Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Enrico Magenes

Sulle equazioni di Eulero relative ai problemi di calcolo delle variazioni degli integrali di Fubini-Tonelli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 62-102

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__62_0>

SULLE EQUAZIONI DI EULERO RELATIVE AI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI DEGLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI

Memoria (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Padova*).

In due recenti Memorie (1), continuando le ricerche di S. FAEDO (2), ho svolto nelle linee generali la teoria dei problemi di Calcolo delle Variazioni relativi agli integrali di FUBINI-TONELLI

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx\, dz$$

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz$$

secondo il *metodo diretto del Tonelli*, studiandone la semicontinuità e l'esistenza dell'estremo in classi di curve « ordinarie ».

In questa Memoria continuo lo svolgimento di tale teoria, prendendo in considerazione le prime proprietà delle estremanti e le questioni ad esse connesse.

(*) Pervenuta in Redazione il 12 ottobre 1949.

(1) E. MAGENES – *Intorno agli integrali di Fubini – Tonelli: I - Condizioni sufficienti per la semicontinuità; II - Teoremi di esistenza dell'estremo* (in corso di stampa negli Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa). Esse verranno indicate nel seguito con M. I. e M. II.

(2) S. FAEDO – 1) *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali* (Ann. di Mat. pura e appl. (4) - XXIII. - (1944) pp. 69–121); 2) *Un nuovo tipo di funzionali continui* (Rend. di Mat. e delle sue appl. (5) – IV. – fasc. III.–IV. (1943)); 3) *Sulle condizioni di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli* (Lit. Tacchi, Pisa 1946). Precedentemente il funzionale $I(y)$ era stato stu-

Nel capitolo I. viene anzitutto stabilita la condizione di EULERO per le curve minimanti per $I(y_1, y_2)$. Essa si esprime per *le curve di classe* 1 (§ 1, n. 2) con il sistema

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_c^d f_{y_1}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dz - \\
&\qquad - \frac{d}{dx} \int_c^d f_{y_1'}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dz = 0 \\
&\int_a^b f_{y}\ (x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx - \\
&\qquad - \frac{d}{dz} \int_a^b f_{y_2'}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx = 0
\end{aligned}
\right.
$$

e per le *curve Lipschitziane* (n. 4) con il sistema

$$
(1') \quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_a^x dx \int_c^d f_{y_1}(x, z, \ldots.)\, dz - \frac{d}{dx} \int_a^x dx \int_c^d f_{y_1'}(x, z, \ldots.)\, dz = c_1 \\
&\int_c^z dz \int_a^b f_{y}\ (x, z, \ldots.)\, dx - \frac{d}{dz} \int_c^z dz \int_a^b f_{y_2'}(x, z, \ldots.)\, dx = c_2.
\end{aligned}
\right.
$$

diato in casi particolari da G. FUBINI (*Alcuni nuovi problemi di Calcolo delle Variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali.* – Ann. di Mat. pura e appl. (3) – XX. – 1913 – pp. 217-244), L. TONELLI (*Su alcuni funzionali* – Ann. di Mat. pura e appl. (4) – XVIII. – 1939 – pp. 1–21), G. FICHERA (*Sull' ubicazione e l' unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert* - Pubb. Ist. Appl. Calcolo n. 160 - 1944 ; *Sui funzionali continui con la metrica di Frechet* - Rend. Acc. Lincei - 8 - II - 1947 - pp. 174-177). (Per i polinomiali quadratici si veda anche : M. PICONE - *Lezioni di Analisi Funzionale* - Ed. Tumminelli - Roma - 1946 - cap. II, § 3). Anche H. H. GOLDSTINE (*Conditions for a minimum of a functional.* – Contributions to the Calculus of Variations – 1933 – 37 – Chicago – pp. 316–357 ; in particolare pp. 353–357) ha considerato il funzionale $I(y)$, ma ha ottenuto solo risultati circa il *minimo relativo debole*, come applicazione dello studio di un funzionale più generale, studio fatto, nell' ambito del Calcolo Funzionale, secondo l' indirizzo classico del Calcolo delle Variazioni.

Si introducono così attraverso i sistemi (1) e (1') le importanti definizioni di *curva estremale* (n. 3) e *curva estramaloide* (n. 5) relativa alla funzione f data.

Nel n. 5 sono anche date condizioni sufficienti perchè una estremaloide sia un'estremale, problema della massima importanza nello sviluppo della teoria.

