RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

JAURÈS CECCONI

Sul teorema di Gauss-Green

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 194-218

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__194_0>

SUL TEOREMA DI GAUSS-GREEN

Memoria (*) *di* JAURÈS CECCONI (*Pisa*).

La formula di GAUSS-GREEN è stata oggetto, anche in questi ultimi anni, di numerose ricerche.

Fra queste sono particolarmente da notare le ricerche di H. FEDERER [6] e G. C. LORENTZ [8] le quali hanno avuto peraltro lo scopo di estendere la formula di GAUSS-GREEN ad enti non orientati e con un significato dell'area diverso da quello di LEBESGUE.

In questo lavoro mi propongo di considerare la formula di GAUSS-GREEN prendendo in esame superficie chiuse orientate sulle quali è fatta la sola ipotesi della quadrabilità secondo LEBESGUE.

La nozione di punto interno ad una siffatta superficie è formulata mediante la considerazione dell'indice topologico di tale punto rispetto alla superficie, così come è stato fatto da T. RADÓ [10] per la disuguaglianza isoperimetrica, l'integrale di superficie è considerato al modo di WEIERSTRASS così come è stato fatto da L. CESARI [4].

Più precisamente lo scopo di questo lavoro è di studiare il grado di validità della eguaglianza

$$(1)\quad \iiint_K f_x(x,y,z)\cdot O(x,y,z;\Sigma)\,dx\,dy\,dz = -\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dy\,dz$$

ove Σ è una superficie continua chiusa orientata e quadrabile, K è un cubo cui è interno l'insieme $[\Sigma]$ formato dai punti di Σ, $O(x, y, z; \Sigma)$ è l'indice topologico di (x, y, z) rispetto a Σ,

(*) Pervenuta in Redazione il 9 gennaio 1951.

se (x, y, z) non appartiene a Σ, è zero altrimenti, l'integrale a secondo membro è l'integrale di WEIERSTRASS [vedere n. 8] della funzione $f(x, y, z) \cdot H_1$ esteso alla superficie Σ.

Il risultato cui pervengo è espresso dal seguente

TEOREMA: *Se Σ è una superficie orientata di Frechet del tipo della 2-sfera, quadrabile secondo Lebesgue, se $f(x, y, z)$ è una funzione continua in K con la sua derivata parziale $f_x(x, y, z)$, e se l'insieme $[\Sigma]$, formato con i punti di Σ ha misura tridimensionale nulla, allora vale la* (1).

Osservo che le ipotesi fatte sulla funzione $f(x, y, z)$ non sono ovviamente le più generali perchè valga la (1).

Osservo che, invece, la condizione $|[\Sigma]| = 0$, in armonia con precedenti ricerche di R. G. HELSEL [7], è necessaria per la validità della (1); cioè non si può fare a meno della condizione $|[\Sigma]| = 0$ se la nozione di punto interno a Σ è formulata mediante l'indice topologico come sopra.

Ciò risulta da un esempio che espongo nel corso del lavoro.

L'indice topologico. L'integrale di Weierstrass.

1. - Sia Σ una superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-sfera [5]. Sia $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$

$$\mathcal{T}: \qquad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u) \qquad u \in \mathcal{C}$$

una sua rappresentazione sulla sfera unitaria $\mathcal{C}$ di equazione $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ dello spazio $u_1 u_2 u_3$ sulla quale è fissata l'indicatrice positiva corrispondente all'ordine dei punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sul triangolo sferico di $\mathcal{C}$ avente questi vertici.

Sia (x_0, y_0, z_0) un punto non appartenente a Σ. Le relazioni

$$(2) \quad x = x_0 + \frac{x(u) - x_0}{r(u)}, \quad y = y_0 + \frac{y(u) - y_0}{r(u)},$$
$$z = z_0 + \frac{z(u) - z_0}{r(u)}, \quad u \in \mathcal{C}$$

ove si è posto $r(u) = [(x(u) - x_0)^2 + (y(u) - y_0)^2 + (z(u) - - z_0)^2]^{1/2}$, definiscono una trasformazione della sfera $\mathcal{C}$ in un sotto insieme della sfera unitaria di centro (x_0, y_0, z_0).

Definiamo come indice topologico $O(x_0, y_0, z_0; \Sigma)$ di (x_0, y_0, z_0) rispetto a Σ il grado [1] della trasformazione (2).

Poniamo invece $O(x_0, y_0, z_0; \Sigma) = 0$ se (x_0, y_0, z_0) appartiene a Σ.

2. - Sia $\{\mathcal{P}_n\}$ una successione di superficie poliedriche orientate [5] del tipo della 2-sfera che tenda nel senso di Frechet verso la superficie Σ.

Sia $O(x, y, z; \mathcal{P}_n)$ l'indice topologico del punto (x, y, z) rispetto a $\mathcal{P}_n$. È noto che se (x, y, z) non appartiene a Σ si ha

$$\lim_{n \to \infty} O(x, y, z; \mathcal{P}_n) = O(x, y, z; \Sigma).$$

Supponiamo che la superficie Σ ammetta area secondo Lebesgue finita, sia $A(\Sigma)$ tale area, che l'insieme $[\Sigma]$ abbia misura tridimensionale nulla, e supponiamo inoltre che la successione di superficie poliedriche sopra considerata converga in area a Σ.

Si abbia cioè, oltre a quanto è detto sopra,

$$\lim_{n \to \infty} A(\mathcal{P}_n) = A(\Sigma).$$

In queste ipotesi è stato dimostrato da R. G. Helsel [7] che si ha

$$\lim_{n \to \infty} \iiint_K | O(x, y, z; \mathcal{P}_n) - O(x, y, z; \Sigma) | \, dxdydz = 0,$$

ove si è indicato con K un cubo con i lati paralleli agli assi x, y, z contenente nel suo interno la superficie Σ.

3. - Sia Σ la superficie orientata dal tipo della 2-sfera considerata nel n. 1.

Sia C il cerchio unitario di equazione $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ del piano $u_1 u_2$ sul quale sia fissata l'indicatrice positiva corrispondente all'ordine dei punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ sul triangolo avente gli stessi vertici. Siano E_ν, E_σ gli emisferi $u_3 \geq 0$, $u_3 \leq 0$ di $\mathcal{C}$ ed u_ν, u_σ i punti $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$ di $\mathcal{C}$. Sia ω il punto $(0, 0)$ del piano $u_1 u_2$, sia v il generico punto (u_1, u_2) del piano $u_1 u_2$, sia $r \equiv (\omega, v)$ la distanza fra v ed ω, e sia C_0 il cerchio $r \leq {}^1/_2$ del piano u_1, u_2.

