RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

Sulle V_3 contenenti un sistema lineare triplamente infinito di superficie razionali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 135-152

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__135_0>

SULLE V_3 CONTENENTI UN SISTEMA LINEARE TRIPLAMENTE INFINITO DI SUPERFICIE RAZIONALI

Nota (*) *di* MARIO BALDASSARRI (*a Padova*).

U. MORIN ha classificato nel 1939 (1) i sistemi lineari, semplici, di superficie razionali di dimensione maggiore od eguale a quattro, mediante la sintesi di un duplice ordine d'idee, che risalgono rispettivamente ad ENRIQUES (2) e a FANO (3).

D'altro lato ENRIQUES, in un'antica memoria (4), come corollario della classificazione delle varietà a tre dimensioni contenenti un fascio di superficie razionali, trovava che ogni V_3 contenente un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali a intersezioni variabili irriducibili è *unirazionale*.

In questo lavoro riprendendo gli stessi metodi usati da U. MORIN, consistenti in definitiva nell'impiego opportuno della aggiunzione sul sistema lineare come strumento di riduzione del sistema a tipi cremonianamente distinti, pervengo a dimostrare che *ogni V_3 contenente un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali, composto con una involuzione di punti, è razionale o riferibile ad una forma cubica* e a dimostrare contemporaneamente che *ogni sistema lineare ∞^3 rientra nei tipi già assegnati per i sistemi di dimensione superiore, escluso il sistema dei piani di uno S_3*.

(*) Pervenuta in Redazione il 16 novembre 1950.

(1) U. MORIN: *Sulla class. proiettiva delle varietà a superficie-sezioni razionali.* [Ann. di Mat., t. 18, (4), (1939)].

(2) F. ENRIQUES: *Sui sistemi lineari di sup. algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche.* [Math. Annalen, Bd. 46, (1896)].

(3) G. FANO: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni razionali.* [Ann. di Mat., t. 24, (3), (1915)].

(4) F. ENRIQUES: *Sulle irrazionalità da cui etc.*.. [Math. Ann., Bd. 49, (1897), pag. 22].

I primi numeri sono dedicati ad una indagine sulle superficie dello S_3 aventi ∞^2 curve sezioni di genere zero od uno, i cui risultati erano necessari per gli scopi del lavoro.

Essi possono esprimersi nei due teoremi:

I. - *Le superficie dello S_3 con ∞^2 curve-sezioni piane razionali sono: o superficie a curve-sezioni ellittiche o superficie aventi un punto multiplo proprio O, che possono essere normali nello S_3 solo se monoidi, ovvero sono normali in uno S_r con $r > 3$, e qui possiedono un punto multiplo proprio da cui si proiettano o nella superficie di Veronese o in una rigata razionale.*

II. - *Le superficie dello S_3 con ∞^2 curve-sezioni ellittiche piane sono: o superficie a curve-sezioni di genere due o superficie aventi un punto multiplo proprio O, che possono essere normali nello S_3 solo se hanno ordine n e un punto $(n-2)$ —* — plo, *ovvero sono normali in uno S_r con $r > 3$, e qui possiedono un punto multiplo proprio da cui si proiettano in superficie a curve sezioni ellittiche.*

Di tutte queste superficie vengono determinati i caratteri proiettivi ed i relativi sistemi lineari rappresentativi, che risultano tutti sovrabbondanti, e quindi le superficie stesse risultano tutte speciali.

Passo quindi alla classificazione proiettiva delle varietà a tre dimensioni segate in superficie razionali dagli iperpiani per un punto O, e si dimostra che queste V_3, escluso il caso delle V_3 a sezioni ellittiche per O, normali in S_4, risultano razionali e si possono rappresentare nello S_3 con un sistema lineare di superficie ottenuto sommando una superficie fondamentale ω ad un sistema lineare ∞^3 di uno dei tipi seguenti:

1° - *Il sistema dei piani di uno S_3.*

2° - *Sistema di superficie d'ordine n con punto $(n-1)$ — plo.*

3° - *Sistema di superficie d'ordine n con retta l multipla dell' ordine $n-2$.*

4° - *Sistema di superficie del terzo ordine.*

5° - *Sistema di superficie del quarto ordine con conica doppia.*

6° - *Sistema di superficie del quarto ordine con tacnodo.*

7° - *Sistema di superficie del sesto ordine con un punto quadruplo e in esso lo stesso piano tangente quadruplo, e due rette doppie infinitesime nei successivi intorni del punto e nella giacitura del piano tangente; ed inoltre due punti doppi infinitamente vicini, con una retta doppia infinitesima nell'intorno del secondo.*

Tali sistemi risultano appunto tutti contenuti nei sistemi lineari analoghi di dimensione maggiore di tre ([5]). Essi esauriscono inoltre tutti i possibili sistemi lineari ∞^3. Le V_3 normali in S_4 a curve-sezioni ellittiche per un punto O, risultano trasformabili in forme cubiche, non essendo naturalmente escluso che si arrivi a particolari V_3^3 razionali, ciò che anzi succede in casi evidenti, ma comunque lo studio di tale caso non è approfondito.