Infine nel n. 6 viene studiato il caso delle curve minimanti anche non lipschitziane e, adattando opportunamente procedimenti usati dal TONELLI per i problemi relativi agli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni, si stabiliscono condizioni sufficienti sulla f perchè dette minimanti siano ancora delle estremaloidi.

Il § 2 è dedicato ai problemi dell'esistenza e dell'unicità delle estremali. Nel n. 1 viene anzitutto messo in chiaro con un opportuno esempio che non è in generale possibile considerare un problema di estremante o di estremale « in piccolo », a differenza di quanto avviene nei problemi relativi agli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni.

Si passa quindi senz'altro ai problemi « in grande » e vengono dati criteri di esistenza dell'estremale con assegnate condizioni « ai limiti » (n. 2) e « iniziali » (n. 3) e un criterio di unicità per l'estremale con assegnate condizioni « ai limiti ».

Nel cap. II. il § 1 è dedicato ad $I(y)$, al quale vengono trasportati tutti i risultati ottenuti per $I(y_1, y_2)$ nel cap. I.; i sistemi (1) e (1') si riducono ora rispettivamente all'unica equazione

$$\int_a^b f_{y_1}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dz -$$

$$- \frac{d}{dx}\int_a^b f_{y_1'}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dz = 0$$

e all'altra

$$\int_a^x dx \int_a^b f_{y_1}(x, z, \ldots)\, dz - \frac{d}{dx}\int_a^x dx \int_a^b f_{y_1'}(x, z, \ldots)\, dz = c\,.$$

Nel § 2 si considerano alcune applicazioni, nel campo delle equazioni integro differenziali, della teoria svolta, secondo la quale è appunto possibile dall'aver stabiliti direttamente teoremi di esistenza dell'estremo ricavare teoremi di esistenza per le equazioni di EULERO, che sono equazioni integro-differenziali.

CAPITOLO I.

LE EQUAZIONI DI EULERO RELATIVE AD $I(y_1, y_2)$

§ 1.

La condizione di Eulero e la variazione prima.

1. - Preliminari e definizioni. - Diremo *campo A* un insieme di punti dello spazio (x, z, y_1, y_2) che sia il prodotto topologico $A_1 \times A_2$ di due insiemi A_1 del piano (x, y_1) e A_2 del piano (z, y_2), contenenti ciascuno i propri punti di accumulazione al finito. Per tutti gli (x, z, y_1, y_2) di A e per ogni valore di y'_1 e y'_2 sia definita la funzione $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ che supporremo inoltre in tutto il presente capitolo continua insieme alle sue derivate parziali $f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y'_1}, f_{y'_2}$.

Ricordiamo anche che dicesi *curva ordinaria C* ogni coppia di funzioni $y_1 = y_1(x)$, $a \leq x \leq b$, $y_2 = y_2(z)$, $c \leq z \leq d$, assolutamente continue, tali che i punti $(x, y_1(x))$ e $(z, y_2(z))$ appartengano rispettivamente ad A_1 e A_2 ed esista finito l'integrale secondo LEBESGUE

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y'_1(x), y'_2(z))\, dx\, dz .$$

Diremo poi che una curva ordinaria $\overline{C}$ $[\overline{y}_1(x), \overline{a} \leq x \leq \overline{b}, \overline{y}_2(z), \overline{c} \leq z \leq \overline{d}]$, appartenente ad una classe K di curve ordinarie C, è di *indifferenza internamente rispetto ad A e K* quando esiste un $\rho > 0$ tale che i punti (x, z, y_1, y_2) con $\bar{a} \leq x \leq \bar{b}$, $|\bar{y}_1(x) - y_1| \leq \rho$, $\bar{c} \leq z \leq \bar{d}$, $|\bar{y}_2(z) - y_2| \leq \rho$ appartengano ancora ad A e ogni curva ordinaria $C\,[y_1(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b},\ y_2(z),\ \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$ avente gli stessi estremi di $\bar{C}$ (vale a dire per cui è $y_1(\bar{a}) = \bar{y}_1(\bar{a})$, $y_1(\bar{b}) = \bar{y}_1(\bar{b})$, $y_2(\bar{c}) = \bar{y}_2(\bar{c})$, $y_2(\bar{d}) = \bar{y}_2(\bar{d})$) e appartenente all'intorno (ρ) di $\bar{C}$ (vale a dire per cui risulti anche $|y_1(x) - \bar{y}_1(x)| \leq \rho$, $\bar{a} \leq x \leq \bar{b}$, $|y_2(z) - \bar{y}_2(z)| \leq \rho$, $\bar{c} \leq z \leq \bar{d}$) appartenga anche a K.