Da L. Cesari [5] è stata introdotta la seguente trasformazione monotona e continua di C su $\mathcal{C}$

$$u = \tau(v) \qquad v \in C \qquad u \in \mathcal{C}$$

così definita: $\tau(v)$ si ottiene applicando a $v \in C$ l'omotetia di centro ω e di rapporto 2 e successivamente la proiezione da u_σ su E_ν se $v \in C_0$; $\tau(v)$ si ottiene applicando a v sul piano $u_1 u_2$ l'omotetia di centro ω e di rapporto $(1 - r)^{-1}$ e la proiezione da u_σ su E_σ se $v \in C - C_0$; finalmente sia $\tau(C^*) = u_\sigma$ ove C^* è il contorno di C.

Considero la trasformazione definita su C $(\mathcal{T} \cdot \tau, C) \equiv (T, C)$, essa è univoca e continua su C e costante su C^*.

Le trasformazioni (T, C) e $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ sono state messe in relazione da L. Cesari [5] e chiamate associate. La trasformazione (T, C) costituisce una superficie orientata S del tipo della 2-cella.

È stato dimostrato da L. Cesari [5] che si ha $A(\Sigma) = A(S)$.

4. – Sia S una superficie orientata di Frechet del tipo della 2-cella e sia (T, C)

$$T\colon\ x = x(u_1, u_2), \quad y = y(u_1, u_2), \quad z = z(u_1, u_2) \quad (u_1, u_2) \in C$$

una sua rappresentazione sul cerchio unitario C di equazione $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$ del piano $u_1 u_2$. Supponiamo inoltre che S ammetta area secondo Lebesgue finita.

Sia A un insieme chiuso dello spazio xyz al quale appartengano tutti i punti della superficie S.

Sia $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ una funzione ad un valore dei sei argomenti x, y, z, H_1, H_2, H_3 definita per tutti i punti (x, y, z) di A e per ogni terna di numeri reali H_1, H_2, H_3 non tutti nulli.

La funzione $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ risulti inoltre continua in ogni punto (x, y, z, H_1, H_2, H_3) ove (x, y, z) è un punto di A ed H_1, H_2, H_3 è una terna di numeri reali non tutti nulli, essa sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto ad ogni H_1, H_2, H_3 e si abbia infine $F(x, y, z, 0, 0, 0) = 0$ per ogni $(x, y, z) \in A$.

Da L. Cesari [4] è stato introdotto l'integrale secondo Weierstrass di $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ sulla superficie S nel seguente modo.

Siano Φ_1, Φ_2, Φ_3, le trasformazioni piane associate a T secondo i piani yz, zx, xy. Sia $[\pi_i; i = 1, 2, \cdots n]$ un qualsiasi gruppo di poligoni di Q a due a due senza punti interni in comune, siano $C_{r,i}$ $[i = 1, 2, \cdots n, r = 1, 2, 3]$ le curve continue e chiuse immagini delle poligonali, contorno di π_i, secondo le trasformazioni Φ_r. Sia $O(y, z; C_{1,i})$ l'indice topologico del punto (y, z) del piano yz rispetto a $C_{1,i}$ ed in modo analogo siano definiti $O(z, x; C_{2,i})$ e $O(x, y; C_{3,i})$. Siano K_1, K_2, K_3 le proiezioni sui piani yz, zx, xy del cubo K considerato nel n. 2.

Sia inoltre

$$\tau_1(\pi_i) = \iint_{K_1} O(y, z; C_{1,i})\, dy\, dz, \quad \tau_2(\pi_i) = \iint_{K_2} O(z, x; C_{2,i})\, dz\, dx,$$

$$\tau_3(\pi_i) = \iint_{K_3} O(x, y; C_{3,i})\, dx\, dy \qquad (i = 1 \ldots n).$$

$$t_r(\pi_i) = |\tau_r(\pi_i)|, \quad t(\pi_i) = [\tau_1^2(\pi_i) + \tau_2^2(\pi_i) + \tau_3^2(\pi_i)]^{1/2}$$
$$i = 1, 2 \ldots n, \qquad r = 1, 2, 3$$

Sia

$$T(S) = extr\, sup \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i), \quad T(\Phi_r) = extr\, sup \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i); \quad r = 1, 2, 3;$$

$$\Psi(y, z; \Phi_1) = extr\, sup \sum_{i=1}^{n} |O(y, z; C_{1,i})|,$$

$$\Psi(z, x; \Phi_2) = extr\, sup \sum_{i=1}^{n} |O(z, x; C_{2,i})|$$

$$\Psi(x, y; \Phi_3) = extr\, sup \sum_{i=1}^{n} |O(x, y; C_{3,i})|,$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i gruppi di poligoni $[\pi_i;\ i = 1, 2, \ldots n]$, di C, senza punti interni in comune.

Pongo inoltre

$$\delta = \max_{i=1,2..n} \eta(\pi_i), \qquad m = \max_{r=1,2,3} |E_r|, \qquad E_r = \sum_{i=1}^{n} C_{r,i}$$

$$(r = 1, 2, 3)$$

$$\mu = max \left| T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i), \quad T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i), \quad r = 1, 2, 3 \right|$$

ove $\eta(\pi_i)$ è l'oscillazione di T in π_i.

I numeri δ, m, μ si dicono gli indici del gruppo di poligoni $[\pi_i]$ di C.

Per ogni gruppo di poligoni $[\pi_i]$ si ha $\delta \geq 0, m \geq 0, \mu \geq 0$ [3], inoltre comunque si assegni un $\gamma > 0$ esistono quanti si vogliono gruppi di poligoni $[\pi_i]$ per i quali ciascuno degli indici è $< \gamma$.

Sia $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$ un punto appartenente al poligono π_i, sia (x_i, y_i, z_i) il punto ad esso corrispondente secondo T in S.

Considero la somma

$$\sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)].$$

Per quanto ha dimostrato L. Cesari [4], nella ipotesi che S abbia area secondo Lebesgue finita, esiste finito il limite

$$\lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\} \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] = \mathcal{J}_{(r,o)}$$

al quale L. CESARI ha dato il nome di integrale secondo WEIERSTRASS della funzione $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ sopra la superficie (T, C).

5. - In ordine a tale integrale L. CESARI [4] ha stabilito le proprietà espresse dai seguenti teoremi.

TEOREMA I. - Se S è una superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-cella di area finita secondo LEBESGUE l'integrale $\mathcal{J}_{(T,C)}$ è indipendente dalla rappresentazione (T, C) di S. Per tale ragione si scriverà anche $\mathcal{J}_S$ in luogo di $\mathcal{J}_{(T,C)}$.

