RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. COLOMBO

Sulle configurazioni di equilibrio di un velo flessibile ed inestendibile, sviluppabile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 153-166

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__153_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO DI UN VELO FLESSIBILE ED INESTENDIBILE, SVILUPPABILE

Nota (*) *di* G. COLOMBO (*a Padova*).

Si scrivono le equazioni differenziali ordinarie, risolventi il problema dell'equilibrio di un velo flessibile ed inestendibile, che si sviluppa su un piano coprendo un triangolo o un quadrangolo, quando se ne fissino nello spazio un lato e il vertice o il lato opposto, mentre si lascino liberi da forze gli altri due lati, e quando lo si pensi sollecitato da forze di massa funzioni della sola giacitura dell'elemento su cui agiscono. Poichè anche le condizioni ai limiti si presentano sotto forma ordinaria si riconosce, in generale, la possibilità che esistano configurazioni rigate sviluppabili per il caso del triangolo, ma non per quello del quadrangolo.

* * *

1. - Questa ricerca si ricollega ad uno studio, di alcuni anni fa, del Prof. E. LAURA (1) sulle configurazioni rigate di equilibrio per veli pesanti del tipo qui considerato e, più di lontano, ai classici studi del BELTRAMI sul problema generale dell'equilibrio di superfici flessibili ed inestendibili. Nel lavoro citato in (1) l'Autore fa vedere come si riesca a superare la difficoltà più grave che presenta il problema, quello cioè della elimina-

(*) Pervenuta in Redazione il 20 dicembre 1950.

(1) E. LAURA: *Una osservazione sopra l'equilibrio delle superfici rigate sviluppabili flessibili inestendibili* [Atti Ist. Veneto Scienze Lettere ed Arti, t. XCIX parte II, 1940, p. 339].

zione dei parametri lagrangiani che compaiono nelle equazioni indefinite dell'equilibrio, quando si possa ammettere a priori che la superficie equilibrata sia una rigata sviluppabile, ed accenna ad un metodo generale di impostazione delle equazioni che reggono il problema nel caso di un velo pesante. Le equazioni (integrodifferenziali) alle quali Egli perviene, nel problema concreto accennato più sopra, e le condizioni ai limiti, che si presentano in forma inconsueta, non permettono di concludere facilmente sull'esistenza di tali soluzioni a meno che non si considerino forme cilindriche o coniche. In questo lavoro farò vedere come, con una opportuna scelta di coordinate curvilinee sulla superficie si riesce a semplificare il problema analitico, almeno per quanto riguarda la scrittura delle equazioni risolventi e delle condizioni ai limiti, e si possa concludere come esposto nel sunto.

A seguito di interessanti ricerche riguardanti l'equilibrio di superfici inestendibili ed elasticamente flessibili (2) il Prof. Tolotti, in una recente memoria (3), si occupava delle superfici sviluppabili per le quali Egli riusciva a stabilire brillantemente risultati notevoli. Una delle osservazioni preliminari è quella della scelta delle coordinate. Egli osservava appunto che avendo a che fare con problemi di applicabilità, conviene a volte rinunciare all'ortogonalità del sistema di coordinate curvilinee pur di semplificare le formule di applicabilità, ed a seguito di questa osservazione stabiliva sulla superficie un particolare sistema di coordinate oblique. È seguendo lo stesso metodo che in questa nota riuscirò a superare la difficoltà analitica, che il Prof. Laura ha incontrato usando coordinate ortogonali nel caso dei veli pesanti, mettendomi nel caso più generale che la sollecitazione di massa dipenda dalla sola giacitura dell'elemento su cui agisce.

(2) C. Tolotti: *Sulla statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudo finite.* [Note I e II, Rend. Acc. Lincei, sez. VIII, vol. I, fasc. 3°-4°-5°, 1946]: *Sulla statica delle superfici inestendibili ed elasticamente flessibili,* [«Giornale di matematiche di Battaglini», sez. IV, vol. II, fasc. 2°, 1949, p. 28].

