RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

Ricerche su certe classi di superficie d'ordine n dello S_{u-p+1}

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 167-183

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__167_0>

RICERCHE SU CERTE CLASSI DI SUPERFICIE D'ORDINE n DELLO S_{u-p+1}

Nota (*) *di* MARIO BALDASSARRI (*a Padova*).

Famosi sono i bei risultati di CASTELNUOVO (1) e di ENRIQUES (2) sulla caratterizzazione invariantiva delle F^n dello S_{n-p+1}, per $n > 2p - 2$, che costituiscono una brillante applicazione della teoria dell'aggiunzione su una superficie.

Tuttavia è riconoscibile, io ritengo, in quelle dimostrazioni, l'impiego di strumenti qualitativamente più ricchi di quanto non siano le questioni da risolvere che in sostanza trovano la loro verità in semplici concetti fondamentali di pura natura strutturale e topologica. Pertanto mi sembra che non si debba abbandonare l'idea di ridimostrare quel teorema con metodi che non esprimano niente di più di quanto occorre alla tesi da dimostrare.

È nel corso di ricerche su tale linea che ho incontrato alcune notevoli proprietà, il cui studio si presenta necessario per aprire la strada a quella indagine e che espongo in questo lavoro.

Presa una superficie F d'ordine n, s'introduce anzitutto il concetto di *scomposizione razionale* del sistema $|C|$ delle sue sezioni iperpiane, indicando con tale nome una scomposizione additiva di $|C|$ in sistemi lineari di curve razionali più un sistema residuo e quello di *superficie a residuo di genere* π, chiamando così quelle superficie che ammettono una scomposizione razionale in cui il residuo abbia genere π. Con opportune avvertenze tale carattere resta unicamente definito rispetto la superficie F.

(*) Pervenuta in Redazione il 9 gennaio 1951.

(1) G. CASTELNUOVO: *Memorie scelte,* pp. 443 e sg.

(2) F. ENRIQUES: *Le superficie algebriche,* pp. 230 e sg.

Dopo di ciò dimostro il teorema che *tutte le* F^n *dello* S_{n-p+1}, *con* $n > 2p$, *non rigate, sono superficie a residuo di un certo genere* π. Nella dimostrazione di tale teorema soccorre la razionalità, ammessa, della superficie e quindi esso è in sostanza un teorema che *caratterizza la struttura dei sistemi lineari piani di curve di grado* n *e genere* p, *con* $n > 2p$.

Esiste dunque su ogni F^n con $n > 2p$, non rigata, un sistema lineare (almeno fascio) di curve razionali, contenuto parzialmente nel sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane: e questa è la conclusione più importante. Infatti sarà allora possibile, viceversa, presa una F^n dello S_{n-p+1}, con $n > 2p$, non rigata, pervenire a quel sistema con la semplice imposizione di successivi punti doppi alle curve C di $|C|$. Dimostrare, indipendentemente dalla razionalità di F, l'esistenza di questo sistema di curve razionali, significherebbe allora compiere un passo notevole nella linea che abbiamo sopra dichiarata: ed ora che tale esistenza è accertata non deve essere troppo difficile superare quei punti critici che si presenterebbero nella dimostrazione, sfruttando sopratutto l'idea dei sistemi lineari in piccolo, approssimanti un sistema algebrico nell'intorno d'una sua curva.

Nel lavoro trovano poi posto alcune proprietà laterali, fra le quali una interessante caratterizzazione delle superficie *a residuo di genere zero,* che, come si fa vedere, rappresentano il caso più regolare, nonchè alcune osservazioni a carattere proiettivo sull'indice di composizione delle superficie in esame.

1. - Se F^n indica una superficie irriducibile d'ordine n, normale in uno spazio S_{n-p+1}, supporremo in tutto il seguito *che* n *sia maggiore di* $2p$.

La superficie contiene in tale caso un sistema lineare di curve C, e precisamente le sezioni iperpiane, che ha dimensione maggiore del genere. Per un classico criterio la superficie è in tal caso o razionale o riferibile a rigata: ammetteremo d'ora in poi *la regolarità di* F, e quindi la sua razionalità.

Poichè la serie caratteristica del sistema $|C|$, completo, è una g_n^{n-p} che per essere $n > 2p$ è certo non speciale, resta garantito che le curve C sono di genere p, normali in S_{n-p}.