1. - Sia F una superficie algebrica ed irriducibile, immersa in uno S_3 e si supponga che essa ammetta ∞^2 curve-sezioni piane razionali C^*. Facendo variare con continuità ([6]) una sezione piana C di F essa può divenire razionale solo con l'acquisto di nuovi punti doppi, ed un tale acquisto può avvenire per due motivi, o perchè il piano con cui si sega diviene tangente ad F, o perchè il piano si trova a passare per un punto multiplo *proprio* di F.

Nel primo caso, poichè notoriamente una superficie F dello S_3 non può avere ∞^2 piani bitangenti distinti, la sezione piana C^* può acquistare ∞^2 volte un solo punto doppio, e quindi la F stessa dev'essere una superficie a curve-sezioni ellittiche.

Ciò escluso occorre ammettere che il sistema delle C^* è una rete lineare segata su F dai piani per un punto O di F.

Quindi si ha intanto:

Teorema 1. - «*Se una superficie F, algebrica ed irriducibile, dello S_3 ammette ∞^2 curve-sezioni piane razionali o è a curve-sezioni ellittiche, ovvero quelle sezioni sono quelle dei piani di una stella avente il centro in un punto multiplo O, proprio, di F*».

([5]) U. Morin, Loc. cit. (1), p. 149.
([6]) Zariski: *Algebraic Surfaces*, p. 104.

2. - Consideriamo ora il secondo caso. Intanto la superficie F (certamente razionale per un caso particolare di ben noti teoremi) sarà normale in un certo spazio S_r. Sia p il genere delle sezioni iperpiane C di F e sia i l'indice di specialità della serie caratteristica del sistema $|C|$. Si ha notoriamente:

$$r = n - p + i + 1 .$$

D'altra parte l'intorno del punto O potrà riguardarsi come una curva eccezionale ϑ di un certo genere π, e se si suppone che O sia μ — plo per F, la ϑ avrà μ punti di collegamento con la C^* e quindi il genere p di una $C \equiv C^* + \vartheta$ potrà esprimersi nella forma:

$$p = \pi + \mu - 1 .$$

Ma la serie $g_{n-\mu}^{r-2}$ segata fuori di O su una C^* dalle C deve risultare completa, ed essendo la C^* razionale, si dovrà avere:

$$r - 2 = n - \mu ,$$

e quindi confrontando con le precedenti: $i = \pi$.

Cioè l'indice di specialità della superficie F coincide con il genere della curva infinitesima ϑ rappresentante l'intorno del punto O.

Si ha anche: $r = n + 2 - \mu$, e $p = \pi + \mu - 1$, rispettivamente per la dimensione e il genere del sistema delle C. Quindi in particolare si ha $r = 3$, solo se: $\mu = n - 1$, cioè:

Teorema 2. – «*Le uniche superficie con una rete lineare, segata dai piani per un punto, normali nello S_3 sono i monoidi. Ogni altra F^n di quel tipo può dunque pensarsi come proiezione da punti esterni di una F'^n di uno S_r con $r > 3$*».

Si noti che il teorema dimostrato equivale al fatto ben noto che ogni rete lineare di curve razionali data su un piano è birazionalmente trasformabile o nella rete delle rette od è contenuta totalmente in un sistema lineare almeno ∞^3 (7).

(7) Enriques-Conforto: *Le superficie razionali*, p. 298.

3. - Sono ora facilmente assegnabili i caratteri proiettivi delle F^n in discorso. Infatti, se $r = 3$ si ha il caso del monoide il cui sistema rappresentativo si ottiene aggiungendo una curva fondamentale d'ordine $n - 1$ al sistema delle rette del piano.

Escluso questo caso il sistema ∞^{r-1} delle C^* è almeno ∞^3, e quindi può essere sempre birazionalmente trasformato su un piano o in un sistema di coniche o in un sistema di curve d'ordine m con punto $(m - 1) -$ plo. Trattiamo separatamente i due casi:

1° Tipo. - *Sistema almeno* ∞^3 *di coniche* C^2. Si aggiunga al sistema una curva ϑ d'ordine ν e genere π, in modo che la ϑ risulti fondamentale pel sistema completo delle $C \equiv C^2 + \vartheta$.

Si supponga che il sistema $|C^2|$ abbia s punti base (necessariamente semplici) e che la ϑ abbia $\mu \leq 2\nu$ intersezioni variabili con le C^2. Il sistema delle C avrà allora dimensione: $r = 6 - s \geq 4$, e, per le formule del n. 2, la F avrà ordine $n = \mu + 4 - s$, e curve sezioni di genere: $p = \pi + \mu - 1$, e quindi dal suo punto $\mu -$ plo O essa si proietterà o in una superficie di Veronese $(s = 0)$ o in una rigata cubica $(s = 1)$ o in una quadrica $(s = 2)$.

2° Tipo. - *Sistema almeno* ∞^3 *di* C^m *con punto* A $(m - 1) -$*plo*. Aggiungendo, analogamente a sopra una ϑ, si consideri il sistema completo delle $C \equiv C^m + \vartheta$, e sia ancora s il numero dei punti base delle C^m oltre A. La dimensione di $|C|$ risulta: $r = 2m - s + 1$, e quindi, ancora dalle formule del n. 2, si ha per l'ordine n ed il genere p: $n = 2m - s + \mu - 1$, e $p = \pi + \mu - 1$.

