

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VIOLA

**Sul comportamento d'una porzione di superficie  
regolare, in prossimità del contorno**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 20 (1951), p. 1-23

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1951\\_\\_20\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUL COMPORTAMENTO D'UNA PORZIONE DI SUPERFICIE REGOLARE, IN PROSSIMITÀ DEL CONTORNO

*Memoria (\*) di TULLIO VIOLA (a Roma).*

## § I.

1. In una nota lineea del 1936 <sup>(1)</sup> pubblicata a seguito e a complemento d'una precedente del prof. R. CACCIOPPOLI <sup>(2)</sup>, il prof. G. SCORZA DRAGONI ha dato esempio d'una porzione  $\Sigma$  di superficie quadrabile  $z = f(x, y)$  che, nell'intorno d'un certo punto  $P$  del contorno  $\Gamma$ , presenta la seguente singolarità: qualunque arco di curva rettificabile descritto su  $\Sigma$ , non passante per  $P$  ed avente per estremi due punti  $P', P''$  appartenenti a  $\Gamma$  ma situati (nell'intorno di  $P$ ) da parti opposte di  $P$ , ha lunghezza maggiore d'un numero fisso  $c > 0$ . La costruzione della  $\Sigma$  può essere perfezionata nei dettagli in modo che, in ogni suo punto estraneo a  $\Gamma$ , la  $\Sigma$  stessa sia dotata di piano tangente variabile con continuità ed anzi d'elementi differenziali d'ordine prefissato ad arbitrio.

La detta singolarità non dipende affatto da andamento irregolare del contorno  $\Gamma$ : infatti, nell'esempio citato,  $\Gamma$  è rettilineo in tutto un intorno di  $P$ . Essa dipende invece da una specie d'increspatura della superficie, nell'intorno di  $P$ .

(\*) Pervenuta in Redazione il 24 maggio 1950.

<sup>(1)</sup> G. SCORZA DRAGONI: *A proposito di un teorema di Caccioppoli sulla rappresentazione conforme delle superficie* [Rendic. Lincei s. VI. vol. XXIII (1936), p. 557].

<sup>(2)</sup> R. CACCIOPPOLI: *Sulla rappresentazione conforme delle superfici* [Id., id., p. 287].

La nota del prof. SCORZA DRAGONI, oltre che per le questioni analitiche che la fecero sorgere, offre grande interesse, a mio parere, anche dal punto di vista puramente geometrico e cioè per un ordine di problemi molto simili a quelli dei quali, partendo da considerazioni generali sugli insiemi chiusi nel piano o nello spazio, mi sono occupato in alcune pubblicazioni recenti (3). Lo scopo di questa ricerca è appunto quello d'avvicinare i due ordini di problemi e i due metodi, e d'approfondire lo studio del prof. SCORZA DRAGONI sia localmente che in grande.

2. - Il dominio base  $\Omega$  della porzione  $\Sigma$ , cioè la proiezione ortogonale di  $\Sigma$  sul piano  $xy$ , è, nell'es. del prof. SCORZA DRAGONI, un semicerchio di diametro  $AB$ . Tale diametro fa parte del contorno, è cioè un arco di contorno, e il centro del semicerchio è il punto singolare  $P$  anzidetto (4). Se si considera una qualunque successione di curve rettificabili  $\gamma_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) descritte su  $\Sigma$ , unenti il punto  $A$  col punto  $B$  ma senza avere alcun altro punto in comune col segmento  $AB$ , e tendenti ad  $AB$  per  $n \rightarrow \infty$ , si riconosce facilmente che è

$$[1] \quad \lim'_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) \geq \overline{AB} + c.$$

Con  $L(\gamma_n)$  sono indicate le lunghezze delle curve  $\gamma_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

(3) T. VIOLA: I. *Un problema metrico relativo agli insiemi di punti, nel piano o nello spazio* [Bollettino UMI, 1950, p. 64]; II. *Su un problema metrico relativo alle superficie quadrabili* [Id., 1950, fasc. 2]; III. *Sul modo d'approssimare una curva rettificabile, descritta su una superficie quadrabile, mediante altre curve rettificabili* [Rivista di Matematica dell'Università di Parma, vol. I, fasc. 1 (1950), p. 45].

(4) Poichè (v. l'osservazione al secondo capoverso del n. 1) le questioni geometriche che andiamo studiando nulla hanno a che vedere con le irregolarità del contorno (considerato in se stesso), verrà nel seguito sempre tacitamente supposto (salvo avviso contrario) che il contorno sia una curva regolare o almeno che sia regolare l'arco  $AB$  di contorno considerato, nel senso di possedere, in ogni suo punto, elementi differenziali d'ordine elevato quanto si vuole.

Ai nn. 2-7 della mia nota (II) e ai nn. 2-4 della (III), ho costruito due diversi esempi di superficie  $\Sigma$  che godono precisamente della proprietà espressa dalla [1], quando un certo segmento  $AB$  tracciato su  $\Sigma$ , venga approssimato, da una banda o dall'altra, mediante una successione di curve rettificabili  $\gamma_n$  anch'esse tracciate su  $\Sigma$ , aventi per estremi  $A, B$ , ma non aventi altri punti in comune col segmento  $AB$  (5). Anche le mie due superficie sono quadrabili e regolari (nel senso sopra precisato) in tutti i punti estranei al segmento  $AB$ . Basta dunque tagliare una di queste superficie lungo il segmento  $AB$ , per ottenere due porzioni che soddisfano ciascuna alla [1].

Occorre però osservare che fra gli esempi miei e quello del prof. SCORZA DRAGONI, passa una differenza qualitativa essenziale. Nell'es. del prof. SCORZA DRAGONI, la [1] è conseguenza d'un'anomalia *di carattere locale*, non in grande, della superficie. Negli esempi miei, invece, la [1] esprime un'anomalia essenzialmente in *grande*, non di carattere locale (6). Precisamente, se  $A'B'$  è un segmento parziale di  $AB$  (del tutto qualunque, arbitrariamente piccolo) e se  $\{\gamma_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) è una successione di curve rettificabili, tracciate su  $\Sigma$ , aventi per estremi  $A', B'$  ma non altri punti in comune col segmento  $A'B'$ , se inoltre tale successione tende ad  $A'B'$  per  $n \rightarrow \infty$ , vale sempre, nei miei esempi, una relazione analoga alla [1]:

$$[2] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) \geq \overline{A'B'} + c' \quad (7).$$

Si presentano ora spontaneamente le domande: se esistano superficie quadrabili e regolari  $\Sigma$  che godano, lungo un certo arco  $AB$  del contorno, della proprietà

(5) Veramente le superficie da me costruite, non sono rappresentabili nella forma  $z = f(x, y)$ . Ma questa rappresentabilità non esprime alcuna condizione essenzialmente restrittiva, come risulterà evidente dagli esempi che si daranno nel seguito.

(6) Si può, infatti, con ragionamenti molto semplici, verificare che le mie superficie non godono della proprietà ottenuta dal prof. SCORZA DRAGONI, nell'intorno di nessun punto del segmento  $AB$ .

(7) È  $c' = k \cdot \overline{A'B'}$ , con  $k$  indipendente dalla scelta di  $A', B'$ .