(3) C. Tolotti: *Sulla statica delle superfici sviluppabili inestendibili ed elasticamente flessibili,* [«Giornale di matematiche di Battaglini», sez IV, vol. III, fasc. 1°, 1950, p. 1].

Osservo infine che lo stesso metodo è generalmente applicabile a veli non di forma triangolare o quadrangolare purchè del loro contorno faccia parte un segmento che si suppone fissato nello spazio ed un punto, (oppure un altro segmento) che si suppone anche fissato; e purchè si possa assumere l'ipotesi, almeno in linea generale, che esistano rigate sviluppabili secondo le quali il velo si possa disporre in maniera che le generatrici bisechino il contorno.

2. - Si consideri un velo flessibile ed inestendibile, sviluppabile su un piano e di forma tale da ricoprire, una volta sviluppato, un quadrangolo $A^* B^* D^* C^*$ (o un triangolo $A^* B^* C^*$), che denoteremo con σ^*. Si fissino nello spazio, in posizione generica, il lato $A^* B^*$ sopra un segmento di ugual lunghezza $A B$ ed analogamente il lato opposto $C^* D^*$ (o il vertice C^*) su un segmento di ugual lunghezza $C D$ (o in punto C), ove C e D soddisfino solamente alle condizioni che le loro distanze da A e B siano minori o uguali rispettivamente di quelle di C^* e D^* da A^* e B^*.

L'elemento d'area $d\sigma$ del velo sia sollecitato da una forza $\boldsymbol{F}\, d\sigma$ di intensità e direzione funzione della sola normale $\boldsymbol{n}$ alla superficie, che denoteremo con σ, secondo la quale si dispone il velo in equilibrio. Inoltre si lascino liberi da forze gli altri due lati.

Nel tipo di sollecitazioni qui considerate rientrano per esempio: a) le forze peso, b) l'azione del vento su una vela, c) la pressione normale costante.

Il problema che ci proponiamo di risolvere è quello di stabilire la possibilità di configurazioni di equilibrio per il velo sollecitato e vincolato come abbiamo detto sopra, che siano *regolari* su tutto il velo, intendendo con ciò di significare che le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ che per u e v variabili in un certo campo C definiscono rispetto ad un prefissato sistema cartesiano di riferimento la regione σ di superficie secondo la quale si dispone il velo in equilibrio, ammettano derivate prime e seconde continue. In questa ipotesi di regolarità possiamo subito asserire, per un noto teorema di geometria differenziale, che σ è una porzione della sviluppabile delle tangenti ad un arco di curva Γ (che può ridursi ad un punto proprio o improprio nel caso di coni e cilindri) e si può anche stabilire che Γ è priva di punti interni a σ. Il lato AB è ovviamente una generatrice di tale rigata e lo è pure il lato CD nel caso del quadrangolo, inoltre per ogni punto di AC possa una sola generatrice che taglierà il contorno di σ in un punto di BD (o BC nel caso del triangolo).

La superficie rigata di cui fa parte σ si può pensare come la *sviluppabile rettificante* dell'arco L di estremi A, C secondo cui si dispone in posizione di equilibrio il lato $A^* C^*$. È importante notare che la conoscenza di L determina univocamente σ.

Premesso ciò si assuma su σ un sistema di coordinate curvilinee scelte in tal guisa che dette u, v le coordinate di un punto P di σ sia u la sua ascissa rettilinea sulla generatrice r per P, sulla quale si sia fissato un sistema di coordinate con l'origine nel punto P', in cui r interseca il lato AC, e verso positivo coincidente con quello che da P' va verso l'interno di σ; inoltre sia v l'ascissa curvilinea di P' sull'arco L contata a partire da A nel verso da A a C.

Questo sistema di coordinate non è ovviamente ortogonale però gode di una proprietà che è notevole per il problema che stiamo trattando, proprietà di cui dirò subito.