Si ha dunque il teorema:

Teorema 3. - « *Una superficie* F^n *con una rete lineare di curve razionali o è un monoide, o è una* $F^{\mu+4-s}$ *dello* S_{6-s} *a curve-sezioni di genere* $p = \pi + \mu - 1$, *con* $s = 0, 1, 2$, *ed è rappresentata sul piano da un un sistema completo di curve* $C^{\nu+2}$ *che si ottiene aggiungendo ad un sistema lineare di coniche almeno* ∞^3, *una* ϑ *fondamentale di genere* π *ed ordine* ν, *ovvero una* $F^{2m-s+\mu-1}$ *dello* S_{2m-s+1} *a curve sezioni di genere* $p = \pi + \mu - 1$, *rappresentata nel piano dal sistema completo di curve* $C^{m+\nu}$ *che* *si ottiene aggiungendo ad un sistema di C^m con A $(m-1)$ — plo, almeno ∞^3, una ϑ fondamentale di genere π ed ordine ν».*

È da notarsi che tutti questi sistemi lineari risultano sovrabbondanti e le relative F speciali d'indice π. Inoltre le superficie F del primo tipo contengono una rete di curve d'ordine $\mu + 2$ con $O\,\mu$ — plo, e quelle del secondo tipo un fascio razionale di curve d'ordine $\mu + 1$ con $O\,\mu$ — plo.

Se col simbolo φ_i s'indica un polinomio in coordinate non emogenee (x, y) d'ordine i si possono scrivere immediatamente le equazioni dei relativi sistemi lineari rappresentativi. Esse sono:

$$\text{I)}\quad \varphi_\nu \cdot \sum_0^{5-s} \lambda_i \varphi_2^{(i)} + \lambda\, \varphi_{\nu+2} = 0,$$

$$\text{II)}\quad \varphi_\nu \cdot \sum_0^{2m-s} \lambda_i (\varphi_m^{(i)} + \varphi_{m-1}^{(i)}) + \lambda\, \varphi_{\nu+m} = 0,$$

$$\text{III)}\quad \varphi_{n-1} \cdot (a\,x + b\,y + c) + \lambda\, \varphi_n = 0,$$

in cui il terzo [8] rappresenta il monoide, ed s esprime come già detto il numero dei punti base semplici delle C^2 o delle C^m (fuori di A se $m = 2$).

4. – Si consideri ora una superficie F dello S_3 che ammetta ∞^2 curve-sezioni piane ellittiche.

Si dimostra allora in modo perfettamente analogo al n. 1 il teorema:

Teorema 4. - « *Se una superficie, algebrica ed irriducibile, ha ∞^2 curve-sezioni ellittiche o le sezioni stesse sono quelle fatte coi piani tangenti ed allora la F^n è a curve-sezioni di genere due ovvero le ∞^2 sezioni devono essere quelle dei piani di una stella avente il centro in un punto O, multiplo proprio per F* ».

[8] Il sistema (III) potrebbe pensarsi caso particolare di (I) per $s = 3$.

5. – Consideriamo ora il caso che la superficie F abbia una rete lineare di curve ellittiche C^* sezioni piane. Intanto la superficie con un ben noto procedimento indicato da Castelnuovo può rappresentarsi su una involuzione piana e quindi è razionale. Per la dimensione r ed il genere p del sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F pensato reso completo, si ha ancora: $r = n + 1 - \mu$, e $p = \pi + \mu$, e quindi ancora $\pi = i$, cioè l'indice di specialità coincide col genere della curva infinitesima rappresentante l'intorno di O.

Per $r = 3$ risulta necessariamente: $\mu = n - 2$, e quindi il teorema:

Teorema 5. – «*Le uniche superficie con una rete di curve ellittiche sezioni piane, e normali in S_3, sono delle F^n con punto O^{n-2}*».

Esse contengono dunque una rete lineare di curve ellittiche di grado due, e possono dunque rappresentarsi nel piano doppio con quartica di diramazione, che risulta generalmente irriducibile e di genere tre [9]. Essa può tuttavia particolarizzarsi in casi

[9] Ciò può vedersi facilmente considerando il seguente esempio abbastanza esteso. Intanto se il punto $(n-2)$ — plo O si prende nel punto improprio dell'asse z, l'equazione della F può scriversi nella forma:

$$z^2 \cdot \varphi_{n-2}(xy) + 2z\,\varphi_{n-1}(xy) + \varphi_n(xy) = 0;$$

qisogna ora esprimere che, a meno di componenti doppie, la curva di diramazione $\Delta = 0$, è una quartica. Si ponga perciò, supposto $n = 2i + 3$, $\varphi_{n-1} \equiv \psi_{2i}(xy) \cdot g_2(xy)$, $\varphi_n \equiv \rho_i^2(xy) \cdot g_3(xy)$, $\varphi_{n-2} \equiv \chi_i^2(xy) \cdot g_2(xy)$, in cui ρ_i e χ_i si suppongono primi fra loro e $\psi_{2i} \equiv \rho_i\,\chi_i$. L'equazione precedente allora diviene:

$$z^2 \cdot g_1 \cdot \chi_i^2 + 2z \cdot g_2 \cdot \psi_{2i} + g_3 \cdot \rho_2^i = 0.$$