$\alpha$ ) qualunque sia l'arco  $A'B'$  parziale di  $AB$  e qualunque sia la successione di curve  $\gamma'_n$  tracciate su  $\Sigma$  come sopra, risulta sempre verificata la relazione (più forte della [2])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma'_n) = \infty ;$$

e analogamente: se esistano superficie quadrabili e regolari  $\Sigma$  che godano, nell'intorno d'un certo punto  $P$  del contorno, della proprietà

$\beta$ ) qualunque sia la successione di curve  $\gamma_n$  tendenti (per  $n \rightarrow \infty$ ) a  $P$ , descritte su  $\Sigma$  e non aventi in comune col contorno di  $\Sigma$  che i propri estremi  $P', P''$  situati da parti opposte di  $P$ , risulta sempre verificata la relazione (più forte di quella ottenuta dal prof. SCORZA DRAGONI)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \infty .$$

## § II.

**3.** - Per rispondere affermativamente alle precedenti domande, diamo un primo esempio seguendo, in molti essenziali dettagli, il metodo ideato dal prof. SCORZA DRAGONI. Da esso dedurremo facilmente, più avanti, altri esempi.

Cominciamo col prefissare ad arbitrio un numero positivo  $l$ , poi (sufficientemente piccoli per quanto occorrerà nel seguito <sup>(8)</sup>) un  $\epsilon$  positivo e  $< 1$  e una successione, infinitesima e decrescente, di numeri  $\eta_1, \eta_2, \dots$ . Poniamo inoltre  $\delta = \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{2}}$ .

Consideriamo <sup>(9)</sup>, nel piano  $xy$ , il rettangolo  $\Omega$  di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, l + 2\eta_1)$ ,  $(1, l + 2\eta_1)$ . Se  $n, k$  sono due numeri naturali con  $k < 2^n$  e dispari, il segmento  $s_{n,k}$  di estremi

<sup>(3)</sup> Indicazioni precise, a questo proposito, verranno date a posteriori.

<sup>(9)</sup> Cfr. per questo n. 3, G. SCORZA DRAGONI loc. cit. n. 1.

$$P'_{n,k} \equiv \left( \frac{k}{2^n}, \eta_n \right), \quad P''_{n,k} \equiv \left( \frac{k}{2^n}, l\delta^{n-1} + \eta_n \right)$$

è sempre interno ad  $\Omega$ ; e un calcolo elementare mostra subito che la superficie  $\Sigma'$ , ottenuta da  $\Omega$  adattando su  $s_{n,k}$  un quadrato  $q_{n,k}$  normale al piano  $xy$  (e i cui punti, eccezione fatta per  $P'_{n,k}$ ,  $P''_{n,k}$  e per quelli dei lati di  $q_{n,k}$  diversi da  $s_{n,k}$ , son tutti da considerarsi come doppi per  $\Sigma'$ ), è quadrabile (10).

4 - Il contorno della superficie  $\Sigma'$  ora costruita, è quello del rettangolo  $\Omega$ . Una volta dimostrato (11) che  $\Sigma'$  gode (per una conveniente scelta dei numeri  $\varepsilon, \eta_1, \eta_2, \dots$ ) della proprietà  $\alpha$  (n. 2) relativamente al segmento d'estremi  $(0, 0), (1, 0)$  (considerato come arco  $AB$ ), allora sarà facile dedurre da  $\Sigma'$  un'altra superficie  $\Sigma$  avente lo stesso contorno di  $\Sigma'$ , che sia rappresentabile con un'equazione  $x = f(xy)$  e che, oltre a soddisfare alla detta proprietà  $\alpha$  e ad essere quadrabile, sia anche regolare nel senso precisato.

Basterà infatti associare ad ogni  $s_{n,k}$  due ellissi omofocali  $e_{n,k}, E_{n,k}$  interne ad  $\Omega$ , aventi i fuochi in  $s_{n,k}$ , tali che  $e_{n,k}$  sia interna ad  $E_{n,k}$  ed abbia gli estremi di  $s_{n,k}$  come vertici e che le  $E_{n,k}$  siano a due a due l'una esterna all'altra; e definire, com'è certamente possibile, una funzione  $f(x, y)$  continua in  $\Omega$  insieme con un certo numero di derivate parziali successive, nulla nei punti di  $\Omega$  esterni a tutte le  $E_{n,k}$ , uguali a  $l\delta^{n-1}$  nei punti delle  $e_{n,k}$  per cui  $n = n_0$ . Tale definizione potrà ovviamente esser precisata in modo che  $\Sigma$  abbia anch'essa area finita e che, ad ogni curva tracciata su di essa ed avente in comune col contorno soltanto i propri punti estremi  $A \equiv (0, 0), B \equiv (1, 0)$ , corrisponda sempre una curva tracciata su  $\Sigma'$ , la cui lunghezza non superi il doppio di quella della curva a cui essa è associata. Il problema sarà così completamente risolto.

(10) Si trova precisamente  $\alpha(\Sigma') = \frac{2l^2}{\varepsilon(2-\varepsilon)} + l + 2\eta_1$ .

(11) Cfr., per questo n. 4, G. SCORZA DRAGONI loc. cit. n. 2.

5. - Un qualunque segmento  $A'B'$  parziale di  $AB$  contiene, nel proprio interno, un altro segmento del tipo  $\left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+2}{2^n} \right]$ , con  $n$  sufficientemente elevato e  $k < 2^n - 1$  e dispari. Una qualunque curva tracciata su  $\Sigma'$  nell'intorno di  $A'B'$ , unente i punti  $A', B'$  senza possedere altri punti in comune col segmento  $A'B'$ , mantiene distanza positiva dal detto segmento  $\left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+2}{2^n} \right]$ . Ma, nell'intorno di questo,  $\Sigma'$  si comporta (dal punto di vista metrico) precisamente così come si comporta nell'intorno di  $AB$ , perciò è evidente che sarà sufficiente dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \infty,$$

per una qualunque successione, tendente ad  $AB$ , di curve  $\gamma_n$  descritte su  $\Sigma'$ , che colleghino due punti  $U, V$  del contorno di  $\Sigma'$ , senza possedere alcun punto (nè interno nè estremo) in comune con  $AB$  <sup>(12)</sup>.

Una generica curva  $\gamma$  siffatta, avendo distanza positiva dal segmento  $AB$ , incontra al più un numero finito di quadrati  $q_{n,k}$  <sup>(13)</sup>. Se  $c$  è un arco parziale di  $\gamma$ , interamente descritto su uno di tali quadrati e i cui estremi  $S, T$  appartengono al corrispondente lato  $s_{n,k}$ , si riconosce subito che la lunghezza  $L(c)$  è maggiore:

di  $\overline{ST}$ , se  $S$  e  $T$  sono situati da una stessa banda di  $q_{n,k}$ ;

di almeno una delle due somme  $\overline{SP'_{n,k}} + \overline{P'_{n,k}T}$ ,  $\overline{SP''_{n,k}} + \overline{P''_{n,k}T}$ , nell'ipotesi contraria.

Da ciò si deduce ch'è lecito supporre  $\gamma$  interamente situata nel piano  $xy$  (in quanto, nell'ipotesi contraria, essa a ciò può

(12) Si vuol dunque intendere che gli estremi di  $\gamma_n$  sono: l'uno  $U$  sul lato  $x=0$  di  $\Omega$ , l'altro  $V$  sul lato  $x=1$ , e che tali estremi tendono per  $\gamma_n \rightarrow AB$ , rispettivamente ad  $A$  e a  $B$ .