Infine diremo che la curva $C\,(y_1(x),\ y_2(z))$ è di *classe* 1 quando esistono e sono continue le derivate $y_1'(x)$ e $y_2'(z)$.

2. – La condizione di Eulero per le curve minimanti di classe 1. –

Teorema: *Se $\bar{C}\,[\bar{y}_1(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{y}_2(z), \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$ è una curva di classe* 1 *minimante per $I(y_1, y_2)$ nella classe K di curve ordinarie C ed è di indifferenza internamente rispetto ad A e K, allora essa soddisfa al sistema di equazioni integro-differenziali*

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\int_c^d f_{y_1}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x)\, y_2'(z))\, dz - \\
\qquad\qquad\displaystyle - \frac{d}{dx}\int_c^d f_{y_1'}(x, z, \ldots)\, dz = 0 \\
\displaystyle\int_a^b f_{y}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx - \\
\qquad\qquad\displaystyle - \frac{d}{dz}\int_a^b f_{y_2'}(x, z, \ldots)\, dx = 0\,.
\end{cases}
$$

Consideriamo infatti due *qualunque* funzioni $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(z)$, definite rispettivamente in $(\bar{a}, \bar{b})$ e $(\bar{c}, \bar{d})$ ed ivi assolutamente continue e con derivate, dove esistono, limitate. Per t sufficientemente piccolo la curva $C_t\,[\bar{y}_1(x) + t\varphi_1(x),\ \bar{a} \leq x \leq \bar{b},$ $\bar{y}_2(z) + t\varphi_2(z),\ \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$ risulta allora una curva di K, che si identifica con la $\bar{C}$ per $t = 0$, e poichè la $\bar{C}$ è minimante in K la derivata di $I\,(\bar{y}_1 + t\varphi_1,\ \bar{y}_2 + t\varphi_2)$ rispetto a t, per $t = 0$, se esiste, dovrà essere nulla. Mediante un ben noto ragionamento ([3]) si conclude allora che deve essere

$$(2)\qquad \int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} [\varphi_1(x)\, f_{y_1}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)) + \varphi_2(z)\, f_{y_2}(x, \ldots) + \\ + \varphi_1'(x)\, f_{y_1'}(x, \ldots) + \varphi_2'(z)\, f_{y_2'}(x, \ldots)]\, dx\, dz = 0\,.$$

Dalla (2), supponendo come è possibile, una volta $\varphi_2(z) \equiv 0$ e un'altra $\varphi_1(x) \equiv 0$, si deducono le

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} [\varphi_1(x)\, f_{y_1} + \varphi_1'(x)\, f_{y_1'}]\, dx\, dz = 0 \\ &\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} [\varphi_2(z)\, f_{y_2} + \varphi_2'(z)\, f_{y_2'}]\, dx\, dz = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Dalla prima delle (3), integrando per parti da $\bar{a}$ a $\bar{b}$ la funzione di x $\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} \varphi_1(x)\, f_{y_1}\, dz$, poichè è $\varphi_1(\bar{a}) = \varphi_1(\bar{b}) = 0$, si ottiene

$$(4)\qquad \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \varphi_1'(x) \left\{ \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} \left[f_{y_1'} - \int_{\bar{a}}^{x} f_{y_1}\, dz \right] \right\} dx = 0\,,$$

([3]) Ved. ad es. L. Tonelli – *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (Bologna) – 1921-23 – Vol. II. pag. 91.

da cui per un noto lemma di Du Bois Reymond [4] essendo $\int_{\bar{c}}^{\bar{d}}\left[f_{y_1'}-\int_{\bar{a}}^{x} f_{y_1}\,dx\right]dz$ funzione continua di x, si ha in tutto $(\bar{a}, \bar{b})$

$$(5)\qquad \int_{\bar{c}}^{\bar{d}}\left[f_{y_1'}-\int_{\bar{a}}^{x} f_{y_1}\,dx\right]dz=\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f_{y_1'}\,dz-\int_{\bar{a}}^{x} dx\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f_{y_1}\,dz=c_1\,(cost.),$$

da cui derivando, come è possibile, si ottiene la prima delle (1). In modo analogo si dimostra la seconda delle (1).

Il sistema (1) vien detto il sistema delle *Equazioni di Eulero* del problema di minimo considerato.