Denotiamo con θ l'angolo (minore di π) che il versore della generatrice generica r orientata come detto sopra, passante per P' forma con la tangente orientata, nello stesso punto P', ad L. L'angolo θ sarà ovviamente funzione dell'ascissa di P'. Sia inoltre l la lunghezza del lato $A^* C^*$ nel caso del triangolo e del segmento $A^* C_1^*$, ove sia C_1^* l'intersezione della retta $A^* C^*$ con la retta $B^* D^*$, nel caso del quadrangolo. Sia infine α l'angolo in C^* (C_1^*) del triangolo $A^* B^* C^*$ ($A^* B^* C_1^*$). È ovvio che, nello sviluppo sul piano, l'angolo θ diventa l'angolo che la retta orientata r^*, secondo cui si dispone r, forma con il lato $A^* C^*$ orientato da A^* a C^*.

Nel sistema di coordinate che abbiamo stabilito più sopra è ora agevole scrivere le equazioni dei bordi liberi, dei lati AC e BD o (BC) di σ ed è proprio questa la proprietà che fa preferire questo sistema di coordinate oblique ad un sistema di coordinate ortogonali.

L'equazione del lato AC è naturalmente $u = 0$ mentre quella del lato BD o BC è, come discende da considerazioni elementari,

$$(1) \qquad u = \frac{(l - v)\, sen\, \alpha}{sen\,(\alpha + \theta)}$$

ove $0 \leq v \leq l$ nel caso del triangolo e $0 \leq v \leq a$ nel caso del quadrangolo quando si denoti con a la lunghezza del lato $A^* C^*$.

Nel seguito per semplicità supporrò addirittura $\alpha = \frac{\pi}{2}$. È ovvio che a meno di una complicazione formale i risultati continuano a valere in generale.

È qui il caso di osservare che in un sistema di coordinate curvilinee come quello fissato più sopra è facile esprimere l'equazione in $u, v, \theta(v)$, di ogni linea γ di σ di cui si conosca l'equazione della sviluppata γ^* sul piano rispetto ad un qualunque sistema di coordinate.

3. - Sia $T \equiv (\boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)$ un triedro triortogonale, levogiro, mobile su σ, a cui la σ stessa sia riferita, scelto in maniera che $\boldsymbol{t}_1$ sia diretto secondo la generatrice $v =$ costante, nel verso positivo prefissato, $\boldsymbol{t}_2$ sia tangente a σ ed orientato in maniera da formare un angolo acuto con la linea $u =$ costante, orientata nel verso delle v crescenti.

Saranno, ovviamente

$$(2) \qquad \boldsymbol{l}_1 \equiv (1, 0, 0)\,, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 \equiv (0, 0, 0)$$

la traslazione e la rotazione istantanea della terna al variare della sola u. Ove poi si tenga conto della sviluppabilità di σ e del fatto che la linea L è una geodetica per la superficie, saranno

$$(3) \qquad \boldsymbol{l}_2 \equiv \left(cos\,\theta\,, -\frac{d\theta}{dv}u + sen\,\theta\,, 0\right) \qquad \boldsymbol{\omega}_2 \equiv \left(p, 0, -\frac{d\theta}{dv}\right)$$

la traslazione e la rotazione istantanea al variare della sola v, essendo θ l'angolo (funzione della sola v) definito più sopra e p pure una funzione della sola v.

Notiamo che la flessione $\frac{1}{\rho}$ e la torsione $\frac{1}{\tau}$ di L sono legati a p e θ dalle relazioni

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho} = \pm\, p \operatorname{sen} \theta, \quad \frac{1}{\tau} = p \cos \theta$$

ove nella prima si assuma il segno $+$ o $-$ a seconda che la normale principale ad L forma con t_3 l'angolo 0 o π.

