq q \leq q_0$ *è*

$$V(q, \beta^0, \ldots \beta_k^0) \geq V(q_0, \beta^0, \ldots \beta_k^0) \tag{9}$$

*allora la soluzione merostatica corrispondente alle condizioni iniziali*

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad p_l(0) = p_l^0 \tag{10}$$

*ove le* $p_l^0$ *sono date dalle* (6), *è instabile.*

([1]) Di questo teorema non ho trovato nessuna dimostrazione. Nel libro del Witthaker, citato in (3) è dimostrata la stabilità lineare (metodo di Weierstrass). Per brevità ci limitiamo ad accennare che l'unica complicazione, facilmente superabile, è rappresentata dalla presenza dei parametri $\beta_h^0$ variabili a seconda delle condizioni iniziali.

Per dimostrarlo basta osservare che se si suppone che sia soddisfatta la (9), per esempio nell'intorno destro di $q_0$, basta partire da condizioni iniziali

$$(11) \qquad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}^0, \quad \dot{p}_i(0) = \dot{p}_i^0$$

con $\dot{q}_i^0$ qualunque ma positivo. In questo moto la $q$ raggiungerà certamente $q_0 + \delta$ non potendo la $\dot{q}$ annullarsi per $q$ minore di tale valore.

**2.** - Nel caso considerato nel n. 2 della nota citata in (1), cioè nel caso di un giroscopio sottoposto a sollecitazioni tali che $\varphi$ e $\psi$ risultino coordinate cicliche, l'integrale dell'energia assume la forma

$$(12) \qquad \frac{1}{2} A \dot{\vartheta}^2 - V(\vartheta) = 0$$

ove in generale $V(\theta)$ ha la seguente espressione

$$V(\theta) = U(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{1}^{2}{}_{ls} C_{ls}(\theta) \beta_l^0 \beta_s^0 + h .$$

Introducendo la nuova coordinata $s = \cos\vartheta$ la (12) diventa:

$$(13) \qquad \dot{s}^2 = \frac{2(1-s^2)}{A} V^*(s) = \frac{2}{A}(1-s^2)\Big(U^*(s) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{1}^{2}{}_{ls} C_{ls}^*(s) \beta_l^0 \beta_s^0 + h \Big).$$

Denoteremo con $\Phi$ $(s, h, \beta_1, \beta_2)$ il secondo membro della (13) che coincide con la $\Phi$ $(s, h, a, b)$ introdotta nel n. 2 della nota citata.

In ogni punto $s_0$, in valore assoluto diverso da 1, nel quale si annulli la $\Phi(s)$ e le sue prime $r$ derivate, si annulla anche la $V^*(s)$ e le sue prime $r$ derivate e viceversa, e la prima derivata che non si annulla assume in $s_0$ valori dello stesso segno per le due funzioni. Inoltre poichè quello che succede in $s_0$ al riguardo dell'annullarsi o del segno della derivata di $V^*(s)$ succede in $\vartheta_0$ al riguardo di $V(\vartheta)$ e viceversa, si conclude che le considerazioni fatte più sopra per la $V(q)$ continuano a valere per la $\Phi(s)$.

Per quanto concerne i punti $+1$ ($-1$) si ha senz'altro che se $\Phi(s, h, \beta_1^0 \beta_2^0)$ è in $+1$ ($-1$) stazionaria la soluzione merostatica corrispondente è stabile o instabile a seconda che esiste un intorno sinistro di $+1$ (destro di $-1$) in cui è $\Phi(s) < 0$ (estremi esclusi), oppure $\Phi(s) \geq 0$ (estremi inclusi).