3. - Le estremali. — Definizione: Ogni curva $C\,[y_1(x),\ a\leq x\leq b,\ y_2(z),\ c\leq z\leq d]$ di classe 1 soddisfacente al sistema (1) si dirà un'*estremale relativa alla funzione f data.*

Se la funzione f ammette continue le derivate $f_{y_1' x}$, $f_{y_1' y_1}$, $f_{y_1' y_1'}$, $f_{y_2' z}$, $f_{y_2' y_2}$, $f_{y_2' y_2'}$ e le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(z)$ ammettono le derivate seconde $y_1''(x)$ e $y_2''(z)$, il sistema delle (1), in virtù di un noto risultato [5], si può scrivere anche nella forma

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{c}^{d} f_{y_1}\,dz-\int_{c}^{d} f_{y_1' x}\,dz-y_1'(x)\int_{c}^{d} f_{y_1' y_1}\,dz-y_1''(x)\int_{c}^{d} f_{y_1' y_1'}\,dz=0\\ &\int_{a}^{b} f_{y_2}\,dx-\int_{a}^{b} f_{y_2' z}\,dx-y_2'(z)\int_{a}^{b} f_{y_2' y_2}\,dx-y_2''(z)\int_{a}^{b} f_{y_2' y_2'}\,dx=0\end{aligned}\right.$$

che è un sistema di due equazioni integro-differenziali del secondo ordine.

[4] P. Du Bois Reymond – *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung* (Math. Ann. – B. 15 – 1879 – pag. 313).

[5] Ved. ad es. C. Carathéodory – *Vorlesungen über reelle Functionen* – Leipzig – 1918 – § 572, pag. 661.

L'esistenza delle derivate $y_1''(x)$ e $y_2''(z)$ di un'estremale ci è assicurata dal seguente

Teorema: *Se la funzione* f *ammette continue le derivate* $f_{y_1'x}$, $f_{y_1'y_1}$, $f_{y_1'y_1'}$, $[f_{y_2'z}$, $f_{y_2'y_2}$, $f_{y_2'y_2'}]$ *e se l'estremale* C $[y_1(x),\ a \leq x \leq b,\ y_2(z),\ c \leq z \leq d]$ *è tale che nel punto* $\bar{x}$ *di* (a, b) $[\bar{z}$ *di* $(c, d)]$ *risulti*

$$(7)\qquad \begin{gathered} \int_c^d f_{y_1'y_1'}(\bar{x}, z, y_1(\bar{x}), y_2(z), y_1'(\bar{x}), y_2'(z))\, dz \neq 0 \\ \left[\int_a^b f_{y_2'y_2'}(x, \bar{z}, y_1(x), y_2(\bar{z}), y_1'(x), y_2'(\bar{z}))\, dx \neq 0\right] \end{gathered}$$

allora nel punto $\bar{x}$ $[\bar{z}]$ *esiste la* $y_1''(x)$ $[y_2''(z)]$.

Diamo infatti un incremento h alla x e siano δy_1 e $\delta y_1'$ i corrispondenti incrementi di $y_1(x)$ e $y_1'(x)$. La prima delle (1) ci dà

$$\int_c^d f_{y_1}(\bar{x}, z, y_1(\bar{x}), y_2(z), y_1'(\bar{x}), y_2(z))\, dz -$$
$$- \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_c^d [f_{y_1'}(\bar{x} + h, z, y_1(\bar{x}) + \delta y_1, y_2(z), y_1'(\bar{x}) + \delta y_1', y_2'(z)) -$$
$$- f_{y_1'}(\bar{x}, z, y_1(\bar{x}), y_2(z), y_1'(\bar{x}), y_2'(z))\, dz = 0,$$

da cui per il teorema del valore medio:

$$\int_c^d f_{y_1}(\bar{x}, z, y_1(\bar{x}), y_2(z), y_2'(\bar{x}), y_2'(z))\, dz -$$
$$- \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_c^d [f_{y_1'x}(\bar{x} + \theta h, z, y_1(\bar{x}) + \theta \delta y_1, y_2(z), y_1'(\bar{x}) +$$
$$+ \theta \delta y_1', y_2'(z))\, h + f_{y_1'y_1}(\ldots.)\, \delta y_1 + f_{y_1'y_1'}(\ldots.)\, \delta y_1']\, dz = 0.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale, come è possibile, e tenendo presente le ipotesi fatte, si conclude rapidamente che esiste la $y_1''(x)$ ed è

$$y_1''(\bar{x}) = \frac{\int_c^d f_{y_1}(\bar{x}, z, \ldots)\, dz \quad \int_c^d f_{y_1' x}(\bar{x}, z, \ldots)\, dz \quad y_1'(\bar{x}) \int_c^d f_{y_1' y_1}(\bar{x}, z, \ldots)\, dz}{\int_c^d f_{y_1' y_1'}(\bar{x}, z, \ldots)\, dz}.$$

Si osservi che se la (7) è verificata in tutto (a, b), allora la $y_1''(x)$ esiste ed è continua in tutto (a, b).