Quando sarà conveniente diremo φ le curve immagini delle C su un piano, e $|\varphi|$ il loro sistema, di cui F sarà l'immagine proiettiva.

2. - Indichiamo ora con Γ il sistema $|C|$. S'imponga alle curve C di Γ l'acquisto di un nuovo punto doppio *variabile*, cioè oltre quelli che la generica C può già possedere, mobili su eventuali linee multiple della superficie F.

Siano C_1 le curve che così si ottengono, e sia Γ_1 il loro sistema che risulterà algebrico e, forse, composto di più componenti irriducibili. In tal caso conveniamo senz'altro che ancora Γ_1 indichi una componente di dimensione massima.

Si proceda ora ad imporre un nuovo punto doppio variabile alle curve C_1 di Γ_1 e così via. In generale si può definire induttivamente il sistema Γ_i formato di curve C_i, come l'insieme delle curve C_{i-1} di Γ_{i-1} possedenti almeno un punto doppio in più della generica fra esse.

Si riesce così a costruire una catena di sottosistemi di Γ, tali che la generica curva di ciascun sistema della catena presenta un genere che risulta decrescente al crescere di i. Poichè poi la imposizione di un punto doppio variabile impone al più una condizione, il sistema Γ_i avrà esattamente dimensione $\delta_i = n - p - i + 1$, e quindi $\delta > p - i + 1$, ed in particolare per Γ_{p+1}, si ha $\delta_{p+1} > 0$. Noi termineremo la catena dei Γ_i al sistema Γ_{p+1}, che è ancora almeno semplicemente infinito.

È naturale che può succedere che la imposizione di un punto doppio alle C_{i-1}, conduca a curve C_i che acquistino più di *un* punto doppio, ad esempio ν_i punti doppi. Ne segue che le C_{p+1} potrebbero avere acquistato in tutto un certo numero $N = p + 1 + \Sigma \nu_i \geq p + 1$ di punti doppi.

3. - Nella catena $\{\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_i, \ldots\}$ s'incontra certo per un conveniente $i \leq p + 1$, un sistema Γ_i formato di curve riducibili, e tale che Γ_{i-1} sia invece formato di curve irriducibili. Infatti o ciò avviene per $i \leq p$, ovvero la C_p sono curve razionali irriducibili, in quanto le C avevano genere p, e, senza spezzarsi, hanno acquistato p punti doppi: ma in tal caso la imposizione di un ulteriore punto doppio fa certamente spezzare le C_p, e quindi le C_{p+1} sono riducibili, ed anzi in tal caso le componenti sono razionali.

Sia allora $C_i \equiv D' + D''$, una curva spezzata in due certe componenti D' e D''. Per la regolarità di F si può affermare che sia D' che D'' varieranno in due sistemi lineari completi di generi rispettivamente eguali a quelli di D' e D'', perchè altrimenti vi sarebbero delle curve di $|C|$ spezzate formanti un sistema più ampio di Γ_i, contro la ipotesi che Γ_{i-1} sia formato di curve irriducibili. Ciò praticamente significa che ad esempio D' non possiede punti multipli variabili, e che quindi tutti i punti multipli acquisiti dalla C_i si presentano come punti di collegamento fra D' e D''.

Concludendo: l'operazione d'ingiunzione di successivi punti doppi variabili concede di individuare in ogni caso su F un sistema lineare (anzi due) parzialmente contenuti nel sistema $|C|$ delle sue sezioni iperpiane.

È ovvio osservare che la mancanza di punti multipli variabili non su linee multiple di F, si presenta come condizione necessaria e sufficiente a priori per la linearità di quei sistemi: e l'osservazione ha interesse perchè probabilmente con metodi di natura differenziale, sarebbe concesso di compiere l'indagine prescindendo dalla ipotesi di regolarità.

