RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

Su alcune proprietà proiettive delle superficie d'ordine $2p+1$ dello S_{p+2}, non rigate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 184-193

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__184_0>

SU ALCUNE PROPRIETÀ PROIETTIVE DELLE SUPERFICIE D'ORDINE $2p+1$ DELLO S_{p+2}, NON RIGATE.

Nota (*) *di* MARIO BALDASSARRI (*a Padova*).

In una nota (1), che apparirà contemporaneamente a questa nella stessa rivista, ho introdotta la nozione di *sistema residuo* di un sistema lineare $|C|$ rispetto una scomposizione razionale di $|C|$ ed ho dimostrato che *ogni superficie d'ordine* $2p+i$, *con* $i \geq 1$, S_{p+i+1}, *non rigata, è una superficie a residuo di un certo genere* π (2), intendendo di riferirsi in tal caso al sistema $|C|$ delle sue sezioni iperpiane, considerando in particolare come superficie a residuo di genere zero quelle nelle quali il sistema $|C|$ è somma di sistemi lineari di curve razionali.

Nel presente lavoro, limitandomi al caso $i = 1$ ed a superficie *di tipo generale,* nel senso che i loro sistemi lineari rappresentativi *non* presentino punti base prossimi, studio un insieme di proprietà che permettono di vedere nelle F_0^{2p+1} a residuo di genere zero la più naturale generalizzazione, in un senso alquanto stretto, delle superficie cubiche di tipo generale.

Comincio col far vedere che, in queste ipotesi, *ogni* F_π^{2p+1} *può rappresentarsi sul piano con un sistema lineare di curve d'ordine minore od eguale a* $p+2$, sistema che risulta riducibile per superficie a residuo di genere $\pi > 0$ ad un sistema d'ordine minimo pari a $p+2-\pi+h$, indicando con h

(*) Pervenuta in redazione il 12 gennaio 1951.

(1) Ricerche sulle superficie d'ordine n dello S_{n-p+1}, Rendic. Sem. Mat., p. 167 di questo volume.

(2) Indichiamo tali superficie col simbolo $F\pi$.

la minima molteplicità dei punti base. Tali sistemi lineari si possono in ogni caso considerare come *somma di un fascio di rette e di un sistema lineare completo di genere* π.

Consegue da ciò che, se $\pi = 0$, sulla superficie si possono trovare *almeno due curve razionali normali d'ordine* p, *sghembe fra loro,* volendo con ciò significare che i loro spazi non stanno in un iperpiano dello S_{p+2}.

Da qui si ricava la possibilità *di rappresentare direttamente* su un piano la superficie, per «*proiezione sghemba*» che abbia quei due S_p come assi, e di ritrovare il sistema lineare rappresentativo nel caso $\pi = 0$.

Infine si dimostra, sempre nel caso $\pi = 0$, che sulla superficie esistono delle reti omaloidiche di curve razionali e normali d'ordine $p + 2$. Esse permettono di estendere la generazione proiettiva di GRASSMANN e CREMONA della superficie cubica, mediante l'impiego di stelle proiettive d'iperpiani.

Dimostro precisamente a questo proposito che *ogni* F^{2p+1} *dello* S_{p+2}, *a residuo di genere zero, può generarsi come luogo delle intersezioni di* $(p+2)$ *stelle d'iperpiani dello* S_{p+2}, *fra loro proiettive in modo che esistano opportune* $(p+2)$ — *ple di spazii omologhi che s'intersechino in degli spazi* S_{ν_i} *con*:

$$\sum \nu_i = 3p + 2, \quad \sum \nu_i^2 = p^2 + 2p + 2 .$$

Ne consegue anche che ogni superficie di quel tipo può ottenersi come *ulteriore intersezione di un certo numero di quadriche aventi in comune un opportuno sistema di spazii.*

Si rilevano anche, nel corso del lavoro, alcune osservazioni relative al massimo numero di rette contenuto in una F_0^{2p+1} di S_{p+2}, a due a due sghembe, e quindi sulla massima dimensione, ben nota per altre vie, di un sistema lineare semplice su una superficie, nonchè sul sistema degli iperpiani $(p+1)$ — tangenti alle F_π^{2p+1}.