TEOREMA II. - Siano $S, S_1, S_2, \ldots S_n \ldots$ superficie orientate di FRECHET del tipo della 2 cella di area finita secondo LEBESGUE per le quali si abbia

$$\lim_{n \to \infty} A(S_n) = A(S), \quad \lim_{n \to \infty} \| S, S_n \| = 0,$$

ove con $\| S, S_n \|$ si è indicata la distanza orientata secondo FRECHET fra S ed S_n, allora si ha

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{J}_{S_n} = \mathcal{J}_S.$$

TEOREMA III. - Se S è una superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-cella di area finita secondo LEBESGUE e se $(\bar{T}, \bar{C})$

$$\bar{T}: \quad x = \bar{x}(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \quad y = \bar{y}(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \quad z = \bar{z}(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \quad (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in \bar{C}$$

è una rappresentazione di S per la quale le trasformazioni Φ_r $(r = 1, 2, 3)$ risultano assolutamente continue allora indicato con $H_r(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ il Jacobiano generalizzato della trasformazione Φ_r [3], l'integrale $\mathcal{J}_S$ è dato dal seguente integrale di LEBESGUE

$$\mathcal{J}_S = \iint_{\bar{C}} F[\bar{x}(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{y}(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{z}(\bar{u}_1, \bar{u}_2), H_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2),$$

$$H_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2), H_3(\bar{u}_1, \bar{u}_2)] \, d\bar{u}_1 \, d\bar{u}_2.$$

Richiamo a questo punto anche il seguente teorema di L. Cesari [3] del quale mi sono servito nel n. 4.

Teorema IV. - Se S è una superficie orientata di Frechet di area finita secondo Lebesgue e se ε è un numero positivo arbitrario può determinarsi un gruppo di poligoni semplici $[\pi_i\,; i = 1, 2, \ldots n]$, completamente interni a C a due a due senza punti interni in comune tali che si abbia con le notazioni del n. 4

$$m = \max_{r=1,2,3} |E_r| < \varepsilon, \quad E_r = \sum_{i=1}^{n} C_{r,i}\,, \; r = 1, 2, 3$$

$$\delta = \max_{i=1,2\ldots n} |\eta(\pi_i)| < \varepsilon$$

$$\mu = \max\left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i),\; T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i); r = 1, 2, 3 \right] < \varepsilon$$

Un esame della dimostrazione di questo teorema ci consente di enunciare il seguente

Teorema: Nelle stesse ipotesi del teorema precedente sia $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$ un punto interno a C. Allora ad ogni $\varepsilon > 0$ è possibile far corrispondere un gruppo di poligoni $[\pi_i; i = 1, 2, .. n]$ che verifichino tutte le proprietà del gruppo di poligoni dell'enunciato precedente e tali inoltre che ciascuno di essi sia esterno al punto $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$.

6. - Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita e continua nell'insieme A considerato nel n. 4 e sia S la superficie orientata di area finita ivi considerata. Risulta in particolare definito sulla superficie S l'integrale della funzione $f(x, y, z) \cdot H_1$. Tale integrale sarà indicato nel seguito con la notazione

$$\iint_S f(x, y, z)\, dy\, dz\,.$$

7. - Sia $\Sigma \equiv (\mathcal{T}, \mathcal{C})$ una superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-sfera di area finita secondo LEBESGUE. Sia $S \equiv (T, C)$ la superficie orientata del tipo della 2 cella associata a Σ secondo il procedimento descritto nel n. 3. Sia A un insieme chiuso cui appartengano tutti i punti della superficie Σ e sia $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ una funzione che nell'insieme A si comporti come è precisato nel n. 4.

Sia $\mathcal{J}_S$ l'integrale della funzione $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ sulla superficie orientata S.

Mi propongo di dimostrare in questo numero e nel successivo che l'integrale $\mathcal{J}_S$ dipende soltanto dalla superficie $\Sigma \equiv (\mathcal{T}, \mathcal{C})$, nel senso che se $\Sigma' \equiv (\mathcal{T}', \mathcal{C}')$ è una superficie orientata del tipo della 2-sfera equivalente nel senso di FRECHET alla superficie Σ si ha

$$\mathcal{J}_S = \mathcal{J}_{S'}$$

essendo $S' \equiv (T', C')$ la superficie del tipo della 2-cella associata a Σ'.

In virtù del teorema I ricordato nel numero 5 l'asserto è provato se anche le superficie S ed S' sono equivalenti nel senso di FRECHET.

In generale però nonostante Σ e Σ' siano equivalenti non lo sono S ed S'.

In questo caso adatto come segue la dimostrazione data da L. CESARI [4] del teorema I.

Siano Φ_r, Φ'_r, $(r = 1, 2, 3)$ le trasformazioni piane relative a (T, C) e (T', C').

Siano τ_r, t_r, $T(\Phi_r)$, t, $T(S)$ ecc. le funzioni introdotte nel n. 4 relativamente alla trasformazione (T, C) e siano τ'_r, t'_r, $T(\Phi'_r)$, t', $T(S')$ ecc. le analoghe relativamente alla trasformazione (T', C').

In virtù di un risultato di L. CESARI [5] è $A(S) = A(S')$ e risulta inoltre

$$T(S) = T(S'), \quad T(\Phi_r) = T(\Phi'_r) \quad (r = 1, 2, 3).$$

È anche per quasi ogni punto $(x, y) \in K_3$

$$\Psi(x, y; \Phi_3) = \Psi(x, y; \Phi'_3).$$

Ciò può vedersi nel seguente modo.

Siano $\bar{\Phi}_r$ $(r = 1, 2, 3)$ le tre trasformazioni piane associate alla trasformazione $(\mathfrak{T}, \mathcal{C})$ e siano Φ'_r le corrispondenti trasformazioni piane associate a $(\mathfrak{T}', \mathcal{C}')$.

Sia $[\bar{\pi}_i; i = 1, 2, \ldots n]$ un gruppo di regioni semplici di Jordan appartenenti alla superficie $\mathcal{C}$ prive a due a due di punti interni in comune e siano $\bar{C}_{r,i}$ le immagini delle linee $\bar{\pi}_i^*$, contorno di $\bar{\pi}_i$, secondo $\bar{\Phi}_r$ $(r = 1, 2, 3)$.

Siano $O(y, z; \bar{C}_{1,i})$; $O(z, x; \bar{C}_{2,i})$, $O(x, y; \bar{C}_{1,i})$ gli indici topologici dei punti (y, z), (z, x), (x, y) rispetto alle linee $\bar{C}_{1,i}$, $\bar{C}_{2,i}$, $\bar{C}_{3,i}$. Sia

$$\Psi(y, z; \bar{\Phi}_1) = extr\ sup \sum_{i=1}^{n} O(y, z; \bar{C}_{1,i})$$

per tutti i possibili gruppi di regioni semplici di Jordan $\bar{\pi}_i$ sopra considerati. In modo analogo siano definite $\Psi(z, x; \bar{\Phi}_2)$, $\Psi(x, y; \bar{\Phi}_3)$.

Alla stessa maniera rispetto alla trasformazione $(\mathfrak{T}', \mathcal{C}')$ siano definite le quantità $\bar{\Psi}(y, z; \Phi'_1)$, $\bar{\Psi}(z, x; \Phi'_2)$, $\Psi(x, y; \Phi'_3)$.