(13) Cfr. G. SCORZA DRAGONI, loc. cit. n. 3.

sempre esser ricondotta con effettiva diminuzione di lunghezza). E più precisamente, poichè  $\Sigma'$  è una superficie poliedrica i cui spigoli (a parte il contorno) sono tutti e soli i lati dei quadrati  $q_{n,k}$ , è lecito di più supporre che  $\gamma$  sia una poligonale semplice, con un numero finito di vertici. Inoltre è immediato che si può anche supporre che ogni retta  $x = \cos t$ , con  $0 \leq x \leq 1$ , abbia un sol punto in comune con  $\gamma$ .

Per rendere, il più possibile, semplici e intuitivi i ragionamenti che seguono, useremo la notazione  $\gamma \ll s_{n,k}$  a indicare che una generica poligonale  $\gamma$  (del tipo or ora descritto) lascia da bande opposte il segmento  $AB$  e un certo segmento  $s_{n,k}$ , useremo la notazione  $\gamma \gg s_{n,k}$  a indicare la proprietà contraria.

**6.** - Esaminiamo una generica poligonale  $\gamma$  e supponiamo che, per una certa coppia d'indici  $n, k$ , si abbia :

$$\gamma \ll s_{n,k} \quad , \quad \gamma \gg s_{n+1,2k-1} \quad , \quad \gamma \gg s_{n+1,2k+1} \quad .$$

Se si suppone scelto  $\epsilon < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$  e inoltre, per ogni  $n$ ,  $\eta_n \leq l \left( \delta - \frac{1}{2} \right) \delta^{n-1}$ , si riconosce subito che le ordinate dei due punti  $P''_{n+1,2k-1}$ ,  $P''_{n+1,2k+1}$  risultano superiori ad  $\frac{1}{2} l \delta^{n-1} + \eta_n$ : cioè tali punti sono situati, rispetto all'asse del segmento  $s_{n,k}$ , da banda opposta del segmento  $AB$ . Se dunque  $M$  ed  $N$  sono i punti in cui  $\gamma$  taglia rispettivamente le rette  $x = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$ ,  $x = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$  e se  $\gamma'$  è la poligonale che coincide con  $\gamma$  per, ogni  $x \leq \frac{2k-1}{2^{n+1}}$  e per ogni  $x \geq \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ , mentre per  $\frac{2k-1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{2k+1}{2^{n+1}}$  si riduce semplicemente alla coppia di segmenti  $MP''_{n,k}$ ,  $P''_{n,k}N$ , risulta evidentemente  $L(\gamma') < L(\gamma)$ . Inoltre è

$$\gamma' \gg s_{n,k} \quad , \quad \gamma' \gg s_{n+1,2k-1} \quad , \quad \gamma' \gg s_{n+1,2k+1} \quad .$$

7. - L'insieme  $C$  formato dagli infiniti segmenti  $s_{n,k}$  e dal segmento  $AB$ , è chiuso, anzi perfetto. Immaginiamo di partire da una generica poligonale  $\gamma$  di estremi  $U, V$  e di deformarla con continuità, tenendone fissi gli estremi e non attraversando mai segmenti  $s_{n,k}$ , immaginiamo cioè che, nel corso della deformazione, si mantenga sempre invariata ciascuna delle relazioni di posizione:  $\gamma \ll s_{n,k}$  oppure  $\gamma \gg s_{n,k}$  (nei riguardi di ciascun  $s_{n,k}$ ). Supponiamo che la deformazione di  $\gamma$  avvenga in modo da far tendere  $L(\gamma)$  al proprio estremo inferiore (14). Per quanto altrove ho osservato (15),  $\gamma$  dovrà allora tendere ad una posizione limite  $\bar{\gamma}$  unica (16) e ben determinata e dovrà risultare

$$\lim_{\gamma \rightarrow \bar{\gamma}} L(\gamma) = L(\bar{\gamma}).$$

In un primo momento sembrerebbe non potersi escludere nè che  $\bar{\gamma}$  non sia una poligonale del tipo indicato alla fine del n. 5, nè ch'essa abbia punti in comune con  $AB$ . Ma una facile discussione, basata su quanto ho osservato nel luogo or ora citato, chiarisce che ciò non può accadere, chiarisce cioè che  $\bar{\gamma}$  è ancora una poligonale del tipo indicato e che, per di più, i suoi vertici (a parte gli estremi  $U, V$ ) sono tutti punti  $P'_{n,k}$  o  $P''_{n,k}$ .

Supponiamo poi che i due punti  $U, V$  si spostino con continuità rispettivamente sui due lati  $x = 0, x = 1$ . Corrispondentemente anche la poligonale di minima lunghezza  $\bar{\gamma}$  (unica e ben determinata per ogni coppia di posizioni  $U, V$ , come or ora s'è affermato) varia con continuità. Si può dimostrare facilmente che la lunghezza  $L(\bar{\gamma})$  raggiunge effettivamente il proprio minimo assoluto, per una coppia, unica e ben determinata, di posizioni  $U_0, V_0$ , di  $U, V$ , essendo  $U_0 \neq A, V_0 \neq B$  (17).

(14) Estremo inferiore, s'intende, dell'insieme delle lunghezze  $L(\gamma)$  di tutto quelle particolari poligonali  $\gamma$  che soddisfano alle condizioni ora dette.

(15) Pubblicaz. (I) citata alla nota (3), n. 2.

(16) Ad evitare eccezioni, supponiamo a priori la limitazione  $\gamma \ll s_{1,1}$ .

(17) In altre parole:  $v$  è un'unica ben determinata poligonale  $\bar{\gamma}_0$ , tale che  $L(\bar{\gamma}_0)$  è minima nell'insieme delle lunghezze  $L(\gamma)$  di tutto le poligonali  $\gamma$  che soddisfano ad una successione prefissata di limitazioni  $\gamma \ll s_{n,k}$  oppure

**8.** - Per una generica poligonale  $\gamma$ , esisterà un *massimo indice*  $n'$  tale che  $\gamma \ll s_{n,k}$ , per ogni  $n \leq n'$  e per ogni  $k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1$  <sup>(19)</sup>, ed esisterà pure un *minimo indice*  $n''$  tale che  $\gamma \gg s_{n,k}$ , per ogni  $n \geq n''$  e per ogni  $k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1$  <sup>(20)</sup>. Consideriamo l'insieme  $I(n', n'')$  di tutte le poligonali  $\gamma'$  che soddisfano a questa stessa proprietà della  $\gamma$ , che sono cioè tali che

$$\left. \begin{array}{l} \gamma' \ll s_{n,k} \text{ per ogni } n \leq n' \\ \gamma' \gg s_{n,k} \text{ » » } n \geq n'' \end{array} \right\} \text{ e per ogni } k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1.$$