In modo analogo si ragiona per $y_2''(z)$.

Questo teorema estende ad $I(y_1, y_2)$ una nota osservazione di Hilbert sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$ (6).

4. – La condizione di Eulero per le curve minimanti lipschitziane. –

Teorema: *Se* $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{y}_2(z), \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$ *è una curva minimante per* $I(y_1, y_2)$ *nella classe K di curve ordinarie C, è di indifferenza internamente rispetto ad A e K ed è tale che le derivate* $\bar{y}_1'(x)$ *e* $\bar{y}_2'(z)$ *sono rispettivamente in quasi-tutto* $(\bar{a}, \bar{b})$ *e quasi-tutto* $(\bar{c}, \bar{d})$ *in modulo inferiore ad un numero fisso, allora essa soddisfa al sistema*

$$(1') \begin{cases} \displaystyle\int_a^x dx \int_c^d f_{y_1}\, dz - \frac{d}{dx} \int_a^x dx \int_c^d f_{y_1'}\, dz = c_1 \ (\mathit{cost.}) \\ \displaystyle\int_c^z dz \int_a^b f_{y_2}\, dx - \frac{d}{dz} \int_c^z dz \int_a^b f_{y_2'}\, dx = c_2 \ (\mathit{cost.}). \end{cases}$$

(6) Ved. ad es. L. Tonelli, op. cit. in (3), Vol. II, pp. 96 e 319.

Ragionando come nel n. 2, si arriva anche nelle ipotesi attuali alla (4) del n. 2 e osservando che in virtù di un noto teorema del Fubini $\int_{\bar{c}}^{\bar{d}}\left[f_{y_1'}-\int_{\bar{a}}^{x} f_{y_1}\, dx\right] dz$ è funzione quasi continua e integrabile di x, si ha, per un'estensione del lemma di Du Bois Reymond (7) che in quasi-tutto $(\bar{a}, \bar{b})$ risulta

$$\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f_{y_1'}\, dz - \int_{\bar{a}}^{x} dx \int_{\bar{c}}^{d} f_{y_1}\, dz = c_1 \ (cost.)$$

da cui in tutto $(\bar{a}, \bar{b})$

$$\int_{\bar{a}}^{x} dx \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f_{y_1'}\, dz = c_1 (x - \bar{a}) + \int_{\bar{a}}^{x} dx \int_{\bar{a}}^{x} dx \int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f_{y_1}\, dz$$

e poichè il secondo membro è derivabile in tutto $(\bar{a}, \bar{b})$, lo è anche il primo e si ottiene così la prima delle (1').

In modo analogo si dimostra la seconda.

Osservazione. – Si osservi che se la $\bar{C}$ possiede la derivata $\bar{y}_1'(x)$ continua e la $\bar{y}_2'(z)$ in quasi-tutto $(\bar{c}, \bar{d})$ in modulo inferiore ad un numero fisso, allora essa soddisfa al sistema

$$(1'') \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{c}^{d} f_{y_1}\, dz - \frac{d}{dx}\int_{c}^{d} f_{y_1'}\, dz = 0 \\ \displaystyle\int_{c}^{z} dz \int_{a}^{b} f_{y_2}\, dx - \frac{d}{dz}\int_{c}^{z} dz \int_{a}^{b} f_{y_2'}\, dx = c_1 . \end{cases}$$

(7) Ved. ad es. L. Tonelli, op. cit. in (3), Vol. II, pag. 99.

Si può infatti, per dimostrare la prima delle (1''), ripetere il ragionamento del n. 2, osservando che anche in questo caso $\int_{\bar{c}}^{\bar{d}}\left[f_{y_1'}-\int_{\bar{a}}^{x} f_{y_1}\,dx\right]dz$ e $\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f_{y_1}\,dz$ sono funzioni continue di x ([8]).