4. – Ha ora interesse soffermarsi sui caratteri dei nuovi sistemi lineari $|D'|$ e $|D''|$. Se (n_1, π_1, δ_1) e (n_2, π_2, δ_2) sono rispettivamente grado, genere e dimensione dei due sistemi, poichè il sistema $|C|$ si presenta come somma dei sistemi $|D'|$ e $|D''|$, cioè: $|C| = |D' + D''|$, si hanno le relazioni:

$$n = n_1 + n_2 + 2j$$

$$p = \pi_1 + \pi_2 + j - 1$$

$$\delta_1 = n_1 - \pi_1 + 1$$

$$\delta_2 = n_2 - \pi_2 + 1,$$

e quindi la dimensione δ di Γ_i sarà:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = n_1 + n_2 - \pi_1 - \pi_2 + 2 = n -$$

$$- p + 1 - i > p - i + 1 = \pi_1 + \pi_2 + j - i,$$

dove con $j \geq i$ si è indicato il numero dei punti doppi acquisiti effettivamente dalle C_i rispetto le C.

Se, quindi, $j > i$, si è senz'altro rispetto D' o D'' nella condizione in cui si era per $|C|$, cioè ad esempio si avrà: $\delta_1 > \pi_1 + 1$, e sarà quindi possibile formare a partire da quel sistema $|D| \equiv |D'|$, una nuova catena di riduzione: $\{|D|, |D_1|, \ldots, |D_s|\}$.

Se invece $j \leq i$, ciò non si può senz'altro affermare, e noi lo ammetteremo momentaneamente. Cioè ammetteremo che si ripresenti la situazione favorevole che concede di costruire la nuova catena, e di pervenire quindi ancora a due altri sistemi lineari parzialmente contenenti in D. Si ammetta allora che questa operazione si possa sempre ripetere. I generi dei successivi sistemi lineari costituiscono un sistema di numeri decrescenti, a meno che non s'incontri ad un certo momento un sistema lineare componente al termine di una certa catena che sia formato di curve razionali: infatti è sempre, ad esempio, $p \geq \pi_2$, poichè per un ben noto principio $j \geq 1$, e può essere $p = \pi_2$ solo se $\pi_1 = 0$. E pertanto, sempre ammesso che sia lecito spingere opportunamente innanzi il processo, si perviene a costruire o un sistema di curve razionali (lineare) contenuto in $|C|$, o una successione di sistemi lineari, ognuno contenuto nel precedente, e di genere decrescente, che potrà arrestarsi solo quando si giunga ancora ad un sistema di genere zero.

Concludendo: *L'ipotesi ammessa di poter proseguire la formazione di successive catene riducenti, conduce a dimostrare l'esistenza sulla superficie F di un sistema lineare di curve razionali almeno semplicemente infinito, contenuto parzialmente nel sistema* $|C|$ *delle sue sezioni iperpiane.*

Dimostrare quindi, senza usufruire del teorema di Castelnuovo sulle razionalità delle superficie in esame, la verità di quella ipotesi varrebbe dire, con una immediata applicazione del criterio di Noether, dimostrare nuovamente quel teorema partendo da un punto di attacco molto più elementare e forse più aderente ai termini della questione, che mi sembra, insieme a molte altre analoghe, essere assai più di natura dimensionale, che non qualitativa: nè darebbe disturbo una leggera limitazione che qui abbiamo seguita perchè più consona ai nostri scopi speciali, e del resto facilmente eliminabile.

Senonchè prima di tentare una tale via, vale certo la pena di garantirsi a priori, della verità della ipotesi, cioè di vedere se è vero che ogni F^n dello S_{n-p+1}, con $n > 2p$, regolare, contenga un sistema lineare di curve razionali entro il sistema $|C|$ delle sue sezioni iperpiane. A tale fine si può senz'altro ammettere la razionalità della superficie, e quindi la sua rappresentabilità piana. È chiaro allora che risulterà anche dimostrata la possibilità di costruire una successione di catene riducenti nella situazione precisata prima.

A tale ricerca, importante oltre che per aprire una strada ad una nuova dimostrazione del teorema di Castelnuovo, anche per il suo proprio valore conoscitivo, dedichiamo il resto di queste ricerche, insieme alla esposizione di alcune notevoli proprietà collegate.

5. - Prima di procedere conviene soffermarsi un momento per dare opportune convenzioni e definizioni che renderanno più agile e comoda l'esposizione.