Quest'insieme contiene, unitamente alla  $\gamma$ , infinite poligonali: l'una e le altre possono distribuirsi in un numero *finito* di classi ben distinte, intendendo che appartengano ad una stessa classe tutte le poligonali  $\gamma'$  di  $I(n', n'')$  che soddisfano ad uno stesso gruppo di limitazioni  $\gamma' \ll s_{n,k}$  oppure  $\gamma' \gg s_{n,k}$  (per tutti i valori degli indici  $n, k$  tali che  $n' < n < n''$ ,  $k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1$ ) <sup>(21)</sup>. Sappiamo (n. 7) che ciascuna di queste classi

$\gamma \gg s_{n,k}$  <sup>(18)</sup> (intendendo con ciò, lo ripetiamo, che anche gli estremi  $U, V$  di  $\gamma$  siano arbitrari). — Per la dimostrazione, si consideri  $L(\bar{\gamma})$  come funzione di due variabili, cioè delle ordinate  $u, v$  di  $U, V$ , e si studi il modo di variare di  $L(\bar{\gamma})$ , supponendo costante (separatamente) l'una oppure l'altra delle due ordinate. Si trova, fra l'altro, che, se per es. si fissa  $v$ , allora  $L(\bar{\gamma})$  è (rispetto alla  $u$ ) decrescente per  $u$  sufficientemente piccolo, crescente per  $u$  sufficientemente grande. Le curve  $\gamma_n$  che verranno descritte al n. 10, non saranno che particolarissime  $\bar{\gamma}_0$ .

<sup>(18)</sup> Una tale successione può esser prefissata del tutto ad arbitrio, purchè venga rispettata l'unica condizione: che non sia  $\gamma \ll s_{n,k}$  per infiniti segmenti  $s_{n,k}$ .

<sup>(19)</sup> Cfr. nota <sup>(16)</sup>. Si può osservare che, per una successione di poligonali  $\gamma$  che tenda ad  $AB$ , necessariamente  $n'$  tende ad  $\infty$ .

<sup>(20)</sup> L'esistenza di quest'indice  $n''$  è assicurata dal fatto che  $\gamma$  ha distanza positiva da  $AB$  (cfr. nota <sup>(18)</sup>).

<sup>(21)</sup> Il numero di tali classi è  $2^{2^{n''-1}} - 2^{n'}$ , cioè uguale al numero delle disposizioni, con ripetizione, di due oggetti (i due segni  $\ll, \gg$ ) a  $2^{n''-1} - 2^{n'}$  a  $2^{n''-1} - 2^{n'}$ . Per individuare una di queste classi, basta scegliere a piacere l'una o l'altra delle due limitazioni, in corrispondenza di ogni possibile coppia d'indici  $n, k$ .

possiede un (unico) elemento  $\bar{\gamma}_0$  che rende minima la lunghezza  $L(\gamma')$  nella classe stessa. Ne segue che anche l'insieme  $I(n', n'')$  possiede un elemento che rende minima  $L(\gamma')$  nell'insieme stesso <sup>(22)</sup>. Proponiamoci la ricerca del minimo valore  $L(\gamma')$  in  $I(n', n'')$ , proponiamoci cioè, fra tutte le  $\bar{\gamma}_0$  relative alle classi anzidette, d'individuare una che sia di minima lunghezza.

Orbene, in quanto esposto nei nn. precedenti e particolarmente al n. 6, abbiamo il mezzo per dimostrare molto facilmente la proposizione: *esiste in  $I(n', n'')$  un'unica poligonale  $\bar{\gamma}_0$  di minima lunghezza, ed essa è caratterizzata dalle limitazioni*:

$$\bar{\gamma}_0 \gg s_{n,k} \text{ per ogni } n > n' \text{ e per ogni } k = 1, 3, 5, \dots, 2^n - 1.$$

Infatti, ragionando per assurdo, supponiamo che  $\bar{\gamma}_0$  sia una poligonale di  $I(n', n'')$ , avente lunghezza minima in  $I(n', n'')$ , e supponiamo che, per un certo indice  $n > n'$  e per un certo  $k$  (dispari e  $< 2^n$ ), risulti  $\bar{\gamma}_0 \ll s_{n,k}$ . Se fosse  $\bar{\gamma} \gg s_{n+1, 2k-1}$  e  $\bar{\gamma} \gg s_{n+1, 2k+1}$ , sarebbe possibile modificare la  $\bar{\gamma}$  in modo da ottenere <sup>(23)</sup> un'altra poligonale  $\gamma'$ , anch'essa appartenente a  $I(n', n'')$  e tale che  $L(\gamma') < L(\bar{\gamma}_0)$ . Dunque deve verificarsi almeno una delle limitazioni:

$$\bar{\gamma}_0 \ll s_{n+1, 2k-1} \quad , \quad \bar{\gamma}_0 \ll s_{n+1, 2k+1} \quad .$$

Supponiamo per es. che sia verificata la prima. Ripetendo il ragionamento, riconosciamo che deve verificarsi anche almeno una delle limitazioni:

$$\bar{\gamma}_0 \ll s_{n+2, 4k-3} \quad , \quad \bar{\gamma}_0 \ll s_{n+2, 4k-1} \quad .$$

<sup>(22)</sup> Questa proprietà può facilmente dedursi anche per altra via, in virtù di teoremi classici.

<sup>(23)</sup>  $\gamma'$  sarebbe (n. 6) una poligonale coincidente con  $\bar{\gamma}_0$ . in corrispondenza d'ogni  $x \leq \frac{2k-1}{2^{n+1}}$  e d'ogni  $x \geq \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ , mentre verificherebbe la limitazione  $\gamma' \gg s_{n,k}$ . — Per ragionare in piena generalità, si suppone che sia  $n < n'' - 1$ : da quanto segue, si riconosce però subito che non costituisce eccezione essenziale, il caso  $n = n'' - 1$ .

Così proseguiamo aumentando ordinatamente il primo indice, passando cioè ad  $n + 3$ , ad  $n + 4$ , ecc. Infine giungeremo a individuare un certo ben determinato segmento  $s_{n',-1,k^*}$  <sup>(24)</sup> tale che  $\bar{\gamma}_0 \ll s_{n',-1,k^*}$ . Ma, per le ipotesi fatte, è  $\bar{\gamma}_0 \gg s_{n',2k^*-1}$ ,  $\bar{\gamma}_0 \gg s_{n',2k^*+1}$ . Dunque (n. 6) possiamo veramente costruire una  $\gamma'$ , a partire da  $\bar{\gamma}_0$ , anch'essa appartenente a  $I(n', n')$  e tale che  $L(\gamma') < L(\bar{\gamma}_0)$ . Ma ciò è assurdo, dunque è vera la tesi enunciata.