Poichè le trasformazioni $(\mathfrak{T}, \mathcal{C})$, $(\mathfrak{T}', \mathcal{C}')$ sono equivalenti risulta intanto, per un noto ragionamento, in ogni punto di K_3 $\Psi(x, y; \Phi_3) = \Psi(x, y; \bar{\Phi}'_3)$ ed analoghe.

Passo ora a confrontare $\Psi(x, y; \bar{\Phi}_3)$ e $\Psi(x, y; \Phi_3)$.

Risulta intanto in ogni punto di K_3

$$\Psi(x, y; \Phi_3) \leq \Psi(x, y; \Phi_3).$$

Per ottenere la disuguaglianza complementare considero accanto alla funzione $\Psi(x, y; \Phi_3)$ la funzione $\Psi^*(x, y; \Phi_3)$ introdotta da T. Radó [9] con il seguente significato

$$\Psi^*(x, y; \Phi_3) = extr.\ sup. \sum_{i=1}^{n} O(x, y; R_i)$$

ove $[R_i; i = 1, 2, \dots n]$ è un gruppo di regioni orientate di Jordan di connessione finita appartenente a C senza punti interni in comune, e dove è

$$O(x, y; R_i) = \sum_{s=0}^{m} O(x, y; C_{3,i,s})$$

essendo $C_{3,i,0}, C_{3,i,1}, \dots C_{3,i,m}$ le immagini secondo Φ_3 delle linee $p_{i,0}, p_{i,1}, \dots p_{i,m}$ costituenti il contorno orientato di R_i.

Ricordo anche che, eccettuato al più un insieme numerabile di punti di K_3, è

$$\Psi(x, y; \Phi_3) = \Psi^*(x, y; \Phi_3).$$

Sia ora $m \leq \overline{\Psi}(x, y; \overline{\Phi}_3)$ con $\xi(x, y) \mp \mathfrak{C}(u_\sigma)$.

Esiste allora un gruppo di regioni semplici di Jordan di $\mathcal{C}$ senza punti interni in comune, siano esse $\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2, \dots \overline{\pi}_\mu$, tali che al contorno $\overline{\pi}_i^*$ di nessuna di esse appartenga u_σ, e tali che

$$\sum_{i=1}^{\mu} |O(x, y; \overline{C}_{3,i})| \geq m .$$

Siano $\pi_1^*, \pi_2^*, \dots \pi_\mu^*$ le linee semplici di C immagini delle linee $\overline{\pi}_r^*$ secondo la trasformazione $v = \tau^{-1}(u)$ inversa della $u = \tau(v)$ considerata nel n. 3.

Ora o le linee π_i^* limitano regioni di Jordan di C prive a due a due di punti interni in comune ed è in tal caso in ogni punto di K

$$\Psi(x, y; \Phi_3) \geq m$$

e quindi $\Psi(x, y; \Phi_3) \geq \overline{\Psi}(x, y; \overline{\Phi}_3)$.

Oppure una di tali regioni, sia π_μ, contiene nel suo interno tutte le rimanenti. (È il caso in cui $\overline{\pi}_\mu$ contiene u_σ nel suo interno).

In questo caso considero la regione di Jordan R, di connessione 2, avente per contorno esterno C^* e per contorno interno π^*_μ. Si ha, poichè $(x, y) \neq \mathcal{C}(u_\sigma)$,

$$|O(x, y; R)| = |O(x, y; C_{3,\mu})| = |O(x, y; \overline{C}_{3,\mu})| .$$

È perciò

$$m \leq \sum_{i=1}^{\mu} |O(x, y; \overline{C}_{3,i})| = \sum_{i=1}^{\mu} |O(x, y; C_{3,i})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{\mu-1} |O(x, y; C_{3,i})| + |O(x, y; R)|$$

e le regioni di Jordan $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{\mu-1}$, R sono senza punti interni in comune.

È dunque $m \leq \Psi^*(x, y; \Phi_3)$ ed anche

$$\overline{\Psi}(x, y; \overline{\Phi}_3) \leq \Psi^*(x, y; \Phi_3) .$$

Ciò in virtù delle relazioni sopra stabilite prova il nostro asserto.

8. - Sia $\varepsilon > 0$ ed arbitrario. In virtù della esistenza degli integrali $\mathcal{J}_S$ ed $\mathcal{J}_{S'}$ si può determinare un numero positivo γ tale che per ogni gruppo di poligoni semplici di C a due a due senza punti interni in comune $[\pi_i; i = 1, 2, \dots n]$ e di indici δ, m, μ tutti $< \gamma$ risulti

$$\left| \mathcal{J}_S - \sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] \right| < \varepsilon$$

ed analogamente si può determinare un γ' tale che per ogni gruppo di poligoni semplici di C', a due a due senza punti interni in comune, $[\pi'_i; i = 1, 2, \dots n']$ e di indici δ', m', μ' tutti $< \gamma'$ risulti

$$\left| \mathcal{J}_S - \sum_{i=1}^{n'} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi'_i), \tau_2(\pi'_i), \tau_3(\pi'_i)] \right| < \varepsilon .$$

Sia I l'insieme dei punti (x, y, z, w_1, w_2, w_3) per i quali $(x, y, z) \in S$ e $w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1$.

Sia $M > 0$ un numero tale che per ogni punto (x, y, z, w_1, w_2, w_3) di I si abbia $F(x, y, z, w_1, w_2, w_3) < M$ e tale inoltre che sia $A(S) = A(S') < M$. Sia $\sigma = min\,[\varepsilon/195V, \gamma'/13]$. Sia $\rho > 0$ un altro numero tale che per ogni coppia di punti (x, y, z, w_1, w_2, w_3), $(x', y', z', w'_1, w'_2, w'_3)$ di I tali che $|x - x'| < \rho, \ldots |w_3 - w'_3| < \rho$ risulti

$$|F(x, y, z, w_1, w_2, w_3) - F(x', y', z', w'_1, w'_2, w'_3)| < \sigma .$$

Finalmente sia $0 < \tau < \sigma$ un numero tale che per ogni insieme h misurabile, $h \subset K_i$, $|h| < \sigma$, $(i = 1, 2, 3)$ risulti

$$\iint_h \Psi(y, z; \Phi_1)\, dydz < min\,[\sigma \cdot \rho^2, \sigma],$$

$$\iint_h \Psi(z, x; \Phi_2)\, dzdx < min\,[\sigma \cdot \rho^2, \sigma],$$

$$\iint_h \Psi(x, y; \Phi_3)\, dxdy < min\,[\sigma \cdot \rho^2, \sigma].$$

Sia ora l un numero positivo. In virtù della equivalenza fra Σ e Σ' esiste un omeomorfismo Ω fra i punti di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{C}'$ tale che al verso positivo su $\mathcal{C}$ fa corrispondere il verso positivo su $\mathcal{C}'$ e tale inoltre che se $(u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{C}$ e $(u'_1, u'_2, u'_3) \in \mathcal{C}'$ si corrispondono in Ω e se $P \equiv (x, y, z)$, $P' \equiv (x', y', z')$ sono le loro immagini su Σ e Σ' si abbia $\overline{PP'} < l$.