Se $P(u, v)$ è il punto che descrive la superficie, l'equazione indefinita dell'equilibrio è

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial P}{\partial u} + \nu \frac{\partial P}{\partial v}\right) = HF$$

che deve essere verificata sui punti di σ, mentre sui lati liberi da forze deve valere la relazione

$$(6) \qquad \left(\lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v}\right)\left(F \frac{\partial u}{\partial n} + F \frac{\partial v}{\partial n}\right) +$$

$$+ \left(\mu \frac{\partial P}{\partial n} + \nu \frac{\partial P}{\partial v}\right)\left(F \frac{\partial u}{\partial n} + G \frac{\partial v}{\partial n}\right) = 0$$

ove, beninteso, E, F, G, H hanno il solito significato ormai usuale nella teoria delle superfici, ed n è la normale al lato libero tangente a σ.

Tenendo conto della variabilità del riferimento e delle relazioni (2) e (3) si ha senz'altro

$$(7) \qquad \frac{\partial P}{\partial u} = l_1, \ \frac{\partial P}{\partial v} = l_2, \ \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = 0, \ \frac{\partial^2 P}{\partial u \, \partial v} = \omega_2 \wedge l_1,$$

$$\frac{d^2 P}{\partial v^2} = \frac{\partial l_2}{\partial v} + \omega_2 \wedge l_2$$

e quindi, convenendo una volta per tutte di denotare le derivate rispetto a v come di solito si scrivono le derivate temporali,

$$
(8) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial P}{\partial u} \equiv (1, 0, 0), \dfrac{\partial P}{\partial v} \equiv (cos\, \theta, sen\, \theta - u\, \dot{\theta}, 0); \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 P}{\partial u^2} \equiv (0, 0, 0), \dfrac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \equiv 0, -\dot{\theta}, 0), \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 P}{\partial v^2} \equiv (-u\, \dot{\theta}^2, -u\, \ddot{\theta}, p\,(sen\, \theta - u\, \dot{\theta}))\,.
\end{cases}
$$

Inoltre avremo

$$
(9) \quad E = 1, F = cos\, \theta, G = u^2\, \dot{\theta}^2 + 1 - 2\, u\, \dot{\theta}\, sen\, \theta, H = sen\, \theta - u\, \dot{\theta}\,.
$$

Le equazioni intrinseche dell'equilibrio si ottengono allora proiettando le (5) sugli assi di T. Si ha quindi

$$
(10) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\partial \mu}{\partial v} + \left(\dfrac{\partial \mu}{\partial u} + \dfrac{\partial \nu}{\partial v}\right) cos\, \theta - \nu\, u\, \dot{\theta}^2 = (sen\, \theta - u\, \dot{\theta})\, F_1\,, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial \mu}{v\, u} + \dfrac{\partial \nu}{\partial v}\right) (sen\, \theta - u\, \dot{\theta}) - 2\, \mu\, \dot{\theta} - \nu\, u\, \ddot{\theta} = (sen\, \theta - u\, \dot{\theta})\, F_2\,, \\[1ex]
\qquad\qquad p\, \nu = F_3\,,
\end{cases}
$$

ove si sia posto $F_i = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{t}_i$. Sia $C \equiv (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ una terna di riferimento triortogonale fissa e siano α_i, β_i, γ_i i coseni degli angoli che il versore $\boldsymbol{c}_i$ forma con i versori di T. Per l'ipotesi fatta sulla natura della sollecitazione, le componenti secondo C di $\boldsymbol{F}$, che denoteremo con X_1, X_2, X_3, saranno funzioni delle sole $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, onde avremo

$$
(11) \quad F_1 = \Sigma_r\, X_r\, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\, \alpha_r\,, F_2 = \Sigma_r\, X_r\, \beta_r\,, F_3 = \Sigma_r\, X_r\, \gamma_r\,.
$$

Possiamo quindi concludere che, nel caso preso in esame, la F_i dipendono esclusivamente dai 9 coseni $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) che sono ovviamente funzioni della sola v.