1. – Si supponga di avere su un piano un sistema lineare completo di curve d'ordine m, grado $2p + 1$, e genere p, avente punti base semplici o multipli, ma non prossimi. In tali ipotesi sussiste il risultato che abbiamo già dimostrato ([3]), che il sistema $|\varphi^m|$ contiene parzialmente, se ridotto all' ordine minimo, mediante trasformazioni quadratiche, almeno un fascio di rette, ma anzi il teorema può essere approfondito dimostrando che il sistema delle $|\varphi^m|$ dev' essere tale che $m \leq p+2$. Vale cioè il teorema:

TEOREMA 1. - « *Ogni sistema lineare semplice di grado* $2p+1$ *e genere* p, *di tipo generale, può ridursi cremonianamente ad un sistema d'ordine minore od eguale a* $p+2$ ».

Infatti si ha:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum \nu_i = 3(m-1) \\ \sum \nu_i^2 = m^2 - 2p - 1 . \end{array} \right.$$

Se si suppone:

$$(2) \qquad m > p + 2 ,$$

si ha dalle (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \nu_i = 3(m-1) \\ \sum \nu_i^2 > m^2 - 2m + 3 ; \end{array} \right.$$

quindi se, al solito, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_s$:

$$\nu_1 \geq \frac{(m-1)^2 + 2}{3(m-1)} ,$$

e quindi:
$$\nu_1 \geq \frac{m}{3} .$$

Se si pone: $\nu_1 = \frac{m}{3} + i , \quad (i \geq 0)$

([3]) Nota cit. in (1), p. 177.

e si suppone che il sistema $|\varphi^m|$ sia di ordine minimo per trasformazioni quadratiche, dovrà essere:

$$\nu_{j_1} + \nu_{j_2} + \nu_{j_3} \leq m ,$$

per ogni terna dei ν_i, e quindi:

$$\nu_{i_1} + \nu_{i_2} \leq \frac{2}{3} m - i .$$

In tali condizioni si può applicare il lemma che abbiamo altrove dimostrato [4] e si ha con una discussione identica a quella lì eseguita che si cade in un assurdo, cioè la (2) risulta incompatibile con le (1) e con la generalità ammessa nei punti base del sistema.

Ne scende da ciò che tutti i fasci di rette aventi il centro in un punto base del sistema, supposto di ordine minimo, sono parzialmente contenuti nel sistema. D' altra parte se il punto base di minima molteplicità ha ordine $\nu_s = h$, si acquistano nello spezzarsi di una φ^m in una retta per quel punto e una curva residua, $m - h$ punti di collegamento e poichè si ha se π è il genere della curva residua: $p = \pi + (m - h) - 1$, se ne deduce:

$$m = p + 1 - (\pi - h) \qquad (h \leq \pi - 1)$$

che fornisce l' ordine minimo cui si può ridurre il sistema. Si vede che in particolare una F_0^{2r+1} può sempre essere rappresentata sul piano, se generale, con un sistema completo di curve d' ordine minimo $p + 2$.

Si ha inoltre il corollario:

Teorema 1'. - *Ogni sistemà lineare semplice di genere p e grado $2p + 1$, di tipo generale e ordine minimo, può ottenersi sommando un fascio di rette che abbia il centro*

(4) Nota cit. in (1), p. 175.

nel punto di molteplicità minima, pari ad $(h-1)$, *di un sistema lineare di curve d'ordine* $p+h-\pi$ *e genere* π, *al sistema stesso.*

2. - F. ENRIQUES, in una sua antica nota (5), determinò la masssima dimensione di un sistema lineare di curve di genere p contenuto su una superficie, con una serie di opportuni teoremi. Egli accenna ivi alla possibilità di appoggiarsi al procedimento che ora esporremo, ma senza che si capisca il motivo, poi lo abbandona.

Io credo che valga la pena di ritrovare qui quel massimo per tale via naturale che è poi quella seguita da DEL PEZZO nel suo studio (6) sulle F^n dello S_n.

Intanto se si considera la immagine proiettiva di un sistema lineare, semplice, e completo, di curve di genere p, si trova una F^n dello S_{n-p+1}, che si può, per il nostro scopo, suppore d'ordine $> 2p+1$. Quel che si tratta di far vedere è allora in sostanza il massimo valore che può toccare n o, se si vuole, la dimensione $(n-p+1)$ del sistema.