In virtù della trasformazione continua non biunivoca $u = \tau(v)$ considerata nel n. 3 esiste perciò una corrispondenza ω^* fra i punti di C e i punti di C' tale che ad un punto (u_1^*, u_2^*) di C corrisponde il contorno $C^{*\prime}$ di C', al contorno C^* di C corrisponde un punto $(u_1^{*\prime}, u_2^{*\prime})$ di C' e ad ogni punto interno a C e distinto da (u_1^*, u_2^*) corrisponde un sol punto interno di C' distinto da $(u_1^{*\prime}, u_2^{*\prime})$ in modo che se Q e Q' sono le immagini in S ed S' di due punti (u_1, u_2), (u_1', u_2') corrispondenti in ω^* si abbia $\overline{QQ'} < h$.

Questa corrispondenza ω^* è inoltre tale che ad un gruppo di linee semplici di JORDAN interne a C e prive a due a due di punti interni in comune, alle quali sia esterno il punto (u_1^*, u_2^*), orientate nel verso positivo del piano $u_1\, u_2$ fa corrispondere un gruppo di linee semplici di JORDAN di C', prive a due a due di punti interni in comune, alle quali è esterno il punto $(u_1^{*\prime}, u_2^{*\prime})$ ed orientate nel verso positivo del piano $u_1'\, u_2'$.

Sia $\{l_n\}$ una successione di numeri positivi avente per limite zero. Sia ω_n^* la corrispondenza fra C e C', sopra introdotta, relativamente a l_n, sia $(u_1^{*(n)}, u_2^{*(n)})$ il punto di C cui corrisponde per la ω_n^* il contorno C^* di C'.

Sia $(u_1^0, u_2^{(0)})$ un punto di accumulazione di $(u_1^{*(n)}, u_2^{*(n)})$; $(n = 1\,, 2\,, \ldots)$.

Sia allora $[\pi_i\,;\ i = 1\,, 2\,, \ldots\, n]$ un gruppo di poligoni semplici interni a C a due a due privi di punti interni in comune, ciascuno esterno a $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$ e tali che detti δ, m, μ gli indici di questo gruppo di poligoni sia

$$\delta\,,\ m\,,\ \mu < min\,[\gamma\,,\ \sigma\,,\ \tau\,,\ \rho'_2\,,\ \sigma\rho^2]\,.$$

Un siffatto gruppo di poligoni esiste in virtù del teorema ottenuto come modificazione del Teorema IV nel n. 5.

In ciascuno dei poligoni π_i scelgo un punto $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$ e sia $(x_i\,, y_i\,, z_i)$ l'immagine di $(u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$ in S. Risulta

$$\left| \mathcal{J}_S - \sum_{i=1}^{n} F\,[x_i\,, y_i\,, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i)\,, \tau_3(\pi_i)] \right| < \varepsilon\,.$$

Posto $E_r = \sum\limits_{i=1}^{n} C_{r,i}\,(r = 1\,, 2\,, 3)$ come è noto risulta

$$E_r \subset K_r\,, \qquad E_r < m \qquad (r = 1\,, 2\,, 3)\,.$$

Sia $\lambda > 0$ un numero tale che indicato con $(E_r)_{2\lambda}$ l'insieme dei punti di K_r che distano da E_r per meno di 2λ risulti, per ogni r, $(E_r)_{2\lambda} < E_r + \tau$ e quindi

$$(E_r)_{2\lambda} < m + \tau \leq 2\,\tau\,.$$

Posso supporre $\lambda < \rho/_2$, $\lambda \leq \sigma$.

Sia $\bar{\omega}^*$ una corrispondenza come quelle sopra considerate fra C e C' tale che il punto $(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*)$ risulti esterno a ciascuno dei poligoni $[\pi_i\,;\ i = 1\,,\ 2\,, \ldots\ n]$ e tale che se $(u_1\,,\ u_2)$ ed $(u_1'\,,\ u_2')$ sono due punti di C e C' che si corrispondono in ω^* risulti $PP' < \lambda$, essendo P e P' i punti di S e di S' cui corrispondono $(u_1\,,\ u_2)$ e $(u_1'\,,\ u_2')$. Tale corrispondenza $\bar{\omega}^*$ esiste per il modo con cui è stato scelto il punto $(u_1^{(0)},\ u_2^{(0)})$.

Per la $\bar{\omega}^*$ corrispondono allora agli n poligoni π_i di C n regioni di Jordan $r_i \subset C\,(i = 1\,,\ 2\,, \ldots n)$ a due a due senza punti interni in comune.

Sia ora $\omega'(\delta)$ il modulo di continuita (1) della trasformazione (T', C') e sia δ_0 il massimo numero reale tale che $\omega(\delta_0) < \lambda$. Per ogni i sia π_i' un poligono di C' interamente contenuto in r_i e tale che la distanza secondo Frechet $\| r^*, \pi_i'{}^* \|$ fra i contorni di r_i e di π_i' sia $\leq \delta_0$.

Alla stessa maniera che nella dimostrazione di L. Cesari del teorema I del n. 5 si può dimostrare che gli indici del gruppo di poligoni $[\pi_i'\,; i = 1, 2, \ldots n]$ sono tutti e tre minori di γ' e si può concludere che è

$$\mathcal{J}_{(T,C)} = \mathcal{J}_{(T',C')}\,.$$

L'asserto è così dimostrato. Potremo scrivere perciò anche $\mathcal{J}_\Sigma$ in luogo di $\mathcal{J}_{(T,C)}$.

Risulta in particolare definito l'integrale

$$\iint_\Sigma f\,(x, y, z,)\, dy\, dz$$

come l'integrale della funzione $f\,(x, y, z) \cdot H_1$ sulla superficie Σ.

(1) Se è $\delta > 0$ si dice modulo di continuità $\omega'(\delta)$ di (T', C') l'estremo superiore delle distanze $\{T'(P_1)\,,\ T'(P_2)\}$ per ogni coppia di punti P_1, P_2 e C la cui distanza sia $< \delta$.

9. – Espongo in questo numero alcune proprietà dell'integrale di WEIERSTRASS di cui mi servirò nel seguito.

TEOREMA: Se $S \equiv (T, C)$ è una superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-cella, di area finita secondo LEBESGUE, se $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ è una funzione definita in un insieme chiuso A contenente i punti della superficie S che gode ivi le proprietà indicate nel n. 4, se λ è una linea di JORDAN di C che divide C in due regioni di JORDAN R_1 ed R_2 e se la curva (T, λ) ha proiezioni sui piani $x = 0, y = 0, z = 0$ di misura nulla allora

$$\mathcal{J}_{(T,C)} = \mathcal{J}_{(T,R_1)} + \mathcal{J}_{(T,R_2)}.$$

Per la dimostrazione osservo intanto che posto $S_i = (T, R_i)$; $i = 1, 2$; si ha $A(S_i) \leq A(S)$; $i = 1, 2$; ciò che assicura intanto della esistenza degli integrali a secondo membro.