**9.** - Per un generico valore dell'indice  $n = 1, 2, \dots$ , poniamo  $n' = n$  e diamo ad  $n''$  successivamente i valori  $n + 1, n + 2, \dots$ . Otteniamo una successione infinita d'insiemi

$$I(n, n + 1) < I(n, n + 2) < \dots,$$

definiti come al n. preced. In ciascuno di tali insiemi, la poligonale che rende minima la lunghezza  $L(\gamma)$  è sempre la stessa: essa perciò è anche quella (unica) che rende minima detta lunghezza, nell'insieme somma

$$\sum_{p=1}^{\infty} I(n, n + p).$$

Tale poligonale di minimo potrà dunque indicarsi, senza possibilità d'equivoco, col simbolo  $\gamma_n$ . Essa è individuata dalle infinite limitazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_n \ll s_{\mu,k} \text{ per ogni } \mu \leq n & \quad \text{e per ogni } k = 1, 3, 5, \dots, 2^\mu - 1, \\ \gamma_n \gg s_{\nu,k} \text{ » » } \nu \geq n + 1 & \quad \text{» » » } k = 1, 3, 5, \dots, 2^\nu - 1. \end{aligned}$$

La dimostrazione della tesi enunciata (cioè della proprietà  $\alpha$  del n. 2) sarà completa, quando avremo fatto vedere che

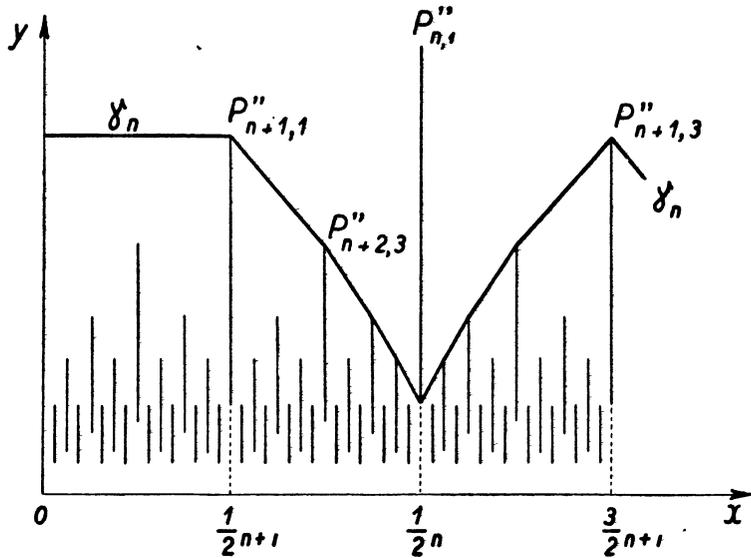
$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \infty.$$

<sup>(24)</sup>  $k^*$  è un certo indice dispari e tale che

$$2^{n'-n-1}(k-1) + 1 \leq k^* \leq 2^{n'-n-1}(k+1) - 1$$

Ciò verrà ottenuto in virtù d'un' ulteriore conveniente precisazione nella scelta della successione infinitesima  $\eta_1, \eta_2, \dots$ . Ma, per chiarire completamente la questione, è utile trattenerci a descrivere dettagliatamente la generica poligonale  $\gamma_n$  <sup>(25)</sup>.

10. - Per  $0 \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ , l'ordinata di  $\gamma_n$  è costante ed uguale ad  $l\delta^n + \eta_{n+1}$ . Per proseguire la costruzione di  $\gamma_n$  a destra del punto  $P''_{n+1,1}$ , consideriamo una semiretta  $\vec{r}$  uscente dal punto  $P''_{n+1,1}$  e ruotante in senso negativo (orario) nel semipiano  $x \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ , a partire dalla posizione parallela e ugualmente orientata all'asse  $x$ . Tale semiretta taglia, come sappiamo (n. 6),



il segmento  $s_{n,1}$  e, se  $\eta_n$  è abbastanza piccolo, lo continuerà a tagliare, finchè a un certo punto verrà a passare per  $P''_{n+2,3}$  (v. fig.). A questo punto facciamo scorrere  $\vec{r}$  su se stessa, in modo da portarne l'origine in  $P''_{n+2,3}$  e continuiamo poi nella rotazione. Se

<sup>(25)</sup> Si lasciano al lettore le facili considerazioni di geometria elementare, che giustificano la descrizione stessa.

$\eta_n$  è abbastanza piccolo, il ragionamento potrà ripetersi, si potrà cioè portare l'origine di  $\vec{r}$  in  $P''_{n+3,7}$ , dopo aver fatto nuovamente scorrere la  $\vec{r}$  su se stessa. Così potrà proseguirsi, facendo descrivere successivamente all'origine di  $\vec{r}$  un certo numero di lati di  $\gamma_n$ , numero tanto maggiore quanto minore è  $\eta_n$ . L'ultimo di tali lati ha, per secondo estremo, il punto  $P'_{n,1}$ . S'è costruito così l'arco  $P''_{n+1,1} P'_{n,1}$  parziale di  $\gamma_n$ , corrispondente ai valori di  $x$  tali che  $\frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}$ . Per la sua lunghezza, risulta

$$L(P''_{n+1,1} P'_{n,1}) > l \delta^n - (\eta_n - \eta_{n+1}) .$$

Per  $\frac{1}{2^n} \leq x \leq \frac{3}{2^{n+1}}$ , si ha un arco  $P'_{n,1} P''_{n+1,3}$  simmetrico dell'arco  $P''_{n+1,1} P'_{n,1}$  rispetto alla retta  $x = \frac{1}{2^n}$ . A partire da  $P''_{n+1,3}$  si prosegue la costruzione con metodo perfettamente analogo a quello già descritto a partire da  $P''_{n+1,1}$  ecc.

È da osservare che, almeno per valori sufficientemente elevati di  $n$ , la poligonale  $\gamma_n$  dovrà necessariamente passare anche per certi punti  $P''_{n+1,k}$  tali che la semiretta  $\vec{r}$  uscente da  $P''_{n+1,k}$  con l'orientamento dell'asse  $x$ , raggiunga  $P''_{n+1,k+2}$  senza incontrare alcun segmento  $s_{\mu,k}$  con  $\mu \leq n$ . Naturalmente, in questi casi, i segmenti  $P''_{n+1,k} P''_{n+1,k+2}$  saranno, essi stessi, lati di  $\gamma_n$  <sup>(26)</sup>.

Per ottenere infine una conveniente limitazione della lunghezza della poligonale  $\gamma_n$ , basta limitare separatamente i singoli archi di  $\gamma_n$ , compresi fra  $P''_{n+1,1}$  e  $P''_{n+1,2^{n+1}-1}$ .

(26) La limitazione

$$L(P''_{n+1,k} P''_{n+1,k+2}) > 2[l \delta^n - (\eta_\mu - \eta_{n+1})]$$

( $\mu$  conveniente  $< n$ ) che verrà corrispondentemente scritta nel gruppo ordinato di limitazioni [3], avrà il secondo membro ovviamente negativo (non s'esclude che ciò possa già accadere per a seconda, per la quarta ecc. delle dette limitazioni).