Anzitutto qualora sia possibile staccare da $|C|$ diversi sistemi di curve razionali, in diverse componenti irriducibili massime dei sistemi che successivamente si considerano, sceglieremo fra essi quello tale che il sistema residuo abbia *genere minimo* e a parità di genere, grado minimo. Con ciò, ammesso che esista, resta fissato in modo unico il grado e il genere del sistema residuo che diremo $|C'|$. Potrà essere che da $|C'|$ si possa staccare ancora un sistema di curve razionali, sempre nuovamente definito con le convenzioni analoghe a quelle fatte per $|C|$. In definitiva si arriverà ad un ultimo sistema residuo $|\rho|$ da cui non si potranno più staccare sistemi di genere zero, e che sarà di un certo genere π. In definitiva il sistema $|C|$ si può pensare in tal caso espresso nella forma additiva:

$$(1)\quad |C| = |(C - C') + (C' - C'') + \ldots + (C^{(s-1)} - C^{(s)}) + \rho|,$$

in cui i sistemi $|C^{(i-1)} - C^{(i)}|$ sono tutti sistemi *effettivi* di genere zero e $|\rho|$ ha genere π.

Una scomposizione del tipo (1) sarà detta una scomposizione razionale di $|C|$ rispetto l'operazione di somma, ed il sistema $|\rho|$ si dirà semplicemente « *residuo della superficie* F ». Si può quindi dopociò enunciare la seguente definizione:

« *Una superficie* F^n *normale in un certo spazio si dice a residuo di genere* π, *quando il suo resto rispetto una scomposizione razionale del sistema delle sezioni iperpiane, ha genere* π ».

Se in particolare: $\pi = 0$, lo stesso resto mancherebbe, ma per uniformità diremo ancora in tal caso che la F ha residuo di genere zero. Indicheremo d'ora in poi una superficie di residuo di genere π, col simbolo F_π.

La scomposizione (1) non è necessariamente unica neppure con le convenzioni fissate; sono però unicamente definiti i caratteri dei sistemi componenti, cioè i due simboli $(n, n', \dots, n^{(s)}, r)$ e $(p, p', \dots, p^{(s)}, \pi)$ rappresentativi rispettivamente dei gradi e dei generi dei successivi sistemi residui.

Si noti che i successivi sistemi razionali componenti si possono effettivamente staccare per proiezione di F dallo spazio di una curva $(C - C')$, in una superficie F' di grado n' a curve sezioni di genere p', e così via, almeno sinchè s'incontrino sistemi di dimensione ≥ 2, il che è sempre vero se $\pi \neq 0$. Infatti allora se $|C^{(s)}| = |(C^{(s)} - \rho|$, si ha: $p^{(s)} = \pi + h - 1$, $\delta_\rho = n_\rho - \pi + 1$, e poichè se $|\rho|$ è un fascio: $\delta_\rho = 1, n_\rho = 0$, si ha $\pi = 0$.

Da tale punto di vista gli interi $n, n', \dots, n^{(s)}$ si presentano come successivi *ordini* della F e delle sue proiezioni $F', F'', \dots F^{(s)}$ del tipo precisato.

Infine chiameremo *indice* (di composizione) di F il numero s dei sistemi di curve razionali che compaiono nella scomposizione razionale di $|C|$.

6. – Dopo queste premesse, passiamo a dimostrare il seguente teorema, che nell'ordine di idee che abbiamo si presenta come fondamentale.

Teorema 1. – « *Ogni superficie regolare* F^{2p+i}, *con* $i > 0$, *dello* S_{p+i+1} *ammette una scomposizione razionale, e quindi appartiene alla classe delle* F_π, *ammettendo residuo di un certo genere* π ».

Come si è avvertito, daremo del teorema una dimostrazione che presuppone la razionalità della F. Si supponga allora di rappresentare la F su un piano mediante un sistema lineare (completo, di curve φ d'ordine m, genere p e grado $2p+i$. S'imponga innanzitutto a questo sistema di possedere ulteriori $i-1$ punti base semplici, in posizione generica. Si ottiene allora un sistema di grado $2p+1$. È chiaro che se la F^{2p+1} rappresentata da questo sistema è a residuo, a maggior motivo lo è la F^{2p+i}, e quindi condurremo la dimostrazione per esso. Si tratta quindi di far vedere che nel sistema delle φ di grado $2p+1$ è parzialmente contenuto un fascio (almeno) di curve razionali ϕ.