Considero un gruppo di poligoni $[\pi_i^{(1)}; i = 1, 2, \ldots n_1]$ di R_1 a due a due senza punti interni in comune, gli indici δ_1, m_1, μ_1 di tale gruppo di poligoni, un gruppo di poligoni $[\pi_i^{(2)}; i = 1, 2, \ldots n_2]$ di R_2 a due a due senza punti interni in comune, e gli indici δ_2, m_2, μ_2 di tale gruppo di poligoni.

Considero quindi il gruppo di poligoni $[\pi_i^{(s)}; i = 1, 2, \ldots n_s; s = 1, 2]$ di C i quali risultano a due a due privi di punti interni in comune. Detti δ, m, μ gli indici di questo gruppo di poligoni si ha

$$\delta \leq \delta_1 + \delta_2, \quad m \leq m_1 + m_2, \quad \mu \leq \mu_1 + \mu_2.$$

Le prime due di queste relazioni sono ovvie. La terza si deduce dal fatto che in virtù di un teorema di L. CESARI [5] si ha nelle nostre ipotesi $A(S) = A(S_1) + A(S_2)$, $T(\Phi_r) = T(\Phi_{1,r}) + T(\Phi_{2,r})$; $r = 1, 2, 3$.

Tenendo conto della definizione di $\mathcal{J}_S, \mathcal{J}_{S_1}, \mathcal{J}_{S_2}$ si ottiene allora il nostro asserto. Analogo risultato si ha se si suddivide C in regioni di JORDAN mediante n archi di JORDAN per ciascuno dei quali valga l'ipotesi fatta su λ.

Teorema: Se $S \equiv (T, C)$ è una superficie orientata di Frechet del tipo della 2-cella di area secondo Lebesgue nulla e se $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ è una funzione ammissibile (n. 4) per S allora è

$$\mathcal{J}_S = 0 .$$

Poichè $A(S) = 0$ si ha anche $T(S) = 0$ e quindi $T(\Phi_r) = 0$; $r = 1, 2, 3$.

Per ogni poligono π_i appartenente a C si ha

$$|\tau_r(\pi_i)| = t_r(\pi_i) \leq T(\Phi_r) \qquad r = 1, 2, 3$$

e quindi $\tau_r(\pi_i) = 0$.

In virtù delle ipotesi fatte sulla funzione $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)$ risulta perciò $F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] = 0$ ed anche $\mathcal{J}_S = 0$.

Teorema: Sia S è una superficie orientata di Frechet del tipo della 2-cella sia (T, C) una sua rappresentazione nel cerchio unitario C del piano $u_1 u_2$. Sia $S' \equiv (T', C')$ la superficie ottenuta invertendo l'indicatrice positiva del piano $u_1 u_2$. Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua nell'insieme A (n. 4). Si ha allora

$$\iint_S f(x, y, z)\, dy\, dz = -\iint_{S'} f(x, y, z)\, dy\, dz .$$

Ciò risulta in modo ovvio dalla definizione di

$$\iint_S f(x, y, z)\, dy\, dz .$$

Il Teorema di Gauss-Green.

10. - Considero dapprima il caso in cui la superficie orientata di Frechet del tipo della 2-sfera Σ sia una superficie poliedrica orientata [5] e più particolarmente il caso in cui Σ sia un tetraedro orientato $\mathcal{D}_4$.

Sia $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ una rappresentazione tipica di $\mathcal{D}_4$ sulla sfera unitaria $\mathcal{C}$ e sia (T, C) la rappresentazione associata di $\mathcal{D}_4$ in C.

Risulta intanto in virtù delle proprietà dell' integrale di Weierstrass espresse nel n. precedente e delle ipotesi fatte nella introduzione sulla funzione $f(x, y, z)$

$$\iint_{\mathcal{D}_4} f(x, y, z)\, dy\, dz = \iint_{(T,C)} f(x, y, z)\, dy\, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \iint_{t_i} f(x, y, z)\, dy\, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \iint_{t_i^{(yz)}} f[x_i(y, z), y, z]\, sgm \cos n_i x\, dy\, dz$$

ove t_1, t_2, t_3, t_4 sono le superficie costituite dalle singole faccie del tetraedro $\mathcal{D}_4$, $t_i^{(yz)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ è il triangolo del piano yz su cui si proietta la superficie t_i, $x = x_i(y, z)$ $[i = 1, 2, 3, 4;$ $(y, z) \in t_i^{(yz)}]$ è l'equazione del piano cui appartiene t_i, n_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ è la normale alla superficie t_i, orientata in modo che rispetto ad essa il verso del contorno della superficie t_i risulti antiorario, e l' ultimo integrale è inteso nel senso di integrale di campo piano.

Suppongo ora che il tetraedro costituito dalla superficie orientata $\mathcal{D}_4$ sia orientato positivamente nel senso che rispetto a ciascun vertice del tetraedro il verso del contorno della superficie costituita dalla faccia opposta sia antiorario.

Come è noto in tal caso l' indice topologico di ciascun punto interno al tetraedro rispetto a $\mathcal{D}_4$ è $+1$ mentre l' indice topologico di ogni altro punto di K (n. 2) è zero.

Risulta allora con considerazioni di carattere elementare, ed in virtù delle ipotesi fatte nella introduzione sulla funzione $f(x, y, z)$ e sulla sua derivata $f_x(x, y, z)$

$$\iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \mathcal{D}_4)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_\Delta f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \mathcal{D}_4)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= -\sum_{i=1}^{4} \iint_{t_i(yz)} f[x_i(y,z), y, z]\, sgm \cos n_i x\, dy\, dz$$

ove con Δ si è indicato l'insieme dei punti interni a $\mathcal{P}_4$.

Dal confronto con la relazione sopra stabilita si ha perciò in questo caso il nostro asserto.

In modo analogo si conclude se $\mathcal{P}_4$ è orientato negativamente, in modo che il teorema di Gauss Green risulta acquisito nel caso in cui $\mathcal{P}_4$ è un tetraedro orientato.

11. - Considero in questo numero il caso in cui Σ sia un poliedro orientato $\mathcal{P}$ del tipo della 2-sfera.

Sia $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ una rappresentazione tipica di $\mathcal{P}$ sulla sfera unitaria $\mathcal{C}$ e sia (T, C) la rappresentazione associata nel cerchio unitario C.

Sia Q un punto arbitrario dello spazio xyz. Da esso proietto le faccie di $\mathcal{P}$, siano esse in numero di n, in modo da ottenere n tetraedri $\mathcal{P}_4^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots n)$ orientati secondo l'orientazione indotta su ciascuno di essi dalla faccia proiettata.