La curva di diramazione è in tal caso:

$$g_2^2 \cdot \psi_{2i}^2 - g_1 \cdot g_3 \cdot \chi_i^2 \cdot \rho_i^2 - 0$$

ossia,

speciali. Se ad esempio si considera la $F_2'^4$ con retta e punto doppio questa può notoriamente ([10]) trasformarsi in una F^3 con punto doppio, che si rappresenta direttamente nel piano semplice senza alcuna irrazionalità nei coefficienti. In generale invece le superficie del tipo in discorso sono rappresentabili nel piano semplice introducendo nei coefficienti quelle stesse irrazionalità che occorrono nella risoluzione della equazione delle 28 tangenti doppie alla quartica di diramazione ([11]).

Tralasciamo qui di determinare tutti i casi particolari in cui quelle irrazionalità possono diminuire, notando solo che questo sarà certamente il caso per $p = 2, 3$.

6. - I tipi proiettivi di F^n con una rete di curve-sezioni piane ellittiche si lasciano determinare immediatamente ricordando che la F^n può sempre rappresentarsi nel piano in modo che quella rete sia rappresentata da una rete di cubiche C^3 con s · punti base o da una rete di C^4 con due punti doppi e *nessun altro punto base* (altrimenti essa sarebbe ancora trasformabile in una rete di C^3). Se ad una di queste reti si aggiunge una curva ϑ fondamentale di genere π ed ordine ν e se μ è il numero delle intersezioni variabili delle curve della rete con la ϑ, si ha nel primo caso: $r = 10 - s$, e quindi con le formule del n. 5, $n = \mu + 9 - s$, $p = \pi + \mu$. Nel secondo caso si trova invece: $r = 9$, $n = \mu + 8$, $p = \pi + \mu$.

$$\psi_{2i}^2 (g_2^2 - g_1 g_3) = 0,$$

e quindi a prescindere dal fattore doppio ψ_{2i}^2 immagine della curva doppia, è data da:

$$\Delta_4 = g_2^2 - g_2 g_3 = 0;$$

poichè d' altra parte le g_r sono a nostra disposizione, è ben noto che sotto tale forma si può porre la più generale C^4 di genere tre (cfr. ENRIQUES-CONFORTO: *Le superficie razionali*, p. 414).

([10]) ENRIQUES-CONFORTO: *Le superficie razionali*, p. 163.

([11]) ENRIQUES, Loc. cit. (4), p. 11.

Si ha dunque il teorema:

Teorema 6. « *Le superficie F con ∞^2 curve-sezioni ellittiche per un punto O μ — plo proprio per F, sono o superficie d'ordine $n = \mu + 9 - s$ dello spazio S_{10-s} $(0 \leq s \leq 7)$ o superficie d'ordine $n = \mu + 8$ dello S_9. Esse hanno curve-sezioni di genere $p = \pi + \mu$, e sono speciali d'indice π. Esse si proiettano tutte da O in superficie a curve-sezioni ellittiche* [12] ».

È ancora notevole che tutte queste superficie si rappresentano sul piano con le stesse irrazionalità occorrenti per le superficie a curve-sezioni ellittiche in cui esse si proiettano.

7. – Passiamo ora a considerare una varietà a tre dimensioni dello S_4 contenente un sistema lineare Λ_3 ∞^3 di superficie razionali ϕ, segato dagli S_3 per un punto O che sarà multiplo proprio di molteplicità μ per la V_3, altrimenti questa sarebbe senz'altro a superficie sezioni razionali.

In tale situazione il sistema Λ_3 sarà senz'altro composto con una involuzione di punti, a meno che la V_3 non sia un cono (razionale). Le mutue intersezioni delle ϕ, o curve caratteristiche del Λ_3, che diremo C^*, sono quindi irriducibili e pertanto la V_3 può, per un teorema di F. Enriques [13], rappresentarsi su una involuzione di punti dello S_3, ossia essa è certamente *unirazionale* e quindi *regolare*.

8. – Supponiamo che la V_3 sia *a curve-sezioni razionali per O* In tal caso le superficie ϕ stesse sono a curve sezioni razionali per O, e quindi esse possono essere di uno dei tre tipi determinati al n. 3, cioè o monoidi o superficie con una rete di curve razionali d'ordine $\mu + 2$ aventi in O un punto

(12) Naturalmente qui si ammette che, per $s = 2$, il piano doppio con quartica di diramazione sia esso stesso pensato come una *superficie* a curve-sezioni ellittiche, rappresentabile appunto sul piano con una rete di cubiche ellittiche con sette punti base.

(13) F. Enriques, Loc. cit. (4), p. 22. Ciò consegue anche in base ad un noto teorema di Enriques - Castelnuovo, in « *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une varieté algebrique a plusieurs dimensions*: Ann. Sc. de l'Ecole Nat. Sup., t. 23 (3), (1906), pp. 339-366.