Si trova successivamente:

$$[3] \left\{ \begin{array}{l} L(P''_{n+1,1} P''_{n+1,3}) > 2[l\delta^n - (\eta_n - \eta_{n+1})] > 2(l\delta^n - \eta_n), \\ L(P''_{n+1,3} P''_{n+1,5}) > 2[l\delta^n - (\eta_{n-1} - \eta_{n+1})] > 2(l\delta^n - \eta_{n-1}), \\ L(P''_{n+1,5} P''_{n+1,7}) > 2[l\delta^n - (\eta_n - \eta_{n+1})] > 2(l\delta^n - \eta_n), \\ L(P''_{n+1,7} P''_{n+1,9}) > 2[l\delta^n - (\eta_{n-2} - \eta_{n+1})] > 2(l\delta^n - \eta_{n-2}), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ L(P''_{n+1,2} P''_{n+1,3} P''_{n+1,4} P''_{n+1,5} P''_{n+1,6} P''_{n+1,7} P''_{n+1,8} P''_{n+1,9}) > 2[l\delta^n - (\eta_n - \eta_{n+1})] > 2(l\delta^n - \eta_n). \end{array} \right.$$

Dunque

$$[4] \quad L(\gamma_n) > 2[(2^n - 1)l\delta^n - (\eta_1 + 2\eta_2 + 4\eta_3 + \dots + 2^{n-1}\eta_n)].$$

Supponiamo che i numeri  $\eta_1, \eta_2, \dots$  siano stati scelti in modo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\eta_n$  risulti convergente. Allora osservando che  $2\delta = (1 - \epsilon)\sqrt{2} > 1$ , s' ottiene appunto <sup>(27)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \infty, \quad \text{c. d. d.}$$

Riassumiamo, per agevolare una revisione dei calcoli fatti, le limitazioni imposte agli elementi arbitrari occorrenti a precisare la costruzione della superficie  $\Sigma'$ :

$$\epsilon < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta_n \leq l\left(\delta - \frac{1}{2}\right)\delta^{n-1} \quad \text{con} \quad \delta = \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{2}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\eta_n \text{ convergente.} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

<sup>(27)</sup> Non s' esclude che, per piccoli valori di  $n$ , il secondo membro della [4] possa esser negativo o nullo (cfr. la nota preced.), ma ciò non accadrà più per  $n$  sufficientemente elevato (appunto in virtù della supposta convergenza della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\eta_n$ ).

11. — Per il seguito è utile osservare che la superficie  $\Sigma'$ , costruita e analizzata nei nn. preced., gode più precisamente della seguente proprietà: *qualunque sia il segmento  $A'B'$  parziale di  $AB$  e qualunque sia la successione di curve  $\gamma'_n$  tracciate su  $\Sigma'$ , rettificabili, aventi per estremi  $A', B'$  ma non altri punti in comune col segmento  $A'B'$ , tendenti ad  $A'B'$  per  $n \rightarrow \infty$ , anche le lunghezze delle proiezioni  $\bar{\gamma}'_n$  di tali curve sul piano  $yz$ , tendono all'infinito al divergere di  $n$ .*

Sarà, anche qui, sufficiente dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\bar{\gamma}'_n) = \infty,$$

per le proiezioni  $\bar{\gamma}'_n$  (sul piano  $yz$ ) d'una successione di curve  $\gamma'_n$  definite come al principio del n. 5. Se

$$x = x_n(t), \quad y = y_n(t), \quad z = z_n(t)$$

sono le equazioni parametriche di  $\gamma'_n$  (riferite, per intenderci, sempre allo stesso intervallo base  $[0,1]$  dell'asse  $t$ ), si ha

$$L(\gamma'_n) = \int_0^1 \sqrt{x'_n(t)^2 + y'_n(t)^2 + z'_n(t)^2} dt,$$

$$L(\bar{\gamma}'_n) = \int_0^1 \sqrt{y'_n(t)^2 + z'_n(t)^2} dt \quad (2^8).$$

Consideriamo ora nuovamente la generica curva  $\gamma$  di cui al n. 5. Se  $t_0$  e  $\bar{t}$  sono i valori del parametro  $t$ , cui corrispondono rispettivamente gli estremi  $S, T$  dell'arco (parziale di  $\gamma$ ) ivi indicato con  $c$ , si ha ovviamente

$$\int_{t_0}^{\bar{t}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_{t_0}^{\bar{t}} \sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

(2<sup>8</sup>) Non v'è restrizione essenziale nel supporre l'assoluta continuità delle funzioni  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$ , nè per una speciale superficie poliedrica qual'è la  $\Sigma'$  qui considerata, nè per una qualunque superficie regolare.

Se dunque si trasforma  $\gamma$  in una curva interamente situata nel piano  $x = 0$ , sostituendo ogni arco parziale  $c$  col corrispondente segmento  $ST$  o con una delle coppie di segmenti  $SP'_{n,k} + P'_{n,k}T$ ,  $SP''_{n,k} + P''_{n,k}T$  (secondo quanto è indicato al n. 5), la lunghezza  $L(\bar{\gamma})$  decresce o almeno non cresce (29). Dopo eseguita tale trasformazione, si ha intanto:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2} dt, \quad L(\bar{\gamma}) = \int_0^1 |y'| dt.$$

Si riconosce immediatamente che anche le altre successive trasformazioni, fatte subire alla  $\gamma$  com'è indicato al n. 5. — cioè: riduzione di  $\gamma$  a poligonale (sostituendo successivi archi parziali di  $\gamma$ , con le corrispondenti corde) ed eliminazione di eventuali porzioni poligonali di  $\gamma$ , incontrate in più d'un punto da rette parallele all'asse  $y$  — non possono aver per effetto di far aumentare l'integrale  $\int_0^1 |y'| dt$  e cioè la lunghezza  $L(\bar{\gamma})$ . Se dunque si suppone d'aver sottoposta ciascuna delle curve  $\gamma_n$  della successione considerata, a tutte le trasformazioni (qui indicate) che pur si rendessero necessarie, s'otterrà sempre infine

$$L(\gamma_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2} dx \leq 1 + \int_0^1 \left|\frac{dy_n}{dx}\right| dx = 1 + L(\bar{\gamma}_n)$$

e perciò, essendosi già dimostrato che  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \infty$ , risulterà anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\bar{\gamma}_n) = \infty, \quad \text{c. d. d.}$$

È poi evidente che la costruzione della superficie  $\Sigma$  a partire dalla  $\Sigma'$  (come accennato al n. 4), potrà sempre venir precisata in modo da conservare la proprietà ora dimostrata.

(29) Con  $\bar{\gamma}$  è indicata la proiezione di  $\gamma$  sul piano  $yz$ .

## § III.

**12.** — La particolare superficie  $\Sigma'$  costruita e studiata ai nn. preced. (o, ciò ch'è lo stesso, la superficie  $\Sigma$  dedotta dalla  $\Sigma'$ , v. n. 4), non gode localmente, in nessun punto del segmento di contorno  $AB$ , della proprietà di cui nella nota citata del prof. SCORZA DRAGONI.

Infatti sia  $P \equiv (x, \theta)$  un punto qualunque interno al segmento  $AB$ . Esiste certamente un numero naturale  $\nu = \nu(P)$  tale che, per ogni  $n > \nu$ ,  $P$  è interno a un ben determinato intervallo del tipo  $\left(\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n + 2}{2^n}\right)$  (con  $k_n$  intero positivo dispari e  $< 2^n - 1$ ) (30). La poligonale  $\lambda_n$  formata dall'arco  $P''_{n,k_n} P''_{n,k_n+2}$  di  $\gamma_{n-1}$  (n. 10) e dai due segmenti di perpendicolari abbassati, su  $AB$ , rispettivamente da  $P''_{n,k_n}$  e da  $P''_{n,k_n+2}$ , ha lunghezza

$$L(\lambda_n) < 2l(\delta^{n-1} + \delta^{n-2}) + 2\eta_n + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Tale poligonale, interamente descritta su  $\Sigma'$ , tende, per  $n \rightarrow \infty$ , al punto  $P$ , mentre la sua lunghezza tende a zero, c. d. d.