Per un noto risultato di topologia combinatoria [1] si ha in ogni punto (x, y, z) di K non appartenente alle faccie dei tetraedri

$$O(x, y, z; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} O(x, y, z; \mathcal{P}_4^{(i)}).$$

Si ha perciò come nel n. precedente

$$\iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \mathcal{P})\, dx\, dy\, dz$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \mathcal{P}_4^{(i)})\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \iiint_{\Delta_i} f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \mathcal{P}_4^{(i)})\, dx\, dy\, dz$$

ove si è indicato con Δ_i l'insieme dei punti interni al tetraedro $\mathcal{P}_4^{(i)}$.

Ed in virtù di quanto si è provato nel numero precedente

$$\iiint_K f_x(x,y,z)\cdot O(x,y,z;\mathcal{P})\,dx\,dy\,dz = -\sum_{i=1}^{n}\iint_{\mathcal{P}_4^{(i)}} f(x,y,z)\,dy\,dz$$

dalla quale si deduce il nostro asserto.

12. - Sono ora in grado di dimostrare il teorema di GAUSS-GREEN nella forma generale della introduzione.

Sia Σ una superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-sfera e sia $(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ una sua rappresentazione sulla sfera unitaria. Supponiamo che Σ abbia area finita secondo LEBESGUE e che l'insieme $[\Sigma]$ abbia misura tridimensionale nulla.

Sia $(\mathcal{P}_n)$ una successione di superficie poliedriche orientate di FRECHET per le quali si abbia

$$\lim_{n\to\infty} \|\Sigma, \mathcal{P}_n\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} A(\mathcal{P}_n) = A(\Sigma).$$

Per ogni valore di n, tale che $\mathcal{P}_n$ appartenga a K, si ha per il numero precedente

$$\iiint_K f_x(x,y,z)\cdot O(x,y,z;\mathcal{P}_n)\,dx\,dy\,dz = -\iint_{\mathcal{P}_n} f(x,y,z)\,dy\,dz.$$

Ora in virtù del teorema di R. G. HELSEL richiamato nel n. 2 ed in virtù delle ipotesi fatte sulla $f(x, y, z)$ e sulla superficie Σ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_K f_x(x,y,z)\cdot O(x,y,z;\mathcal{P}_n)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_K f_x(x,y,z)\cdot O(x,y,z;\Sigma)\,dx\,dy\,dz$$

.

ed in virtù del teorema II di L. CESARI richiamato nel n. 5 si ha

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\mathcal{P}_n} f(x, y, z)\, dy\, dz = \iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, dy\, dz .$$

Da tutto ciò discende allora che il teorema di GAUSS-GREEN, nella forma indicata nella introduzione, è completamente dimostrato.

Un esempio.

13. - Mi propongo in quello che segue di dare un esempio di una superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-sfera, di area finita secondo LEBESGUE, per la quale non sussiste la formula di GAUSS-GREEN ora dimostrata.

Sia C_1 il cubo unitario $(0 \leq x, y, z \leq 1)$ dello spazio xyz.

Sia f_1 il segmento di lunghezza $1/2$ perpendicolare al piano xy ed avente per estremi i punti $(1/2, 1/2, 0)$, $(1/2, 1/2, 1/2)$. Siano g_{1,j_1} $(j_1 = 1, \ldots 2^2)$ i 2^2 segmenti di lunghezza $1/2^2 \cdot \sqrt{2}$ aventi per estremi il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$ e rispettivamente i punti $(1/2 \mp 1/2^2,$ $1/2 \mp 1/2^2, 1/2)$. Siano f_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ i 2^3 segmenti di lunghezza $1/2^2$ aventi a due a due per estremi i punti $(1/2 \mp 1/2^2,$ $1/2 \mp 1/2^2, 1/2)$ e paralleli all'asse z. Siano C_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ i 2^3 cubi di lato $1/2$ che si ottengono conducendo per il punto $(1/2, 1/2, 1/2)$ i piani paralleli ai piani coordinati.

Ciascuno dei segmenti f_{1,i_1} $(i = 1, \ldots 2^3)$ viene a trovarsi rispetto al cubo C_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ nella stessa condizione del segmento f_1 rispetto al cubo C_1.

Ripetiamo allora in ciascuno dei cubi C_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ la stessa operazione compiuta nel cubo C_1, ben s'intende operando con segmenti di lunghezza metà di quelli considerati in C_1. Otterremo in tal modo 2^6 segmenti f_{1,i_1,i_2} $(i_1, i_2 = 1, \ldots 2^3)$ e 2^6 cubi C_{1,i_1,i_2} $(i_1, i_2 = 1, \ldots 2^3)$. Ripetiamo poi indefinitamente tale operazione.

Sia Q il quadrato unitario $(0 \leq u, v \leq 1)$ del piano uv. Sia (²) Q_1 un quadrato concentrico a Q e ad esso interno. Sia $\overline{Q}_1$ un quadrato concentrico a Q_1 e ad esso interno. Siano B_{1,j_1} $(j_1 = 1, \ldots 2^2)$ i 2^2 quadrati in cui $\overline{Q}_1$ è diviso dalle sue mediane. Sia $\overline{B}_{1,j_1}$ $(j_1 = 1, \ldots 2^2)$ un quadrato concentrico a B_{1,j_1} e ad esso interno. Sia M_{1,j_1} $(j_1 = 1, \ldots 2^2)$ la mediana del quadrato $\overline{B}_{1,j_1}$ parallela all'asse v e siano $R_{1,j_1,1}$, $R_{1,j_1,2}$ i 2 rettangoli contenuti in $\overline{B}_{1,j_1}$ che essa determina. Siano Q_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ 2^3 quadrati ciascuno interno ad un rettangolo $R_{1,j_1,s}$ $(j_1 = 1, \ldots 2^2, s = 1, 2)$ e ad esso concentrico.

Ripetiamo ora su ciascun quadrato Q_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ le operazioni eseguite sul quadrato Q_1. Otteniamo in tal modo 2^6 quadrati Q_{1,i_1,i_2} $(i_1, i_2 = 1, \ldots 2^3)$.

Ripetiamo indefinitamente questa operazione in modo che la somma delle aree dei 2^{3n} quadrati di rango n, $Q_{1,i_1 \ldots i_n}$ $(i_1, \ldots i_n = 1, \ldots 2^3)$ tenda a zero al tendere di n ad infinito.

Definiamo ora una successione di superficie orientate di Frechet del tipo della 2-cella nel seguente modo.

Sia $S_1 \equiv (T_1, Q)$ la superficie così definita.

(T_1, Q) è definita in $Q - Q_1$ in modo che alla corona $Q - Q_1$ corrisponde in modo continuo il quadrato $0 \leq x, y \leq 1$, $z = 0$ con la condizione che al contorno interno della corona corrisponda il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

(T_1, Q) è costante in Q_1 in modo da risultare continua in Q.

Sia $S_2 \equiv (T_2, Q)$ la superficie così definita.