μ — plo o superficie con un fascio di curve razionali d'ordine μ — plo ed O μ — plo.

Nel primo caso la V_3 stessa è un *monoide* ed essa si rappresenta direttamente sullo S_3 per proiezione dal punto O. Il sistema lineare rappresentativo si trova sommando al sistema ∞^3 dei piani dello S_3 una superficie fondamentale ω di ordine $n-1$, immagine del punto O, ed il sistema delle $\phi - O$ si rappresenta *col sistema dei piani.*

In entrambi gli altri casi, tenendo presente la regolarità della V_3 ed il fatto che le ϕ non sono normali in S_3, la V_3 stessa non può essere normale nella S_4 e quindi sarà normale almeno in uno S_5, e per proiezione da O si trasformerà o in una *quadrica* o in un *cono di Veronese* (od una sua proiezione) o in un *fascio razionale di piani* che sono infatti gli unici tipi di V_3 a curve-sezioni razionali ([14]).

Il sistema ∞^3 delle ϕ non è dunque in tal caso completo, ed è contenuto in un sistema almeno ∞^4 che potrà quindi essere o *il sistema delle quadriche per una conica* o *il sistema delle quadriche tangenti in un punto ad un piano o il sistema delle superficie d'ordine n con retta base* $(n-1)$ — *plo* ([15]). Il sistema $|F|$ dove F è una sezione iperpiana generica della V_3, sarà al solito dato dalle $F \equiv \omega + \phi^*$ con ω superficie fondamentale per $|\phi^*|$, immagine in S_3 di $|\phi|$.

9. – Se invece le curve-sezioni C della V_3 per O sono *curve ellittiche d'ordine maggiore di* $\mu + 3$, essendo μ la molteplicità di O, cioè se $n > \mu + 3$, consegue immediatamente dai risultati del **n. 5**, ed in particolare dal teorema n. 5, che le ϕ sono normali almeno in S_4, e quindi la varietà stessa, secondo una osservazione nel numero precedente, è normale almeno in S_5, e per proiezione da O si trasforma in una varietà a curve-sezioni ellittiche d'ordine maggiore di tre. La razionalità di queste varietà induce allora la razionalità della nostra V_3. Il sistema $|\phi - O|$ si rappresenterà nello S_3 con un sistema lineare almeno ∞^5 di superficie a curva caratteristica ellittica ed il nostro sistema ∞^3

([14]) F. Enriques, Loc. cit. (2), n. 9.
([15]) F. Enriques, Loc. cit. (2), n. 10.

sarà contenuto in esso. Tali sistemi, com'è noto [16], sono se $m = n - \mu$:

1° - Per $m = 4$, il sistema di superficie cubiche determinato da una quintica intersezione parziale di una quadrica, eventualmente degenere.

2° - Per $m = 5, 6, 7, 8, 9$ il sistema ∞^{m+1} di superficie cubiche con un punto base doppio, $9 - n$ rette base per esso, ed in esso lo stesso cono quadrico tangente (sistema immagine di un cono).

3° - Per $m = 5$, il sistema ∞^6 di superficie cubiche determinato da una quartica di seconda specie eventualmente degenere.

4° - Per $m = 6$, il sistema ∞^7 delle superficie cubiche passanti per tre rette sghembe.

5° - Per $m = 6$, il sistema ∞^7 delle superficie cubiche con un punto base doppio e contenenti una cubica gobba (che può degenerare) passante semplicemente per esso.

6° - Per $m = 6$, il sistema ∞^7 delle superficie cubiche con un punto base biplanare ed in esso il piano osculatore fisso, passanti per una cubica piana di cui il detto punto è doppio.

7° - Per $m = 7, 8$, il sistema ∞^8 e ∞^9 delle quadriche con un punto base o risp. di tutte le quadriche.

8° - Per $m = 8$, il sistema delle superficie del quarto ordine con un punto base triplo, due rette base doppie per esso, ed in esso, lo stesso cono tangente.

10. - Se si lascia cadere la ipotesi $n > \mu + 3$, restano ancora i due casi $n = \mu + 2$, e $n = \mu + 3$. Nel primo caso la nostra V_3, normale nello S_4, può per proiezione da O rappresentarsi su uno S_3 doppio con superficie quartica di diramazione a curve sezioni di genere tre, che (cfr. nota [9] n. 5) risulta generalmente di *tipo generale*, quale quello che si ottiene proiettando sullo S_3 la V_3^3 da un suo punto, e che quindi in generale è da ritenersi *irrazionale*. È chiaro però che possono esservi particolari casi di razionalità, come quelli evidenti in cui le curve sezioni C della V_3 risultino di genere due o tre.

[16] F. Enriques, Loc. cit. (2), n. 20.

10

Se invece $n = \mu + 3$, per proiezione da O si ottiene in S_4 una ipersuperficie cubica, che generalmente sarà *irrazionale.* Anche qui si possono vedere casi evidenti di razionalità: se ad esempio $\mu = 2$, cioè si ha una V_3^5 con punto doppio di S_5, essa dal suo punto doppio si proietta in una ipersuperficie cubica che conterrà la quadrica immagine del punto doppio, che rispetto il sistema $|F|$ delle sezioni iperpiane avrà per residuo un piano. Resta quindi così determinato sulla superficie cubica un fascio di quadriche, e quindi la V_3^5 è razionale ed anzi riferibile allo S_3 senza alcuna irrazionalità.