Alle (10) vanno associate le equazioni

$$(12) \qquad \begin{cases} \dot{\alpha}_i + \dot{\theta}\,\beta_i = 0 \\ \dot{\beta}_i - \dot{\theta}\,\alpha_i - p\,\gamma_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \\ \dot{\gamma}_i + p\,\beta_i = 0 \end{cases}$$

che si ottengono esprimendo che le derivate sostanziali dei versori di C sono nulle.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno (6), queste si proiettano sugli assi di versori $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$, nelle due equazioni scalari

$$(13) \qquad \begin{cases} \mu\left(E\dfrac{\partial u}{\partial n} + F\dfrac{\partial v}{\partial n}\right) + \nu\left(F\dfrac{\partial u}{\partial n} + G\dfrac{\partial v}{\partial n}\right) = 0 \\ \lambda\left(E\dfrac{\partial u}{\partial n} + F\dfrac{\partial v}{\partial n}\right) + \mu\left(F\dfrac{\partial u}{\partial n} + G\dfrac{\partial v}{\partial n}\right) = 0 \end{cases}$$

che devono essere verificate su ciascuno dei due bordi liberi e che forniscono perciò 4 equazioni.

Le (13) forniscono le equazioni risolventi. Per esplicitarle bisogna però integrare le (10). All'uopo si noti intanto che, essendo γ funzione di v, ed F_3 funzione di funzioni di v, della sola v è pure funzione la ν, che risulta, per la terza delle 10, data da

$$(14) \qquad \nu = \frac{1}{\gamma} F_3 .$$

Dalla seconda delle (10) si ricava con facilità la μ e, denotando con φ una funzione arbitraria della sola v, si ottiene precisamente

$$(15) \quad \mu = \left(F_2 - \dot{\nu} - \nu\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}\right)\frac{sen\,\theta - u\,\dot{\theta}}{3\,\dot{\theta}} + \nu\,\frac{sen\,\theta \cdot \ddot{\theta}}{2\,\dot{\theta}^2} + \frac{\varphi(v)}{(sen\,\theta - u\,\dot{\theta})^2} .$$

Infine dalla prima delle (10) si ottiene

$$(16)\quad \lambda = \frac{1}{2} A\,(sen\,\theta - u\,\dot\theta)^2 - (sen\,\theta - u\,\dot\theta)\,B - \frac{\dot\theta\,\varphi'(v)}{sen\,\theta - u\,\dot\theta} +$$

$$+ \frac{\ddot\theta\,sen\,\theta - \dot\theta^2\cos\theta}{(sen\,\theta - u\,\dot\theta)^2}\,\varphi(v) + \psi(v)$$

essendo ψ ancora una funzione arbitraria della sola v ed avendo posto

$$(17)\quad \begin{cases} A = \nu - \dfrac{F_1}{\dot\theta} - \dfrac{1}{3\dot\theta^2}\dfrac{d}{dv}\left(F_2 - \dot\nu - \nu\dfrac{\ddot\theta}{\dot\theta}\right), \\[2ex] B = \nu\,sen\,\theta - \dfrac{\cos\theta}{3\dot\theta}\left(F_2 - \dot\nu - \nu\dfrac{\ddot\theta}{\dot\theta}\right) + \\[2ex] + \dfrac{1}{3\dot\theta^3}(\ddot\theta\,sen\,\theta - \dot\theta^2\cos\theta)\left(F_2 - \dot\nu - \nu\dfrac{\ddot\theta}{\dot\theta}\right) + \dfrac{1}{\dot\theta}\dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{\nu\ddot\theta\,sen\,\theta}{\dot\theta^2}\right). \end{cases}$$

Si sono così ottenute λ e μ in funzione di u, delle quattro funzioni incognite della sola v: $\nu, \theta, \varphi, \psi$ e delle $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ che compaiono nelle F_i.

È ora il momento di esplicitare le 4 equazioni che si ottengono imponendo che le (13) siano verificate su ciascuno dei due bordi liberi del velo.