(T_2, Q) coincide con (T_1, Q) in $Q - Q_1$.

(T_2, Q) è definita in $Q_1 - \overline{Q}_1$ in modo da essere continua e da far corrispondere alla corona $Q_1 - \overline{Q}_1$ il filo costituito dal segmento f_1.

(T_2, Q) è definita in $B_{1,j_1} - \overline{B}_{1,j_1}$ $(j_1 = 1, \ldots 2^2)$ in modo da essere continua e da far corrispondere alla corona $B_{1,j_1} - \overline{B}_{1,j_1}$ $(j_1 = 1, \ldots 2^2)$ il filo costituito dal segmento g_{1,j_1}.

(T_2, Q) è definita in ciascuna delle 2^3 corone $R_{1,j_1,s} - Q_{1,i_1}$ $(j_1 = 1, \ldots 2^2, s = 1, 2, i_1 = 1 \ldots 2^3)$ in modo da essere conti-

(²) I quadrati che qui si considerano hanno i lati paralleli agli assi u e v.

nua e da far corrispondere a ciascuna delle corone uno dei fili f_{1,i_1} $(i_1 = 1 \ldots 2^3)$.

(T_2, Q) è infine costante in ciascuno dei 2^3 quadrati Q_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ in modo da risultare continua in Q.

Sia $S_3 \equiv (T_3, Q)$ la superficie così definita.

$$(T_3, Q) \text{ coincide con } (T_2, Q) \text{ in } Q - \sum_{i_1=1}^{2^3} Q_{1,i_1}.$$

In ciascuno dei quadrati Q_{1,i_1} $(i_1 = 1, \ldots 2^3)$ essa è definita operando su Q_{1,i_1} con i fili f_{1,i_1,i_2} $(i_2 = 1, \ldots 2^3)$ così come si è operato sul quadrato Q_1 con i fili f_{1,i_1} $(i_1 = 1 \ldots 2^3)$.

Ripetendo indefinitamente questa operazione si ottiene una successione $S_n \equiv (T_n, Q)$ tale che le trasformazioni (T_n, Q) convergono uniformemente su Q.

Sia (T, Q) la trasformazione limite e sia S la superficie orientata del tipo della 2-cella da essa rappresentata.

14. - Sia Σ^* la superficie orientata del tipo della 2-sfera costituita dal contorno semplice, orientato positivamente del cubo C_1.

Sia $(\mathcal{C}^*, \mathcal{C})$ una rappresentazione di Σ^* in cui $\mathcal{C}(u_\sigma)$ non appartenga alla faccia $0 \leq x$, $y \leq 1$ $z = 0$ di C_1, e sia (T^*, C) la rappresentazione ad essa associata.

Sia R la regione semplice di JORDAN interna a C in cui si rappresenta la faccia $0 \leq x$, $y \leq 1$ $z = 0$ di C_1.

Sia $(\bar{T}, C)$ la trasformazione continua ottenuta da (T^*, C) in questo modo.

$(\bar{T}, C)$ coincide con (T^*, C) in $C - R$; $(\bar{T}, R)$ è equivalente alla trasformazione (T, Q) sopra considerata.

Sia $\Sigma \equiv (\mathcal{C}, \mathcal{C})$ la superficie orientata di FRECHET del tipo della 2-sfera associata a $(\bar{T}, C)$.

Sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in un cubo K contenente nel suo interno il cubo C_1, ivi continua insieme con $f_x(x, y, z)$ e tale che ovunque in K sia $f_x(x, y, z) > 0$.

È subito visto in virtù delle proprietà dell'integrale di Weierstrass esposto nel n. 9 che

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, dy\, dz = \iint_{\Sigma^*} f(x, y, z)\, dy\, dz .$$

Si ha d'altra parte che l'insieme $[\Sigma]$ contiene tutti i punti del cubo C_1.

Infatti l'insieme $[\Sigma]$ è chiuso e C_1 è costituito da punti di accumulazione di $[\Sigma]$.

Ne viene che in ogni punto di K è $O(x, y, z : \Sigma) = 0$; mentre è $O(x, y, z; \Sigma^*) = 1$ se (x, y, z) è interno a $C_1 = 0$ altrimenti.

Ne viene perciò che

$$0 = \iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \Sigma)\, dx\, dy\, dz <$$

$$< \iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \Sigma^*)\, dx\, dy\, dz .$$

Ma la superficie Σ^* verifica tutte le ipotesi del nostro teorema di Gauss-Green per cui è

$$\iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z : \Sigma^*)\, dx\, dy\, dz = -\iint_{\Sigma} f(x\, y\, z)\, dy\, dz .$$

Ne viene quindi

$$\iiint_K f_x(x, y, z) \cdot O(x, y, z; \Sigma)\, dx\, dy\, dz \neq -\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, dy\, dz$$

ciò che prova quanto si è asserito nella introduzione circa la necessità della condizione $|[\Sigma]'| = 0$ per la validità della formula di Gauss-Green con la nozione di punto interno da noi adottata.

15. - La superficie Σ qui considerata è degenere [5]. Ciò può far credere che la condizione $|[\Sigma]| = 0$ non sia più necessaria quando si considerino superficie semplici, cioè superficie che siano l'immagine biunivoca e bicontinua di una 2-sfera orientata.

Basterebbe una modificazione dell'esempio sopra esposto, che sostituisse ai fili da noi adoperati dei tubi di area opportunamente piccola per avere l'esempio di una superficie semplice di area finita secondo LEBESGUE per la quale non vale la formula di GAUSS-GREEN da noi stabilita.

Ciò ci condurrebbe in sostanza ad una superficie del tipo di quella considerata da A. S. BESICOVITCH [2].

BIBLIOGRAFIA

1. P. ALEXANDROFF – H. HOPF: *Topologie*, Berlin, 1935.
2. A. S. BESICOVITCH: *On the definition and the value of the area of a surface*, Quarterly Jl. of Math. Oxford Series 16, 86-102 (1945).
3. L. CESARI : *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*, Mem. Accad. Italia, 13, 1323-1481 (1943).
4. L. CESARI : *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Superiore (2) 13, 77-117 (1944).
5. L. CESARI : *Sulle superficie di Frechet*, Riv. Mat. Univer. Parma. 1, 19-44 (1950).
6. H. FEDERER : *The Gauss - Green Theorem*, Trans. of Amer. Math. Soc. 58, 44-76 (1945).
7. R. G. HELSEL : *Convergence in area and in volume*, Duke Math. Jl. 16, 111-118 (1949).
8. G. C. LORENTZ: *Ueber den Gaussschen Integralsatz*, Ber. Math. Tagung Tübingen 1946, 94-96 (1947).
9. T. RADÓ : *Two-dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity*, Duke Math. Jl. 14, 587-608 (1947).
10. T. RADÓ : *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area*. Trans. of Amer. Math. Soc. 61, 530-555 (1947).