Questo caso poichè si ha $\mu = 2$ e quindi $\pi = 0$, $p = \mu + \pi = 2$, rientra nel caso delle varietà a curve-sezioni di genere due, notoriamente razionali se non sono rigate ([17]).

Tralasciamo comunque a questo punto un dettagliato esame dei singoli casi di razionalità, limitandoci a raccogliere la conclusione che *le* V_3 *con punto* μ *— plo, d'ordine* $\mu + 2$ *o* $\mu + 3$ *a curve-sezioni ellittiche per il punto sono generalmente irrazionali* (*restando esclusi i valori più bassi* $p = 2, 3$ *del genere*).

11. - È ancora ovvio che tutte le varietà contenenti un sistema ∞^3 di superficie sezioni razionali per un punto O, a curve-sezioni razionali od ellittiche per O, escluso nel secondo caso le due eccezioni già segnalate, si possono rappresentare sullo S_3 *con le stesse irrazionalità nei coefficienti occorrenti per le* V_3 *a curve-sezioni razionali o risp. ellittiche, che notoriamente sono radicali cubici e quadrati, e le radici di una equazione per la bisezione delle funzioni abeliane di genere tre* ([18]).

12. - Supponiamo ora che le curve-sezioni C^* per O abbiamo genere $\pi \geq 2$ e sia $\Phi = \varphi - O$. Consideriamo allora nella nostra V_3 il sistema $|\Phi + \mu\Phi'|$ che sega sopra una Φ (depurato da eventuali componenti fisse) il sistema completo $|C^{(\mu)}|$, μ — aggiunto al sistema delle C^*.

Poichè la Φ è razionale, per un certo valore ν di μ, il sistema $|C^{(\nu)}|$ è un sistema lineare, di dimensione $s \geq 1$ di curve

([17]) F. Enriques, Loc. cit. (2).
([18]) U. Morin, Loc. cit. (1) pp. 151-152.

irriducibili *razionali* od *ellittiche*, o un sistema costituito di gruppi di curve irriducibili di un fascio razionale di curve razionali. Discuteremo nel seguito questi due casi.

13. — *Si supponga che* $C^{(\nu)}$ *sia razionale,* cioè che le superficie $(\Phi + \nu\Phi')$ siano a curve-sezioni razionali per O. Di queste superficie potremo considerarne un fascio lineare. Analogamente se le $C^{(\nu)}$ sono composte con le curve razionali di un fascio, la varietà contiene un fascio razionale di superficie a curve sezioni razionali per O.

Le superficie di questo fascio che non possono stare in S_3, altrimenti si ricadrebbe nel caso del n. 8, potranno essere superficie contenenti un fascio di C^{n+1} con O^n e in tale caso la V_3 conterrà una congruenza d'indice una di tali curve e quindi sarà birazionalmente trasformabile in una rigata razionale e perciò la V_3 è razionale. Il fascio della $\Phi + \nu\Phi'$ sarà sempre birazionalmente trasformabile in un fascio di piani dello S_3 e le superficie immagini delle Φ nello S_3 dovranno segare sistemi di curve C^m con punto base $(m - 1)$ — plo; le ϕ potranno quindi rappresentarsi *in superficie d'ordine m con punto base A* $(m-1)$ *-plo*, che saranno immagini delle $\Phi = \phi - O$, più una superficie fondamentale ω immagine di O.

Oppure la superficie generica del fascio può essere una superficie riferibile per proiezione da O ad una superficie di Veronese. Siccome tale processo avviene senza introdurre irrazionalità nei coefficienti, quel fascio può sempre riferirsi ad un fascio di piani dello S_3 su cui le superficie immagini delle Φ dovranno segare sistemi di coniche, e quindi saranno superficie d'ordine m con retta $(m - 2)$ — pla. Per ottenere le ϕ basta al solito aggiungere una superficie fondamentale ω.

Oppure la superficie generica del fascio può essere riferibile per proiezione da O ad una *quadrica* e la V_3 risulta allora a curve-sezioni iperellittiche per O. Essa risulta ancora evidentemente razionale, e si può riferire allo S_3 in modo che le $\phi - O$ abbiano per immagine un sistema lineare di superficie d'ordine m con retta l multipla d'ordine $(m - 2)$, e curva base incontrata in due punti dai piani per l su cui si sono rappresentate le $(\Phi + \nu\Phi')$ del fascio.

Notiamo che questo ultimo caso esaurisce anche la possibilità che le curve-sezioni per O siano di genere $\pi = 2$.

14. - Supponiamo ora per tutti i numeri seguenti che $C^{(\nu)}$ sia una curva ellittica, cioè la generica $(\Phi + \nu\Phi')$ è una superficie a curve-sezioni ellittiche per O. In tale caso il sistema $|\Phi + (\nu + 1)\Phi'|$ ha dimensione zero, ed il sistema $|\Phi + \mu\Phi'|$, con $\mu \geq \nu + 2$, è virtuale.