Si osservi perciò che la F^n può proiettarsi da suoi $n-2p-1$ punti indipendenti in una F'^{2p+1} dello S_{p+2}, che verrà a possedere un numero pari a $\rho = n-2p-1$ di rette a due a due sghembe che nel sistema lineare rappresentativo di F' possono pensarsi rappresentate da ρ punti base semplici e distinti. Dunque la nostra questione diviene quella di far vedere quanti punti base semplici può al più avere un sistema lineare di quel tipo. Lo si supponga perciò ridotto all'ordine $p+2$. Facciamo allora vedere che $\rho \leq 2p+3$. Infatti dalle (1) con $m = p+2$, si ha:

$$\sum \nu_i = 3(p+1)$$

$$\sum \nu_i^2 = (p+2)^2 - 2p - 1\,,$$

(5) F. ENRIQUES: *Sulla massima dimensione etc.* ..., Atti Accad. Scienze di Torino, t. 29, 1894.

(6) DEL PEZZO: *Sulle superficie d'ordine n immerse etc.* ..., Rendic. Circ. Mat. Palermo, T 1.

da cui ponendo:

$$\nu_{s-(2p+2)} = \dots \quad \nu_{s-1} = \nu_s = 1 \, ,$$

si ha per i ν_i' residui:

$$\begin{cases} \sum \nu_i' = p \\ \sum \nu_i'^2 = p^2 . \end{cases}$$

Da queste risulta che i ν_i' devono ridursi ad un unico $\nu_1' = p$. Cioè per $p > 1$ non possono esservi altri punti base semplici, ed anzi il valore $2p + 3$ stesso e raggiunto solo nel caso che le curve siano iperellittiche.

La conclusione su cui non insistiamo per la sua evidenza vale a maggior motivo qualora il sistema potesse ridursi ad un ordine minimo $< p + 2$. Anzi allora il massimo $2p + 3$ non potrebbe neppure essere raggiunto.

Si ritrova dunque così che il massimo richiesto è il ben noto numero $3p + 5$.

3. - Torniamo, dopo questa digressione, al nostro studio. Notiamo intanto che fra i gradi n_1 ed n_2 dei due sistemi in cui si può scomporre il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di una F_π^{2p+1} vale la relazione (7):

$$n_1 + n_2 = 2\pi - 1 \, . \tag{3}$$

Se C_1 e C_2 sono le due curve esse stanno rispettivamente in spazii $S_{p-n_2+\pi}$ e S_{p-n_1}, la cui intersezione tenendo conto della (3) è uno spazio di dimensione: $p - \pi$. Poichè i punti di collegamento sono esattamente $p - \pi + 1$ si ha che essi sono linearmente indipendenti.

La proprietà osservata può invece non essere più vera se riferita, anzichè ai punti di collegamento, al gruppo delle interse-

(7) Cfr. nota cit. (1), p. 181.

zioni di C_1 e C_2, poichè in questo possono apparire punti limiti di punti che erano già multipli per C prima di spezzarsi.

Comunque possiamo concludere che *su una F_π^{2p+1} i punti di contatto propri degli iperpiani* $(p - \pi + 1)$ — *tangenti sono indipendenti.*

4. - Supporremo sempre d'ora in poi, $\pi = 0$. In tal caso la F_0^{2p+1} è rappresentabile sul piano da un sistema lineare di $|\varphi^{p+2}|$, ottenuto sommando un fascio di rette con una C^{p+1} razionale isolata non passante pel centro del fascio e tale che le molteplicità base massime ν_1, ν_2, ν_3 soddisfino alla $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = p + 2$ (8).

La C^{p+1}, isolata nel sistema somma, possiede certamente due punti base semplici e quindi il sistema di φ^{p+2} possiede almeno tre punti base semplici A, B e C. I tre fasci di rette di centri A, B e C sono allora immagini di tre fasci di curve razionali e normali C^{p+1} (Cfr. n^o. 3) segate sulla F_0^{2p+1} da tre fasci d'iperpiani aventi il centro in tre spazi S_p risp. α, β e γ che contengono una C^p pure razionale e normale, immagine della curva residuo del rispettivo fascio di rette rispetto $|\varphi^{p+2}|$.