Naturalmente un risultato analogo vale se è continua $\bar{y}_2'(z)$ e in modulo inferiore ad un numero fisso $\bar{y}_1'(x)$.

5. - **Le estremaloidi.** - *a*) Definizione: Ogni curva ordinaria $C\,[y_1(x),\ a \leq x \leq b,\ y_2(z),\ c \leq z \leq d]$ tale che risultino integrabili in $[a \leq x \leq b,\ c \leq z \leq d]$ le funzioni $f_{y_1'}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))$, $f_{y_1}(x, z, \ldots)$, $f_{y_2'}(x, z, \ldots)$, $f_{y_2}(x, z, \ldots)$ e che soddisfi al sistema (1'), si dirà *un'estremaloide relativa alla funzione f.*

b) Un'estremaloide di classe 1 è evidentemente un'estremale.

È molto importante il seguente

Teorema I.: *Se la funzione f è tale che la $f_{y_1'}$ $[f_{y_2'}]$ è per ogni (x, z, y_1, y_2) di A e ogni y_2' $[y_1']$ funzione sempre crescente o sempre decrescente di y_1' $[y_2']$ allora per ogni estremaloide sulla quale la $|\,y_1'(x)\,|$ $[|\,y_2'(z)\,|]$ resti sempre inferiore ad un numero fisso, la $y_1'(x)$ $[y_2'(z)]$ è continua in tutto (a, b) $[(c, d)]$.*

La dimostrazione si conduce per assurdo, in modo analogo a quello del corrispondente teorema relativo agli integrali $J(y)$ quasi-regolari normali (ved. L. Tonelli, op. cit. in ([3]) vol. II°, n. 34 *d*), pag. 101 e n. 96 *d*), pag. 321).

In particolare quindi ogni estremaloide sulla quale la $y_1(x)$

([8]) In virtù del teorema che assicura che se $g(x, \alpha)$ è una funzione quasi-continua di x per $x_0 \leq x \leq x_1$ e continua di α per $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ e inoltre esiste una funzione $q(x)$ positiva e integrabile in $x_0 \leq x \leq x_1$ per cui valga per ogni α di (α_0, α_1) e quasi-dappertutto in (x_0, x_1) la $|\,g(x, \alpha)\,| \leq q(x)$, allora $\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, \alpha)\,dx$ è funzione continua di α. Si veda quanto è detto nella M. I, nota ([3]).

e $y_2(z)$ sono lipschitziane è un'estremale se sono sempre soddisfatte le $f_{y_1' y_1'} > 0$ [< 0] e $f_{y_2' y_2'} > 0$ [< 0].

Si osservi infine che lo stesso ragionamento che si usa per il teorema precedente, ci assicura anche che *nella stessa ipotesi sulla funzione* f, su ogni estremaloide esiste sempre finita o no la $y_1'(x)$ [$y_2'(z)$] ed è sempre continua (nel senso che per $x \to x_0$ è $y_1'(x) \to y_1'(x_0)$ [per $z \to z_0$ è $y_2'(z) \to y_2'(z_0)$]. Inoltre l'insieme Ω_1 [Ω_2] in cui la $y_1'(x)$ [$y_2'(z)$] è infinita, è chiuso e di misura nulla.

c) Per lo studio delle proprietà delle estremanti ha notevolissima importanza stabilire delle proposizioni che assicurino quando le estremaloidi sono «lipschitziane». Diamo ora alcune proposizioni in proposito che estendono risultati del Tonelli per le estremaloidi degli integrali $J(y)$ (9).

I. – *Se, per ogni campo limitato A' appartenente ad A, $|f_{y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')|$ [$|f_{y_2'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')|$] tende a $+\infty$ per y_1' tendente a $+\infty$ [y_2' tendente a $+\infty$] uniformemente rispetto a (x, z, y_1, y_2, y_2') [(x, z, y_1, y_2, y_1')] con (x, z, y_1, y_2) appartenente ad A' e y_2' [y_1'] qualunque, allora su ogni estremaloide C relativa alla f e appartenente ad A la $y_1'(x)$ [$y_2'(z)$] è a rapporto incrementale superiormente limitato.*