Se la dimensione del sistema lineare $|\Phi + \nu\Phi'|$ è $s \geq 2$, la curva caratteristica γ del sistema stesso ha con gli S_3 per O, s intersezioni variabili (tale infatti è l'ordine della serie caratteristica del $|C^{(\nu)}|$ della Φ).

Se inoltre $s > 2$, poichè su una Φ il sistema completo $|C^{\mu}|$ di curve ellittiche di dimensione $s > 2$ è semplice, ove $|\Phi + \nu\Phi'|$ sia composto con una congruenza di curve, queste dovranno essere curve d'ordine $i + s$ con O i — plo, e quindi si ricade nel primo caso del n. 13.

15. - Se ciò *per* $s > 2$ non si verifica, osserviamo che il sistema $|2(\Phi + \nu\Phi')|' = |\Phi + (2\nu + 1)\Phi'|$ è virtuale, cioè la curva caratteristica γ del sistema $|\Phi + \nu\Phi'|$ è razionale. La immagine proiettiva del sistema $|\Phi + \nu\Phi'|$ è dunque una V_3^* d'ordine $s - 2$, d'uno spazio lineare ad s dimensioni, a curve-sezioni razionali.

16. - Si deduce quindi da qui intanto che la nostra V_3 è razionale e che il nostro sistema $|\Phi|$ può essere rappresentato nello S_3 in un sistema cremonianamente trasformabile in un sistema contenuto in un sistema almeno ∞^4 che nel nostro caso può soltanto essere (19):

1° - *Per* $s = 3$, *sistema delle superficie cubiche.*

2° - *Per* $s = 4$, *sistema delle superficie del quarto ordine con conica doppia.*

Inoltre il valore s non può mai superare quattro (20).

(19) U. Morin, Loc. cit. (1), n. 10, 15.
(20) U. Morin, Loc. cit. (1), n. 12.

17. - Se invece si suppone $s = 2$, il sistema delle $C^{(\nu)}$ su una Φ è una rete di curve ellittiche.

La Φ può essere rappresentata sul piano mediante un sistema lineare di curve il cui ν — aggiunto è una rete di cubiche con sette punti base. La curva caratteristica γ di $|\Phi + \nu\Phi'|$, in quanto ha con Φ due punti comuni è una φ^{i+2} con O^i razionale, a meno che non si spezzi in due φ^{r+1} con O^r nel qual caso si ricadrebbe nel n. 8.

Dunque la V_3 contiene una congruenza di φ^{i+2} con O^i.

18. - Si supponga infine per $s = 2$, $\nu > 1$. Il sistema $|\Phi + (\nu - 1)\Phi'|$ non è in tal caso composto con la congruenza delle φ^{i+2} perchè il sistema $|C^{(\nu-1)}|$ è semplice. Su una $\Phi + (\nu - 1)\Phi$, certo razionale, il sistema $|\Phi + \nu\Phi'|$ sega (a meno di componenti fisse) il sistema *completo* aggiunto al sistema delle curve-sezioni della $(\Phi + (\nu - 1)\Phi')$. Ma poichè il sistema $\{|\Phi + (\nu - 1)\Phi'| + |\Phi + \nu\Phi'|'\}' = |\Phi + 2\nu\Phi'|$ è virtuale, la curva intersezione variabile di $|\Phi + \nu\Phi'|$ con la $(\Phi + (\nu - 1)\Phi')$ è razionale. Così il sistema $|\Phi + \nu\Phi'|$ determina sulla $|\Phi + (\nu - 1)\Phi'|$ una *rete omaloidica*. Da ciò segue in particolare che le superficie $(\Phi + (\nu - 1)\Phi')$ sono unisecanti le φ^{i+2}. Tanto basta per poter dire che quelle φ^{i+2} si possono trasformare nelle rette di una stella dello S_3 e quindi la V_3 è ancora razionale.

Inoltre poichè il sistema $|\Phi + (\nu - 1)\Phi'|$ è a curva caratteristica razionale, la V_3^* immagine del sistema $|\Phi + (\nu - 1)\Phi'|$ è una varietà a curve-sezioni razionali e in essa le immagini delle φ^{i+2} sono rette.

Il sistema delle Φ viene ancora in tale caso ampliato in quello segato dalle quadriche dello S_6 (in cui giace V_3^*) sulla V_3^* ([21]).

Ed analogamente si procede nel caso $\nu = 1$, in cui il sistema delle Φ viene ancora ampliato nel sistema segato nella V_3^* dalle quadriche sottoposte ad opportune condizioni ([22]).

([21]) U. Morin, Loc. cit. (1), n. 14.
([22]) U. Morin, Loc. cit. (1), n. 16.

I due sistemi lineari cui così si perviene immagini delle $\Phi = \psi - O$, sono:

1° - *Il sistema delle superficie del quarto ordine con tacnodo*,

2° - *Un sistema parzialmente contenuto nel precedente.*

19. - Rimane ancora da discutere l'ipotesi che $s = 1$, cioè il caso che le $C^{(\nu)}$ formino un fascio di curve ellittiche sopra una Φ.