Gli spazi α, β e γ sono a due contenuti iperpiani. Se poi si considerano le tre rette a, b, c lati del triangolo $A\,B\,C$, ad esse corrispondono fuori delle rette immagini di A, B e C altre tre C^p razionali normali che staranno in tre S_p α^*, β^* e γ^*. È chiaro inoltre che ad esempio α^* è sghembo con β e γ, etc..., mentre α^*, β^*, γ^* sono a due a due contenuti in un iperpiano.

Fissiamo allora ad esempio i due S_p α^* e β sghembi. Si prenda nello S_{p+2} un piano η, generico rispetto α^* e β, cioè tale da tagliare entrambi in un solo punto P' e Q' rispettivamente. Si consideri un punto X di F esterno ad α^* e β. Esiste uno ed un solo S_p che passa per X e taglia α^* e β secondo degli S_{p-1}, che si costruisce come intersezione dei due iperpiani passanti per X e risp. per α^* o β.

Tale S_p taglia il piano η in un punto X'. Viceversa lo S_p che passa per un generico punto X' di η ed incide α^* e β secondo degli S_{p-1}, sega F in $2p + 1$ punti, p dei quali sono

(8) Perchè altrimenti l'ordine sarebbe riducibile.

in α^* e p ancora in β. Quindi resta una sola intersezione residua X. In tal modo si ottiene dunque *un modo diretto di rappresentare la superficie F_0^{2p+1} su un piano per «proiezione sghemba»*.

È facile ritrovare così il sistema lineare immagine di F_0^{2p+1}. Infatti i punti P' e Q' saranno immagini delle curve residue delle C^p contenute in α^* e β, e quindi saranno multipli d'ordine $p+1$ per le curve ψ del sistema. La retta $P'\,Q'$ è evidentemente fondamentale per $|\psi|$, e quindi le ψ dovranno essere d'ordine $2p+2$. Inoltre lo $S_p\,\alpha$ incide sia α^* sia β in uno S_{p-1}, e quindi la sua traccia R' su η è immagine della C^p contenuta in α, e quindi è p—*plo*, e si può anche dire che le ψ avranno come punto base semplice il punto traccia su η della retta che completa la sezione iperpiana $\alpha+\alpha^*$ o $\alpha+\beta$. Si trova dunque un sistema di curve ψ d'ordine $2p+2$, aventi due punti base $(p+1)$—*pli*, uno p—*plo*, ed altri punti base fra i quali almeno uno semplice.

Una evidente trasformazione quadratica, trasforma poi questo sistema in quello delle φ^{p+2} con tre punti base almeno semplici. Risulta anche chiaro che, a meno che F_0 non sia a curve sezioni iperellittiche i due $S_p\,\alpha^*$ e β non possono avere altri S_p incidenti in spazi S_{p-1} e contenenti una C^p, e in quel caso potrebbero al più esservene due.

Non ci soffermiamo qui sulle ovvie deduzioni e studi che si potrebbero fare sulle F_0^{2p+1} sviluppando questa loro rappresentazione.

5. - Come ultimo argomento svilupperemo un metodo di generazione proiettiva delle F_0^{2p+1} che estende elegantemente la ben nota generazione di Grassmann-Cremona della F^3, e che consentirebbe ampi sviluppi, che però esorbiterebbero dalla linea di questo lavoro, e su cui quindi qui non ci soffermeremo.

Cominciamo con l'osservare che la rete delle rette del piano è immagine di una rete omaloidica di curve d'ordine $p+2$, secanti su una generica sezione iperpiana C una serie completa e non speciale g^2_{p+2} (9).

(9) Nota cit. in (1), p. 182.

Consideriamo $p+1$ punti giacenti su una curva ρ della rete, e lo S_ρ che li contiene. Questo S_p, che diciamo λ taglia la F_0 in $2p+1$ punti e quindi fuori di quei $p+1$ punti in altri p punti che giacciono in uno S_{p-1}, α_1; se si considerano allora gli S_p passanti per α_1 essi segano F_0 secondo una serie ∞^2 di gruppi di $p+1$ punti. È facile vedere che questa serie ha ogni suo gruppo giacente su una curva della rete; basta infatti tenere conto che entro un iperpiano passante per λ e per un altro S_p per α_1, gli S_p per α_1 segano una g^1_{p+1} sulla sezione iperpiana C, che è quella stessa che viene segata dalle curve della rete passanti per il punto R di C, residuo della g^2_{p+2} rispetto il gruppo segato da λ.