Infatti dalla prima delle (1') si ha che in quasi-tutto (a, b) è

$$\int_c^d f_{y_1'}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)) = c_1 + \int_a^x dx \int_c^d f_{y_1}(x, z, \ldots)\, dx\, dz$$

sicchè, posto

$$N = |c_1| + \int_a^b \int_c^d |f_{y_1}|\, dx\, dz$$

(9) Ved. L. Tonelli – *Sulle proprietà delle estremanti* (Ann. Scuola Normale Sup., Pisa – (2) – Vol. III, pp. 213-237) nn. 3, 4, 7. Si osservi che anche le proposizioni dei nn. 5, 6, 9 della suddetta memoria potrebbero estendersi facilmente ad $I(y_1, y_2)$; nell'estendere il n. 9 è anzi possibile far uso anzichè del lemma dato dal Tonelli nel n. 8 della suddetta memoria, di uno più generale, di cui faremo uso anche nel prossimo paragrafo e che citeremo nella nota (17); ma su ciò non mi soffermo per brevità.

risulta in quasi-tutto (a, b)

$$(8) \qquad \left| \int_c^d f_{y'_1}(x, z, y_1(x), y_2(x), y'_1(x), y'_2(z))\, dz \right| \leq N.$$

Sia allora Y' un numero tale che per $y'_1 \geq Y'$ si abbia, in tutti gli (x, z, y_1, y_2) di un campo limitato A' contenente C e per ogni y'_2,

$$|f_{y'_1}| > N:(d-c),$$

il che vuol dire, per la continuità di $f_{y'_1}$

$$f_{y'_1} > N:(d-c) \text{ in tutto } A' \text{ e per ogni } y'_2$$

oppure $\quad f_{y'_1} < -N:(d-c)$ in tutto A' e per ogni y'_2.

Ma allora la (8) ci assicura che in quasi-tutto (a, b) è $y'_1(x) < Y'$, da cui l'asserto.

II. - In modo analogo si dimostra che se, *per ogni campo limitato A' appartenente ad A, $|f_{y'_1}|$ $[|f_{y'_2}|]$ tende a $+\infty$, per $y'_1 \to -\infty$ $[y'_2 \to -\infty]$ uniformemente rispetto a (x, z, y_1, y_2, y'_2) $[(x, z, y_1, y_2, y'_1)]$ con (x, z, y_1, y_2) appartenente ad A' e y'_2 $[y'_1]$ qualunque, allora su ogni estremaloide C relativa alla f e appartenente ad A la $y_1(x)$ $[y_2(z)]$ è a rapporto incrementale inferiormente limitato.*

d) Possiamo ora enunciare senz'altro questa condizione sufficiente perchè un estremaloide sia anche un'estremale:

Teorema II: *Se la funzione f è tale da soddisfare con le sue derivate $f_{y'_1}$ e $f_{y'_2}$ a tutte le condizioni espresse nel Teorema I., dato in b) e nelle proposizioni I. e II. date in c), allora ogni estremaloide relativa alla f ed appartenente ad A è un'estremale.*

6. - La condizione di Eulero sotto opportune ipotesi sulla funzione f. - Nel n. 4 si è stabilita la condizione di EULERO imponendo alla curva minimante l'ipotesi di essere lipschitziana; nel presente numero invece stabiliremo la condizione di EULERO indipendentemente da quest'ipotesi, limitando però opportunamente la funzione f. Un primo risultato in proposito è dato dal seguente

TEOREMA I: *Supposto che:*

I) *in corrispondenza ad ogni campo limitato A' appartenente ad A si possano determinare sei numeri positivi M, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 in modo che per tutti i punti (x, z, y_1, y_2) di A', per ogni valore di y'_1 e y'_2 e per ogni φ tale che $|\varphi| \leq M$ e $(x, z, y_1 + \varphi, y_2)$ e $(x, z, y_1, y_2 + \varphi)$ siano ancora punti di A, si abbia*

$$(9) \quad \begin{aligned} |f_{y_1}(x, z, y_1 + \varphi, y_2, y'_1, y'_2)| \leq N_1 |f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)| + \\ + N_2 |y'_1| + N_3 |y'_2| + N_4 |y'_1| |y'_2| + N_5 \end{aligned}$$

$$(9') \quad \begin{aligned} |f_{y_2}(x, z, y_1, y_2 + \varphi, y'_1, y'_2)| \leq N_1 |f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)| + \\ + N_2 |y'_1| + N_3 |y'_2| + N_4 |y'_1| |y'_2| + N_5; \end{aligned}$$