Qui si presenta essenziale una osservazione. Si può senz'altro supporre che il sistema delle $|\varphi^m|$ sia a punti base distinti, perchè se esso avesse una o più singolarità base, comunque complicata, si può sempre pensarlo come sistema limite di un altro con singolarità ordinarie nei punti base ([3]), e ciò per una importante proprietà delle singolarità straordinarie di potersi pensare come limiti di punti ordinari che tendono ad avvicinarsi.

Un tale processo continuo non altera le caratteristiche algebriche del sistema in fatto di gradi, genere e riducibilità, e quindi se nelle posizioni prossime alla posizione limite, il nostro sistema contiene parzialmente un fascio (almeno) di curve razionali, anche il sistema limite contiene un tale fascio.

Perciò supponiamo senz'altro che il sistema $|\varphi^m|$ di genere p e grado $2p+1$ presenti certi punti base $\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots, \nu_s$ multipli e non prossimi.

Valgono intanto le relazioni di postulazione:

$$(2)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} - \displaystyle\sum_1^s \dfrac{\nu_r(\nu_r-1)}{2} \\[2ex] 2p+1 = m^2 - \displaystyle\sum_1^s \nu_r^2 , \end{cases}$$

([3]) Cfr. Enriques Chisini: *Teoria geom. delle equaz.*, vol. III°, p. 445.

da cui si hanno subito le relazioni:

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum_1^s \nu_r = 3(m-1) \\ \sum_1^s \nu_r^2 = m^2 - 2p - 1 . \end{cases}$$

A tal punto conviene dimostrare un lemma, di carattere aritmetico, che consente di agevolare la nostra dimostrazione.

7. - Lemma I° - « *Ogni scomposizione additiva di un numero* $A > 0$, *del tipo* $A = \Sigma \nu_i$, *tale che ogni* $\nu_i \leq h$, *con* ν_i *numeri positivi, è tale che*:

$$\Sigma \nu_i^2 \leq A \cdot h \text{ ».}$$

La proprietà, che abbiamo ennunciata per comodità, è evidente.

Lemma II° - « *Ogni scomposizione additiva di un numero positivo* A, *del tipo* $A = \Sigma \nu_i$, *con* $\nu_i > 0$, *tale che*: $\nu_{j1} + \nu_{j2} + \ldots + \nu_{jr} \leq h$, *per ognuna delle combinazioni ad* r *ad* r *delle* ν_i *e per* $h < \dfrac{A}{r-1}$ ($h < \infty$ *se* $r = 1$) *è tale che*:

$$\sum \nu_i^2 \leq A \cdot \frac{h}{r} \text{ ».}$$

Dimostreremo il lemma procedendo con induzione su r. Per $r = 1$ il teorema coincide col lemma I°, e quindi è vero. Sia esso vero pel valore r, e dimostriamolo pel valore $r + 1$. Si pensi in tal caso di fissare ad esempio ν_1. Allora per la somma $\sum_2 \nu_i^2$ si avrà, pel teorema ammesso vero per r, e tenendo conto che ora $\nu_{j1} + \nu_{jr} + \ldots + \nu_{jr} \leq h - \nu_1$:

$$\sum_2 \nu_i^2 \leq (A - \nu_1) \cdot \frac{h - \nu_1}{r} .$$

e quindi:

$$\sum_1 \nu_i^2 \leq \nu_1^2 + (A - \nu_1) \cdot \frac{h - \nu_1}{r} ;$$

cioè:

$$\sum_1 \nu_i^2 \leq \frac{1}{r} \left\{ (r+1)\, \nu_1^2 - (h + A)\, \nu_1 + h\, A \right\} = \frac{1}{r}\, \psi(\nu_1) ,$$

con ovvio significato del simbolo $\psi(\nu_1)$. D'altra parte le scomposizioni $\Sigma \nu_i$ possono essere suddivise in due classi: una, formata da quelle per le quali tutte le $\nu_j \leq \frac{h}{r+1}$, l'altra dalle rimanenti. Per le prime l'asserto consegue senz'altro dal lemma I^o; per le seconde, pensando a ν_1 come al maggiore delle ν_i si avrà: $\nu_1 \geq \frac{h}{r+1}$.