Si supponga ora di fissare $p+2$ S_{p-1} del tipo di α_1, e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+2}$. Si associ ad uno S_p della stella di centro α_1, quello S_p di ciascuna delle altre stelle che è $(p+1)$ — secante la stessa curva della rete (è chiara la unicità di tali S_p). Si ottiene così una corrispondenza biunivoca senza eccezioni fra quelle stelle prese a due a due: si tratta quindi di omografie, che inducono delle omografie π_{ik} fra le stelle d'iperpiani aventi i centri rispettivamente in α_i e α_k.

Poichè se si considerano $(p+2)$ fasci d'iperpiani legati nelle suddette proiettività π_{ik} le intersezioni degli spazi omologhi generano proprio una curva C^{p+2} della rete, si ha che le intersezioni degli spazii omologhi delle stelle generano la F_0^{2p+1}.

È però facilmente visto che il luogo di quelle intersezioni non è esaurito dalla F_0^{2p+1}. Infatti se si considerano le curve fondamentali della rete, che hanno per immagine sul piano i punti base del sistema $|\varphi^{p+2}|$, gli spazii di queste curve compaiono nel luogo, in quanto essi impongono una sola condizione. Ciò permette di prevedere che la generazione indicata non sarà senz'altro invertibile, cioè che le proiettività π_{ik} dovranno essere opportunamente scelte.

6. – Supponiamo ora, viceversa, di assumere nello S_{p+2}, $p+2$ stelle d'iperpiani di centri α_i legate da certe omografie π_{ik}, generiche.

È allora ben noto ([10]), ed è del resto immediatamente rica-

([10]) Cfr. ad es., T. G. Room: *Determinantal Loci*. Cambridge, p. 43.

vabile con un procedimento diretto che ho altrove indicato ([11]), che le intersezioni degli iperpiani analoghi generano una superficie irriducibile d'ordine $\binom{p+2}{2} = 2p + 1 + \binom{p}{2}$ immagine del sistema lineare piano ottenuto aggiungendo ad un fascio di rette una C^{p+1} isolata con soli punti base semplici e non passante per il centro del fascio.

Seguendo un metodo che ho adoperato in un caso analogo ([12]), si vede che imporre alla C^{p+1} un punto base ν_i — *plo* equivale ad imporre alle $\pi_{i\alpha}$ di essere tali che una $(p + 2)$ — *plo* di iperpiani analoghi si taglino in uno S_{ν_i}, e che ciò porta un abbassamento nell'ordine pari a $\binom{\nu_i}{2}$. Se quindi questo processo è proseguito sinchè la C^{p+1} diviene razionale, cioè sinchè: $\binom{p}{2} = \sum \binom{\nu_i}{2}$, il luogo si riduce ad un certo numero di spazi di certe dimensioni e ad una F_0^{2p+1}.

Si può dunque concludere col teorema:

Teorema 2. – «*Ogni F_0^{2p+1} è generabile in modo impuro come luogo delle intersezioni di $(p+2)$ stelle omografiche d'iperpiani dello S_{p+2}, e viceversa $(p+2)$ stelle di tale tipo generano una F_0^{2p+2} perchè esistano delle $(p + 2)$ – ple d'iperpiani omologhi secantisi in certi spazi S_{ν_i}, con*:

$$\begin{cases} \sum \nu_i = 3p + 2 \\ \sum \nu_i^2 = p^2 + 2p + 2 \text{»} \end{cases}$$

Da classici risultati ([13]) consegue anche il teorema:

Teorema 2'. – *Ogni F_0^{2p+1} dello S_{p+2}, si può ottenere come intersezione residua di $p + 2$ quadriche dello S_{p+5}, aventi in comune quello S_{p+2}, ed altri spazi S_{ν_i+3} con le ν_i legate dalle relazioni precedenti*».

([11]) M. Baldassarri: *Su una classe di superficie etc...*, Ann. di Mat., T. 31, (1950), n°. 13.

([12]) Mem. cit. sopra, n°. 14.

([13]) Cfr. ad es., trattato cit. in (9), p. 44.