Una Φ può allora venire rappresentata su un piano in modo che al fascio delle $C^{(\nu)}$ corrisponda un fascio di cubiche (si tenga presente che $\pi > 2$); e che al sistema precedente corrisponda il sistema ∞^3 delle sestiche con 8 punti base doppi, composto con una involuzione I_2.

Il sistema delle superficie $|\Phi + (\nu - 1)\Phi'|$ che sega su Φ il sistema $|C^{(\nu-1)}|$ composto con la I_2, è dunque composto con una congruenza di curve φ^{i+2} razionali con O^i. (Si esclude il caso che le φ^{i+2} degenerino in due φ^{r+1} con O^r perchè si rientrerebbe in un caso già fatto al n. 8).

20. - Se si suppone $\mu \geq 3$, seguendo U. Morin ([23]), si dimostra in tale caso che il sistema $|\Phi + (\nu - 2)\Phi'|$ è un sistema lineare semplice, la cui immagine proiettiva risulta una V_3^* contenente una congruenza di rette, immagini delle φ^{i+2}, unisecanti una superficie (razionale) $(\Phi + (\nu - 2)\Phi')$.

In tal caso la V_3 risulta dunque ancora razionale, ed il sistema delle Φ risulta ampliato in un sistema di dimensione superiore a tre, che si ottiene segando la V_3^* con un opportuno sistema di forme cubiche ([24]).

Infine per $\nu = 2$, si ottiene ancora lo stesso risultato salvo che il sistema risulta un sistema contenuto nel precedente. Concludendo, in tale caso, si trovano i due sistemi:

1° - *Sistema di superficie rappresentabili sul piano doppio con sestiche di diramazione aventi due punti tripli infinitamente vicini.* $(\nu = 5)$.

2° - *Un sistema contenuto nel precedente.* $(\nu = 2)$.

([23]) U. Morin, Loc. cit. (1), n. 18, 19.

([24]) U. Morin, Loc. cit. (1), n. 19, 20, 21.

21. - Riassumendo l'analisi svolta si può dunque concludere che una varietà a tre dimensioni V_3 dello S_4 che ammetta ∞^3 superficie-sezioni per un suo punto O, è, escluso il caso che le superficie stesse siano a curva-sezione ellittica ed il sistema sia dei gradi 2 o 3, nei quali casi essi sono riferibili allo S_3 doppio con superficie quartica di diramazione o a ipersuperficie cubiche, razionale e che anzi il sistema di quelle superficie sezioni risulta ampliabile, cosicchè esse sono normali almeno in spazii a cinque dimensioni escluso il monoide.

Scende da qui che la loro classificazione proiettiva è immediata. Esse si trovano tutte considerando un qualsiasi sistema ∞^3 contenuto in un sistema almeno ∞^4 (tutti già noti) ed aggiungendo a quel sistema una superficie fondamentale ω o eseguendo la stessa operazione su un sistema di piani.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Teorema 6. - *Una V_3 dello S_4 a superficie-sezioni razionali per un punto O, può essere:*

1° - *Una V_3 rappresentabile nello S_3 doppio con superficie quartica di diramazione di tipo generale.*

2° - *Una V_3 razionale che risulta normale almeno in uno S_5 a superficie-sezioni razionali per un suo punto multiplo proprio O.*

3° - *Un monoide.*

In tale teorema devesi naturalmente notare che lo S_3 doppio del 1° tipo può in casi speciali ridursi, come abbiamo già notato (n. 9).

22. - Si supponga ora di avere invece un sistema assegnato ∞^3 di superficie razionali nello S_3, composto con una involuzione di punti. Aggiungendo alle superficie del sistema una superficie fondamentale ω, si ottiene un sistema lineare che risulta certo *semplice,* se ω si sceglie non appartenente alla involuzione con cui è composto il sistema dato ed almeno ∞^4.

La immagine proiettiva del sistema risulta una V_3 del tipo già considerato che ora sarà razionale per costruzione. Pertanto quel sistema ∞^3 risulterà di uno dei tipi già trovati, più eventualmente tipi di sistemi a curva caratteristica ellittica e di grado due o tre. Si conclude dunque:

Teorema 7. - *Un sistema lineare* ∞^3 *di superficie razionali dello* S_3 *può essere:*

1° - *Il sistema dei piani dello* S_3.

2° - *Un sistema a curva caratteristica ellittica di grado due o tre.*

3° - *Un sistema contenuto in un sistema di dimensione superiore.*

23. - È infine ovvio che il teorema 6 può estendersi al caso che il sistema lineare ∞^3 sia un arbitrario sistema di superficie razionali contenuto nella nostra V_3, semprechè esso sia composto con una involuzione di punti. Infatti si può sempre, con opportuna trasformazione birazionale, passare al caso che il sistema sia quello segato dagli S_3 per un punto su una V_3^* dello S_4. In tale caso il teorema diviene semplicemente, tolte le caratterizzazioni di natura proiettiva:

Teorema 8. - *Una varietà a tre dimensioni contenente un sistema lineare* ∞^3 *di superficie razionali composto con una involuzione o è riferibile a una forma cubica ovvero è razionale. Il primo caso potendo darsi solo se il sistema stesso ha curva caratteristica ellittica, e grado due o tre.*