(30) Se  $x = \frac{k}{2^{n_0}}$  per una certa coppia di interi positivi  $n_0, k$  (dispari e  $< 2^{n_0}$ ), si potrà assumere  $\nu = n_0$  e s'avrà allora

$$k_{\nu+1} = 2k - 1, k_{\nu+2} = 4k - 1, k_{\nu+3} = 8k - 1, \dots, k_{\nu+p} = 2^p k - 1, \dots$$

Nell'ipotesi contraria, si potrà assumere per  $\nu$  il più piccolo numero naturale tale che  $\frac{1}{2^{\nu+1}} < x < 1 - \frac{1}{2^{\nu+1}}$  e risulterà  $k_{\nu+1} = 1$  oppure  $k_{\nu+1} = 2^{\nu+1} - 3$ , indi:

$$2k_{\nu+1} - 1 \leq k_{\nu+2} \leq 2k_{\nu+1} + 3,$$

$$4k_{\nu+1} - 1 \leq k_{\nu+3} \leq 4k_{\nu+1} + 7,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$2^{p-1}k_{\nu+1} - 1 \leq k_{\nu+p} \leq 2^{p-1}k_{\nu+1} + 2^p - 1,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

Analogamente si ragiona, se si sceglie  $P$  coincidente con  $A$  o con  $B$ . Occorre dunque affrontare la risoluzione del problema  $\beta$  del n. 2, ciò che faremo per via indiretta e molto semplicemente, valendoci del seguente metodo generale.

**13.** - Sia  $z = f(x, y)$  l'equazione d'una superficie  $\Sigma^0$  definita al variare del punto  $(x, y)$  nel rettangolo

$$[0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq L]$$

del piano cartesiano  $xy$ , e sia  $z = f(\rho, \vartheta)$  l'equazione della superficie corrispondente  $\Sigma$ , definita al variare del punto  $(\rho, \vartheta)$  nel semicerchio

$$[0 \leq \rho \leq L, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi]$$

del piano polare  $\rho\vartheta$ , in virtù della trasformazione di coordinate

$$[5] \quad \rho = y, \quad \vartheta = \pi x.$$

Supponiamo inoltre:

1°) che  $\Sigma^0$  sia regolare (n. 1) e quadrabile, donde segue visibilmente che anche  $\Sigma$  è regolare e quadrabile <sup>(31)</sup>;

2°) che il contorno di  $\Sigma^0$  contenga il segmento

$$AB \equiv [0 \leq x \leq 1, \quad y = 0, \quad z = 0],$$

donde segue che il contorno di  $\Sigma$  passa per il polo  $P$  del piano  $\rho\vartheta$ ;

3°) che, qualunque sia la successione di curve  $\gamma_n^0$ , semplici, regolari, descritte su  $\Sigma^0$  e tendenti (per  $n \rightarrow \infty$ ) al segmento  $AB$  senza mai aver punti in comune con  $AB$ , si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n^0) = \infty$$

(proprietà  $\alpha$  del n. 2), anzi si abbia più precisamente (n. 11)

(31) La continuità del contorno in  $P$  (oltre alla regolarità dello stesso contorno fuori di  $P$ ) è tuttavia assicurata dall'ipotesi seguente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\bar{\gamma}_n^0) = \infty ,$$

ove le  $\bar{\gamma}_n^0$  sono le proiezioni ortogonali delle  $\gamma_n^0$  sul piano  $yx$ .

Sotto queste condizioni, si riconosce subito che *la superficie  $\Sigma$  soddisfa alla proprietà  $\beta$  del n. 2.* Infatti, se si considera una qualunque successione di curve  $\gamma_n$  del tipo indicato nell'enunciato  $\beta$  del n. 2, e se ciascuna di tali curve si rappresenta parametricamente per il tramite della  $\gamma_n^0$  corrispondente (su  $\Sigma^0$ , in virtù della trasformazione [5]), si trova :

$$L(\gamma_n) = \int_0^1 \sqrt{y_n'^2 + \pi^2 y_n^2 x_n'^2 + z_n'^2} dt \geq \int_0^1 \sqrt{y_n'^2 + z_n'^2} dt = L(\bar{\gamma}_n^0) .$$

La risoluzione del problema  $\alpha$  del n. 2, ottenuta con la particolare superficie descritta ai nn. 3-11, conduce dunque all'immediata soluzione anche del problema  $\beta$ .

**14.** - Val la pena d'osservare che il metodo generale indicato al n. preced., può esser ovviamente perfezionato, in modo da ottenere superficie  $\Sigma$  che godono della proprietà  $\beta$  nell'intorno d'un punto  $P$  del contorno, anche nell'ipotesi che  $P$  sia punto angoloso del contorno stesso, comunque piccolo sia l'angolo formato dalle due semirette, uscenti da  $P$  e tangenti al contorno rispettivamente dall'una e dall'altra parte di  $P$  <sup>(32)</sup>. Anzi si può addirittura supporre che  $P$  sia un punto cuspidale del contorno, i due archi del contorno (uscenti da  $P$ ) avendo contatto d'ordine elevato sia pure quanto si vuole <sup>(33)</sup>. Questo risultato diviene fa-

(32) Basta trasformare la superficie  $\Sigma^0$ , mediante la formula

$$\rho \quad y, \quad \vartheta = kx$$

( $k$  costante positiva piccola ad arbitrio), in luogo delle [5].

(33) Se  $x = \varphi(y)$  è l'equazione cartesiana della cuspidale, avente per tangente cuspidale il semiasse positivo delle  $y$ , basta sostituire le [5] con la trasformazione :

$$u = y, \quad v = x\varphi(y),$$

che fa passare dal piano cartesiano  $xy$  al piano cartesiano  $uv$ .

ilmente comprensibile quando si rifletta alla circostanza che la proprietà espressa dalla formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \infty ,$$

cui deve necessariamente soddisfare una successione di curve  $\gamma_n$ , unenti (sulla superficie  $\Sigma$ ) un punto d'un ramo a un punto dell'altro ramo della cuspide e tendenti per ( $n \rightarrow \infty$ ) al vertice  $P$  della cuspide stessa, dipende da una speciale increspatura o ondulazione della superficie, *in senso longitudinale alla cuspide*. Infatti è facile accertarsi che la proprietà esposta è compatibile con quella che potrebbe chiamarsi l'«accessibilità del vertice  $P$  dall'interno della cuspide»: con la possibilità di costruire un arco di curva rettificabile  $\gamma_0$ , interamente descritto su  $\Sigma$  ed avente un unico punto sul contorno di  $\Sigma$ , cioè uno dei propri estremi coincidente col vertice  $P$  (34).

(34) La porzione  $\Sigma$  di superficie cilindrica  $z = y \operatorname{sen} \frac{1}{y}$ , la cui proiezione sul piano  $xy$  è (la regione interna al) la cuspide  $x(x - y^2) = 0$  ( $y \geq 0$ ), offre un semplice esempio in cui viene a mancare l'indicata accessibilità del vertice (pur mantenendosi la quadrabilità di  $\Sigma$ ). La porzione di superficie di rotazione  $x - \rho \operatorname{sen} \frac{1}{\rho}$  ( $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ , con  $\alpha$  costante positiva arbitraria  $< 2\pi$ ) offre un analogo esempio in cui la proiezione non è più una cuspide, ma un angolo. Ma in tali esempi viene evidentemente a mancare la proprietà  $\beta$  del n. 2 (35).