Sul lato $u = 0$ è $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$, onde le (13) porgono, tenendo presenti le (9),

$$(18)\quad \begin{cases} \mu + \nu\cos\theta = 0, \\ \lambda + \mu\cos\theta = 0. \end{cases} \quad (\text{per } u = 0).$$

Sul lato $u = \dfrac{l - v}{\cos\theta}$ si ha

$$(19)\quad \frac{\partial u}{\partial n} : \frac{\partial v}{\partial n} = \cos\theta : (1 - \dot\theta\,sen\,\theta\,u)\frac{1}{\sqrt{G}}, \qquad \left(per\ u = \frac{l - v}{\cos\theta}\right),$$

ove si assuma, come al solito, il segno $+$ davanti al radicale. Quindi ancora le (13) porgono

$$(20) \qquad \begin{cases} \alpha\mu + \nu\beta = 0 \\ \alpha\lambda + \mu\beta = 0, \end{cases} \qquad u = \frac{l - v}{\cos\theta}$$

avendo posto

$$(21) \qquad \begin{cases} \alpha = \cos\theta\left(1 + \dfrac{1 - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\, u}{\sqrt{G}}\right) \\ \beta = \cos^2\theta + \dfrac{1 - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\, u}{\sqrt{G}} \end{cases} \qquad u = \frac{l - v}{\cos\theta}.$$

Le due equazioni (18) ci permettono di determinare le funzioni arbitrarie $\varphi(v)$ e $\psi(v)$ che entrano nelle espressioni (15) e (16) di λ e μ. Dalla prima di esse si ricaverà la $\varphi(v)$ e dalla seconda, tenuto conto della espressione di φ ottenuta dalla prima, si ricaverà la funzione $\psi(v)$. Ottenute così le espressioni di λ e μ non contenenti più le funzioni arbitrarie, le (20) forniscono le equazioni differenziali che associate alle (12) risolvono il problema.

Senza dilungarci in calcoli laboriosi le formule ottenute ci permettono di precisare l'ordine del sistema differenziale.

A questo scopo osserviamo intanto che nell'espressione della μ data da (15), anche dopo che si sia sostituito la $\varphi(v)$ con l'espressione ottenuta dalla prima delle (18), compaiono la funzione ν con la sua prima derivata, e la θ con le prime due derivate, ed anche che nell'espressione di λ data da (16) e (17), anche dopo la sostituzione dei valori di φ e ψ, determinati tramite le (18), compaiono la ν con le prime due derivate e la θ con le prime tre derivate. Inoltre si osservi che le $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ compaiono in queste due equazioni al massimo con le derivate prime.

Tenuto conto di questo e della (14) risulta dunque che il sistema è riducibile, in generale, ad uno del primo ordine rispetto a $\nu(v)$, di terzo ordine rispetto a $\theta(v)$, e del primo rispetto alle funzioni $\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i$.

Osserviamo ora che le funzioni $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ soddisfano per loro natura alle relazioni

$$
(22) \qquad \begin{cases} \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \,, \\ \alpha_r \alpha_s + \beta_r \beta_s + \gamma_r \gamma_s = 0 \qquad (r \neq s) \,. \end{cases}
$$

Inoltre denotato con $P'(v)$ il punto che descrive la linea $u = 0$, si avrà ovviamente

$$
(23) \qquad \frac{d P'}{d v} = \boldsymbol{t}_1 \cos \theta + \boldsymbol{t}_2 \operatorname{sen} \theta \,,
$$

ovverosia, ricordando le posizioni fatte

$$
(24) \qquad \frac{d P'}{d v} = \Sigma_r \, (\alpha_r \cos \theta + \beta_r \operatorname{sen} \theta) \boldsymbol{c}_r \,.
$$

In definitiva dunque il sistema costituito dalle due equazioni (20), dalle 8 equazioni (12), dalle 3 equazioni (24), nelle funzioni incognite $\nu(v)$, $\theta(v)$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ed infine $x'(v)$, $y'(v)$, $z'(v)$ (coordinate di P' rispetto a C) è del primo ordine rispetto a $\nu(v)$, del terzo rispetto a $\theta(v)$ e del primo rispetto a tutte le altre funzioni.