Inoltre:

$$\nu_1 \leq h \cdot \frac{r+1}{r+1} \leq \frac{h}{r+1} + \frac{A}{r+1},$$

e quindi:

$$\nu_1 (r + 1) - h - A \leq 0 ,$$

da cui segue che l'espressione $\psi(\nu_1) = \nu_1 \left\{ \nu_1 (r+1) - h - A \right\} + h\, A$ è funzione decrescente di ν_1 e quindi: $\psi\left(\frac{h}{r+1}\right) > \cdot\, \psi(\nu_1)$, per $\nu_1 \geq \frac{h}{r+1}$. Ed infine la tesi:

$$\sum \nu_i^2 \leq A \cdot \frac{h}{r+1} .$$

8. – Dopo questa parentesi possiamo affrontare la dimostrazione che abbiamo già enunciata in riferimento ai simboli della fine del n. 6.

Nelle ipotesi in cui ci siamo posti dimostreremo più precisamente il teorema:

TEOREMA 1'. – « *Ogni sistema lineare di curve, completo, di genere p e grado $2p+1$, avente singolarità non prossime nei punti base può essere cremonianamente trasformato in un sistema lineare contenente parzialmente (almeno) un fascio di rette o nel sistema delle C^9 con otto punti base tripli* ».

Procederemo per assurdo. Si supponga che nel sistema $|\varphi^m|$ non sia contenuto parzialmente un fascio di rette. Dovrà allora evidentemente essere, se, come usuale, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_{s-1} \geq \nu_s$:

$$m - \nu_1 + 1 > p + 2. \tag{3}$$

D' altra parte si ha; dalle (2):

$$\nu_1 \cdot \sum \nu_r - \sum \nu_r^2 = 3\nu_1(m-1) - m^2 + 2p + 1 \geq 0,$$

e quindi:

$$\nu_1 \geq \frac{m^2 - 2p - 1}{3(m-1)}. \tag{4}$$

Confrontando la (3) con la (4), si ha per il genere p:

$$p < \frac{2}{3}m - \frac{8}{9} - \frac{4}{9(3m-5)},$$

e quindi:

$$p < \frac{2}{3}m, \tag{5}$$

ed ancora dalla (4):

$$\nu_1 \geq \frac{m}{3}. \tag{6}$$

Si ha quindi:

$$\begin{cases} \sum \nu_r^2 \geq m^2 - {}^4/_3\, m - 1 \\ \sum \nu_r = 3(m-1). \end{cases} \tag{7}$$

D'altra parte possiamo supporre che sia $\nu_{j1} + \nu_{j2} + \nu_{j3} \leq m$, per ogni terna di ν_i, perchè altrimenti nelle nostre ipotesi il sistema $|\varphi^m|$ sarebbe riducibile ad un sistema d'ordine inferiore con trasformazioni quadratiche, e noi possiamo supporre che $|\varphi^m|$ sia di ordine minimo rispetto tali trasformazioni.

Ma allora se si pone:

$$\nu_1 = \frac{m}{3} + h,$$

con $h > 0$ per la (6), si avrà: $\nu_{j1} + \nu_{j2} \leq \frac{2}{3} m - h$ per tutte le coppie scelte fra le $\nu_2, \ldots, \nu_1$. Applicando allora il lemma II° (per $r = 2$) si ha:

$$\sum_1^s \nu_r^2 \leq \left(\frac{m}{3} + h\right)^2 + \left\{3(m-1) - \left(\frac{m}{3} + h\right)\right\}\left\{\frac{m}{3} - \frac{h}{2}\right\}.$$

Da qui:

$$\sum_1^s \nu_r^2 \leq m^2 - m - h\left\{m - \frac{3}{2} h - \frac{3}{2}\right\} = \varphi(h).$$

Poichè si ha:

$$\frac{m}{3} + h \leq m - 1,$$

segue:

$$m - \frac{3}{2} h - \frac{3}{2} \geq 0,$$

e quindi $\varphi(h)$ è funzione decrescente di h, e quindi, se $h \geq 1$, si ha:

$$\sum_1^s \nu_r^2 \leq \varphi(1) = m^2 - 2m + 3,$$

e per la (7):

$$m^2 - {}^4/_3\, m - 1 \leq m^2 - 2m + 3,$$

che è evidentemente assurda. Quindi siccome $h \geq 0$, non resta che da supporre: $h = 0$. Pertanto dalle ipotesi poste consegue:

$$\nu_1 = \frac{m}{3}, \nu_i \leq \frac{m}{3} \quad (i \geq 2).$$

Siano allora ad esempio t le ν_i eguali ad $\frac{m}{3}$, cioè sia:

$$\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_t = \frac{m}{3}.$$

Sarà allora:

$$\nu_i \leq \frac{m}{3} - 1 \quad (i > t).$$

Un'altra applicazione del lemma I° fornisce:

$$\sum \nu_i^2 \leq s \cdot \frac{m^2}{9} + \left\{ 3(m-1) - s \cdot \frac{m}{3} \right\} \left\{ \frac{m}{3} - 1 \right\},$$

e quindi, tenendo presenti le (7):

$$m^2 - 4m + s\frac{m}{3} + 3 > m^2 - \frac{4}{3}m - 1,$$

ossia:

$$s \geq 8.$$

D'altra parte dev'essere: $s < 9$, perchè: $\Sigma' \nu_i < 3m$, e quindi bisogna supporre: $s = 8$. Si ha allora dalle (7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{t+1}^{s} \nu_i = \frac{m}{3} - 3 \\ \displaystyle\sum_{t+1}^{s} \nu_i^2 = \frac{m^2}{9} - 2p - 1. \end{array} \right.$$

Inoltre:

$$\left(\sum_{i+1}^{s} \nu_i\right)^2 = \left(\frac{m}{3} - 3\right)^2 \geq \sum_{i+1}^{s} \nu_i^2 = \frac{m^2}{9} - 2p - 1,$$

cioè:

$$p \geq m - 5,$$

ma dalla (3) per: $\nu_1 = \frac{m}{3}$ si ha: $p < \frac{2}{3} m - 1$,

e quindi:

$$m < 12.$$

Si conclude dunque affermando che le ipotesi fatte sono compatibili solo nel caso del sistema lineare delle curve del nono ordine con otto punti base tripli.

Il teorema 1′ è così completamente dimostrato. Inoltre è dimostrato anche il teorema 1, nella cui accezione è naturalmente da scartarsi il sistema delle C^9 con otto punti base tripli, e per cui bisogna tener conto della osservazione del n. 6.

Vogliamo qui notare subito una interessante applicazione del teorema 1′. Si supponga perciò di avere un fascio di curve razionali con punti base ordinari. Sommando a questo fascio una curva opportuna, si può sempre supporre di ottenere un sistema lineare di genere p e grado $2p + 1$; che pel teorema 1′ può trasformarsi con trasformazioni quadratiche in maniera che quel fascio di curve si trasformi in un fascio di rette, e quindi si ottiene una elegante dimostrazione diretta del teorema:

Teorema 2. – « *Ogni fascio di curve razionali a punti base ordinari può cremonianamente trasformarsi in un fascio di rette* ».

La condizione che i punti base siano ordinari può essere facilmente abolita con dei semplici artifici strutturali sulle formule di postulazione, e si potrebbe quindi ottenere in tale modo *diretto* anche il teorema nella sua più larga interpretazione.

9. - Sempre continuando a limitarci alle F^{2p+1} di S_{p+2}, è naturalmente che il teorema dimostrato non precisa nè può precisare la dimensione del sistema di curve razionali contenuto in $|\varphi^m|$, ossia in $|C|$, nè le circostanze in cui si staccano più sistemi di quel tipo.

A tale proposito aggiungiamo qualche osservazione. Se si ammette in generale che il sistema di curve razionali che si può sottrare (effettivamente) da $|C|$ sia di grado n_1, e che il sistema residuo sia di grado n_2 e genere p_2, si ha:

$$\begin{cases} n = n_1 + n_2 + 2_j \\ p = p_2 + j - 1, \end{cases}$$

ed essendo: $n = 2p + 1$, si trova:

$$n_1 + n_2 = 2p_2 - 1 .$$

Da qui segue certo:

$$n_2 \leq 2p_2 - 1 ,$$

e quindi se il sistema residuo è di tipo generale, si può affermare che esso non contiene parzialmente sistemi di curve razionali e quindi la superficie ha indice di composizione eguale ad uno, ed inoltre in $|C|$ non può essere contenuto un sistema di curve razionali più ampio di un fascio, se è esattamente:

$$n_2 = 2p_2 - 1 .$$

Da ciò appare evidente che *le più generali superficie* F_π^{2p+1} *devono ritenersi nei rispetti della loro composizione quelle contenenti un fascio (e non più) di curve razionali* ([4]).