Si riconosce, invece, che ogni punto del segmento di contorno  $AB$ , nell'es. dei nn. 3-11, è accessibile su  $\Sigma$ : applicando dunque a quell'esempio una delle trasformazioni dei nn. 13, 14, s'otterranno altre superficie per le quali, pur verificandosi la proprietà  $\beta$  del n. 2, si conserverà l'accessibilità del punto  $P$  sulla superficie (e cioè entro l'angolo o entro la cuspide, come s'è detto) ecc. Si può aggiungere che non sarebbe possibile dare esempi di superficie regolari, tali che tutti i punti d'un arco regolare di contorno siano inaccessibili sulla superficie, poichè (come subito si riconosce) una tale proprietà non sarebbe compatibile con la quadrabilità della superficie.

(35) Ai due esempi qui citati, si può muovere l'obiezione che viene a perdersi la regolarità dei due rami del contorno di  $\Sigma$  uscenti dal vertice (in-

15. — È lecito domandarsi ora se e come sarebbe possibile costruire una superficie  $\Sigma$  che, pur conservando la quadrabilità e la regolarità, presentasse non solo la singolarità  $\alpha$  (n. 2) lungo tutto un arco regolare  $AB$  del contorno, ma simultaneamente anche la singolarità  $\beta$  in ogni singolo punto dello stesso arco  $AB$ . La ricerca d'una siffatta costruzione (se pur questa esiste) sembra offrire grandi difficoltà ed ha resistito ai miei sforzi, onde posso soltanto limitarmi ad accennare a un procedimento d'iterazione che permette d'ottenere, oltre alla detta singolarità  $\alpha$  lungo  $AB$ , la singolarità  $\beta$  almeno in una successione di punti  $\{P_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) che sia ovunque densa su  $AB$ .

Sia  $\Sigma^0$  una porzione di superficie  $z = f(x, y)$  quadrabile e regolare, soddisfacente alla proprietà  $\beta$  in un punto angoloso  $P$  del contorno (n. 14). Supponiamo addirittura, per semplicità, che il contorno di  $\Sigma^0$  sia quello d'un settore di cerchio  $C^0$  del piano  $xy$ , di vertice  $P$  (l'angolo al centro del settore sia  $< \pi$ ). Prefissata poi ad arbitrio una successione di punti  $P_n$  su un segmento  $AB$ , ovunque densa su  $AB$ , scegliamo (com'è certo possibile) una successione infinitesima di numeri positivi  $\varepsilon_n$  in modo che costruendo, in uno stesso semipiano  $\omega$  uscente da  $AB$ , i settori  $C_n$  tutti simili a  $C^0$ , aventi rispettivamente raggi  $\varepsilon_n$ , vertici  $P_n$  ed assi di simmetria perpendicolari ad  $AB$ , tali settori, dico, non abbiano punti in comune due a due. Costruiamo poi, per ogni valore dell'indice  $n = 1, 2, \dots$ , la porzione di superficie  $\Sigma_n$  simile a  $\Sigma^0$  ed avente il contorno coincidente con quello di  $C_n$ . Sarà certamente possibile raccordare opportunamente (lungo i propri contorni) tali porzioni  $\Sigma_n$  con la porzione  $\bar{\omega}$  di  $\omega$  che sta al di fuori dei contorni medesimi, in modo che la superficie  $\Sigma$  risultante dalla riunione dei  $\Sigma_n$  e di  $\bar{\omega}$ , venga a soddisfare lungo  $AB$  e in ogni punto  $P_n$ , alle proprietà richieste.

fatti i due rami non hanno più tangente determinata in  $P$ ). Avvertiamo che esempi del genere, in cui venga mantenuta anche la regolarità dei due rami, si possono costruire abbastanza facilmente, con procedimenti direttamente ispirati a quello descritto nei nn. 3-11.

Anche la quadrabilità di  $\Sigma$  può facilmente assicurarsi, particolareggiando ulteriormente la scelta della successione  $\{\varepsilon_n\}$  <sup>(36)</sup>.

**16.** – Per terminare voglio brevemente accennare, ancora da un altro punto di vista, ai rapporti che intercedono fra la presente ricerca e il problema da me precedentemente studiato (nelle pubblicazioni citate alla nota <sup>(3)</sup>).

Le porzioni di superficie  $\Sigma$  fin qui considerate son tutte rappresentabili mediante equazioni del tipo  $x = f(x, y)$ . È facile convincersi ch'è certamente possibile, a qualunque tipo particolare (fra quelli sopra descritti) di superficie appartenga la  $\Sigma$ , costruire un'altra porzione di superficie  $\Sigma_1$ , avente in comune con la  $\Sigma$  un certo arco  $\Gamma$  di contorno (e cioè l'arco  $AB$ , se  $\Sigma$  è d'uno dei tipi descritti ai nn. 3-11 oppure 15 – invece un arco contenente l'unico punto singolare  $P$ , se  $\Sigma$  è d'uno dei tipi descritti ai nn. 13-14), in modo da soddisfare alle seguenti proprietà:

**1<sup>a</sup>)** La superficie  $\Sigma + \Sigma_1$  è quadrabile, semplice e regolare, tranne che lungo l'arco  $\Gamma$  descritto su di essa.

**2<sup>a</sup>)** Una qualunque successione di curve rettificabili  $\gamma_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), aventi in comune con  $\Sigma + \Sigma_1$  soltanto i propri estremi (coincidenti, per i tipi dei nn. 3-11, 15, rispettivamente coi due punti  $A, B$  – variabili con  $n$  e situati, sull'arco  $\Gamma$ , da parti opposte rispetto a  $P$ , nell'intorno di  $P$ , per i tipi dei nn. 13-14), è necessariamente tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \infty,$$

purchè le  $\gamma_n$  tendano, per  $n \rightarrow \infty$ , a  $\Gamma$  (per i tipi dei nn. 3-11, 15) oppure al punto  $P$  (per i tipi dei nn. 13-14).

La costruzione più semplice che può indicarsi per la nuova porzione di superficie  $\Sigma_1$ , s'ottiene mediante la scelta d'un'op-

<sup>(36)</sup> È sufficiente, per es., che tale successione sia maggiorata, termine a termine, da una progressione geometrica di ragione  $< 1$ .

portuna funzione  $\varepsilon(xy)$  (continua, dotata d'un certo numero di derivate parziali successive continue, ecc.) che sia definita nello stesso dominio in cui è definita la  $f(xy)$ , ivi sempre positiva tranne che lungo l'arco  $\Gamma$ , e che sia infinitesima d'ordine sufficientemente elevato <sup>(37)</sup> affinché, rappresentando  $\Sigma_1$  con l'equazione

$$z = f(xy) + \varepsilon(xy) ,$$

le proprietà sopra enunciate risultino effettivamente soddisfatte.

(37) S'intende: nel mentre che il punto  $[x, y, \varepsilon(xy)]$  converge a un punto qualunque di  $\Gamma$ . — Una leggera modificazione di dettaglio, a proposito dei tipi dei nn. 14-15, può assicurare la regolarità di  $\Sigma + \Sigma_1$  effettivamente in tutti i punti distinti da  $P$ .