Tenuto presente che le funzioni $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ devono soddisfare alle 6 relazioni (22), si deduce che l'integrale generale viene a dipendere da 10 costanti arbitrarie.

A determinarle servono 10 condizioni ai limiti che si possono imporre ad arbitrio, purchè siano indipendenti tra di loro.

Nel problema concreto che ci siamo proposti di trattare, (caso del quadrangolo di cui siano fissati due lati opposti), le condizioni ai limiti sono invece 12 e precisamente:

a) le condizioni che esprimono che il punto A^* occupa la posizione A espresse dalle 3 relazioni

$$
(25) \qquad x'(0) = x_A \,, \quad y'(0) = y_A \,, \quad z'(0) = z_A \,,
$$

b) le condizioni che esprimono che il punto C^* occupa la posizione C espresse analogamente da

$$(26) \qquad x'(a) = x_C, \quad y'(a) = y_C, \quad z'(a) = z_C,$$

c) la condizione esprimente che l'angolo formato dalla linea $u = 0$ nel punto A con il lato fisso $A' B$ vale l'angolo $C^* \widehat{A^*} B^*$,

$$(27) \qquad \theta(0) = C^* \widehat{A^*} B^*$$

d) l'analoga condizione sull'angolo che la linea $u = 0$ forma nel punto C col lato fisso $C D$

$$(28) \qquad \theta(a) = A^* \widehat{C^*} D^*$$

e) le condizioni esprimenti che la direzione secondo cui si dispone il lato $A^* B^*$ è quella di $A B$

$$(29) \qquad \alpha_1(0) = \alpha_1', \quad \alpha_2(0) = \alpha_2', \quad \alpha_3(0) = \alpha_3'$$

f) l'analoga condizione relativa all'altro lato fisso

$$(30) \qquad \alpha_1(a) = \alpha_1'' \quad \alpha_2(a) = \alpha_2'' \quad \alpha_3(a) = \alpha_3''.$$

Poichè le (29) contano per due condizioni indipendenti e così pure le (30) in totale si avranno appunto 12 condizioni.

Da ciò intanto si deduce che, in generale, la configurazione di un velo quadrangolare, vincolato come è stato supposto, non è regolare. Se si vuole che il quadrangolo si disponga secondo una configurazione rigata bisogna assegnare almeno due delle dodici condizioni in maniera opportuna. Così, per esempio, fissati ad arbitrio il lato $A^* B^*$ in $A B$ ed il punto C^* in C solo se si fissa il lato $C D$ in direzione opportuna la configurazione di equilibrio può essere regolare.

Se si considera il caso limite del triangolo le condizioni si riducono a 9 poichè, riducendosi ad un punto il lato $C D$, le condizioni espresse dalle (29) e (30) vengono automaticamente a cadere mentre le (26) sono sostituite da quelle che si ottengono sostituendo nelle stesse (26) l ad a.

Sembrerebbe a prima vista che il problema fosse indeterminato; sembrerebbe cioè che potessero esistere infinite configurazioni di equilibrio compatibili con i vincoli imposti. Ciò non è certamente d'accordo con la intuizione meccanica del problema. La costante che sembra esuberante si può presumere serva a regolarizzare nel punto C (vertice fisso del triangolo) le funzioni che definiscono σ.

Allo scopo di giustificare, almeno, tale nostra presunzione servano le seguenti osservazioni.