([4]) È forse il caso, malgrado l'evidenza delle cose, di fornire qualche esempio di superficie del tipo F_π^{2p+1}, a composizione di tipo speciale. Un esempio di F_π ammettenti un sistema di composizione di dimensione maggiore

Similmente si può vedere che una F^{2p+i} con $i > 1$ dello S_{p+i+1} *contiene generalmente un sistema di curve razionali di dimensione* $\left[\frac{i+1}{2}\right]$ *e non più.*

È ancora interessante notare che tali proprietà divengono categoriche per superficie del tipo F_0 cioè contenenti un sistema residuo di genere zero. Infatti in tal caso si ha necessariamente : $n_2 = -1$.

Cioè si ha il teorema :

Teorema 3. - « *Una F_0^{2p+i} dello S_{p+i+1}, ha il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane somma di due sistemi lineari di curve razionali di dimensioni rispettivamente* $\left[\frac{i+1}{2}\right]$ *e* $i - \left[\frac{i+1}{2}\right]$ ».

10. - Termineremo queste ricerche sulle F_π, dando un criterio sufficiente e necessario per riconoscere quando una F^{2p+i} dello S_{p+i+1}, razionale, sia a residuo di genere zero. Dimostreremo a tale proposito il teorema :

Teorema 4. - « *Condizione necessaria e sufficiente perchè una F^{2p+i} dello S_{p+i+1}, razionale, sia a residuo di genere zero, è che le curve del sistema di curve razionali componente $|C|$, seghino su una generica C una serie lineare non speciale* » .

Infatti siano C le curve di $|C|$ spezzate in una curva razionale C_1^r e una residua C_2^s. Sarà : $r + s = 2p + i$. Inoltre se S_ρ e S_σ sono gli spazi ambiente si ha : $r \leq \rho$, $s \leq \sigma$. Le

di uno, si ha nelle superficie che si ricavano per proiezione da $3(m-1)$ punti indipendenti della superficie immagine della totalità delle C^m piane. I sistemi sezioni iperpiane di queste contengono infatti tutti parzialmente una rete omaloidica, immagine della rete delle rette.

Fra queste si possono anche trovare esempi di anomalie circa l' indice di composizione. Se si prendono infatti ad esempio le C^7 con 18 punti base, tale sistema è somma della rete delle rette, di un fascio di coniche e di un sistema residuo di C^4 con 14 punti base, ridotto quindi ad una C^4 isolata. In tal caso la F è dunque una superficie d' ordine 31, a curve sezioni di genere 15, avente indice di composizione due e residuo di genere tre.

curve C_1 segano su una C la serie: $g_{2p+i-s}^{p+1-\sigma}$, che per ipotesi è non speciale. Quindi: $p + i - \sigma \leq 2\,p + i - s - p$, cioè: $\sigma \geq s$, e cioè: $s = \sigma$. Segue da qui che le C_2^s sono curve razionali normali, e quindi la F è a residuo di genere zero. Il viceversa è evidente.

11. - Il teorema dimostrato permette di concludere in un modo molto interessante questo lavoro. Infatti da esso segue evidentemente che le più generali F^{2p+i} dello S_{p+i+1}, regolari, sono superficie a residuo nullo. Quindi il fatto che una di tali superficie abbia un residuo > 0, è da considerarsi un caso di struttura anomala. In tale senso si deve vedere l'interesse del teorema precedente.

Al termine di questa indagine e riallacciandosi a quanto abbiamo osservato al principio del lavoro resta dunque garantito che:

Su ogni F^{2p+i} dello S_{p+i+1}, regolare, si può sempre trovare almeno un sistema di catene riducenti rispetto al sistema $|C|$ sino a giungere ad un sistema di curve razionali: cioè effettivamente si verifica sempre nel processo di riduzione che abbiamo usato al n. 3, quella ipotesi favorevole che avevamo ivi ammessa come una ipotesi di lavoro.

E qui si presenta quindi l'inizio di una nuova indagine che ora appare sia il caso di approfondire: dimostrare a priori, senza ammettere la razionalità della F, tale fatto, e concludere quindi con una nuova e diretta dimostrazione di un classico teorema di Castelnuovo, con una lieve e non essenziale restrizione.