Notiamo anzitutto che il punto C è certamente un punto di singolarità per le componenti di tensione e quindi per i parametri lagrangiani λ, μ, ν, dei quali queste componenti sono, nel nostro caso, combinazioni lineari; notiamo inoltre che λ e μ non sono singolari in C se non lo è la ν. Infatti dalle relazioni (18) e (20) si ha che, sui due bordi liberi, λ e μ sono proporzionali a ν tramite coefficenti che restano certamente finiti per $v \rightarrow l$, per la regolarità di σ, onde, per continuità, se ν fosse limitato per $v \rightarrow l$ lo sarebbero certamente anche λ e μ. D'altra parte si può osservare che può esistere qualche soluzione, in dipendenza magari di opportune scelte delle costanti, per la quale ν sia singolare in C senza che lo siano le funzioni che definiscono σ. Basta per questo osservare che da (14) si ha $\nu \rightarrow \infty$ appena p tende a zero e lo stesso non succede simultaneamente per F_3.

Premesso ciò, si consideri, per semplicità, il caso $F_1 = = F_2 = 0$, $F_3 = h$ (caso della pressione costante). In questo caso il sistema (20), (14), (12), (24) si semplifica notevolmente sebbene non sufficentemente da permetterne uno studio completo. Pur tuttavia le (20) costituiscono un sistema di due equazioni in due incognite $\theta(v)$ e $\nu(v)$ poichè in esse non compaiano più i coseni $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Se queste si esplicitano in ν e θ, si nota che il punto $v = l$ è un punto di singolarità per ambedue le equazioni. Ora poichè è essenziale che in C sia singolare la ν ma è altrettanto essenziale che non lo siano la funzione $\theta(v)$ e le funzioni $x(v)$, $y(v)$, $z(v)$ che definiscono L, si può presumere che la presenza di una costante esuberante serva proprio a togliere tale singolarità.

Con ciò non intendo naturalmente di aver provata l'esistenza di una configurazione regolare, poichè, tra l'altro si potrebbe osservare, che a regolarizzare le eventuali singolarità non è detto che basti il fatto di poter disporre di una sola costante in più di quelle necessarie per soddisfare alle condizioni ai limiti, ma solamente di aver giustificato come sia stato portato a ritenere che sia così.

Una dimostrazione di ciò mi pare non si possa fare, per la complessità del problema, che analizzando, magari nel caso semplice detto poco sopra, il sistema differenziale. Penso di ritornare su questa questione in seguito.

4. - Osserviamo qui da ultimo, che lo stesso metodo che è stato usato nei numeri precedenti possa portare a stabilire analoghi risultati anche se i bordi $A^* C^*$ e $B^* D^*$ di σ^* non sono rettilinei.

Sia θ^*, x^*, y^* un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Riferendo a questo sistema il velo σ^*, il lato $A^* B^*$ coincida con l'asse x e l'asse y sia la normale condotta per C^* ad $A^* B^*$. Siano $f(x^*, y^*) = 0$ e $\varphi(x^*, y^*) = 0$ le equazioni del bordo $A^* C^*$ di σ^* e rispettivamente del bordo $B^* D^*$ (o $B^* C^*$).

Se si assume su σ un sistema di coordinate con la linea $u = 0$ coincidente con la linea L secondo cui si dispone il segmento $O^* C^*$ ma del resto come più sopra, si ha che le coordinate x^*, y^* del corrispondente P^* di un punto P, di coordinate u, v su σ, sono

$$x^* = u \, sen \, \theta \, , \qquad y^* = v + u \cos \theta \, .$$

Onde sostituendo nelle equazioni dei due bordi liberi al posto di x e y le espressioni date da queste ultime otterremo:

$$f(sen \, \theta \, , \, v + u \cos \theta) = 0 \, , \qquad \varphi \, (u \, sen \, \theta \, , \, v + u \cos \theta) = 0 \, .$$

Se queste si possono esplicitare rispetto ad u, esse forniranno le equazioni esplicite dei due bordi liberi in funzione di v e di $\theta \, (v)$ come succedeva nel caso trattato nei numeri precedenti. Ciò permetterà di ripetere considerazioni analoghe a quelle fatte più sopra.