II) *in corrispondenza ad ogni campo limitato A' appartenente ad A e ad ogni numero $L > 0$, si possano determinare quattro numeri positivi B, D_1, D_2, D_3 in modo che*

a) *per tutti i punti (x, z, y_1, y_2) di A', per $|y'_1| \leq L$, per y'_2 qualunque e per ogni γ e γ' tali che $|\gamma| \leq B$, $|\gamma'| \leq B$ e che $(x, z, y_1 + \gamma, y_2)$ sia ancora un punto di A, si abbia*

$$(10) \quad \begin{aligned} |f_{y'_1}(x, z, y_1 + \gamma, y_2, y'_1 + \gamma', y'_2)| \leq \\ \leq D_1 |f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)| + D_2 |y'_2| + D_3; \end{aligned}$$

a') *per tutti i punti (x, z, y_1, y_2) di A', per $|y'_2| \leq L$, per y'_1 qualunque e per ogni γ e γ' tali che $|\gamma| \leq B$, $|\gamma'| \leq B$ e che $(x, z, y_1, y_2 + \gamma)$ sia ancora un punto di A, si abbia*

$$(10') \qquad \begin{aligned} &|f_{y_2'}(y, z, y_1, y_2+\gamma, y_1', y_2'+\gamma')| \leq \\ &\leq D_1 |f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')| + D_2 |y_1'| + D_3 ; \end{aligned}$$

allora ogni curva ordinaria $\bar{C}[\bar{y}_1(x),\ \bar{a} \leq x \leq \bar{b},\ \bar{y}_2(z),\ \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$, *che sia minimante per* $I(y_1, y_2)$ *in una classe* K *di curva ordinaria* C *e di indifferenza internamente rispetto ad* A *e* K, *è un' estremaloide relativa alla* f.

La dimostrazione si ottiene, come ora vedremo, adattando opportunamente un ragionamento del Tonelli per gli integrali $J(y)$ [10].

Assumiamo come campo A' l'insieme dei punti di A che distano al più di 1 da almeno uno dei punti $[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)]$ della curva $\bar{C}$. Indichiamo con E_n l'insieme dei punti x di $(\bar{a}, \bar{b})$ in cui la $\bar{y}_1'(x)$ èsiste finita e in modulo non superiore ad n, con n numero intero positivo. Per n sufficientemente grande (maggiore di un certo n_0) risulta $\quad m(E_n) > (\bar{b} - \bar{a}) : 2$.

Fissiamo dunque $n > n_0$ e consideriamo la funzione $f_{y_1'}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z))$; per ogni x di E_n essendo $|\bar{y}_1'(x)| \leq n$, in virtù dell'ipotesi II) a), essa risulta integrabile in $(\bar{c}, \bar{d})$.

Possiamo allora porre

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi_n(x) = \displaystyle\int_{\bar{c}}^{\bar{d}} f_{y_1'}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z))\, dz & \text{in } E_n \\ \varphi_n(x) = 0 & \text{fuori di } E_n \end{cases}$$

e la $\varphi_n(x)$, sempre in virtù dell'ipotesi II) a), risulta integrabile in $(\bar{a}, \bar{b})$; l'integrale

$$(12) \qquad \int_{\bar{a}}^{x} \varphi_n(x)\, dx$$

[10] Ved. luogo citato in [9] n. 1

ammette quasi-dappertutto in $(\bar{a}, \bar{b})$ derivata finita e uguale a $\varphi_n(x)$. Ricordiamo ora che la *densità* di E_n è uguale ad 1 su quasi-tutto E_n, e indichiamo quindi con $\overline{E}_n$ l'insieme dei punti di E_n in cui E_n ha densità 1 e in cui l'integrale (12) ammette per derivata $\varphi_n(x)$; risulta $m(\overline{E}_n) = m(E_n)$ e quindi $m(\overline{E}_n) > (\bar{b} - \bar{a}) : 2$.

Fissati due punti qualunque x_1 e x_2 di $\overline{E}_n$ $(x_1 < x_2)$, consideriamo in $(\bar{a}, \bar{b})$ la funzione $\omega_n(x)$, assolutamente continua, costruita dal Tonelli nella Memoria citata in [9] (ved. pag. 216), ricordando [11] che valgono per essa le

$$(13)\quad |\omega_n(x)| < \bar{b} - \bar{a} \text{ in tutto } (\bar{a}, \bar{b}),\ \omega_n(x) = 0 \text{ in } (\bar{a}, x_1) \text{ e } (x_2, \bar{b}),$$

$$(14)\quad |\omega'_n(x)| \leq 1 \text{ in quasi-tutto } (\bar{a}, \bar{b}),$$

$$(15)\quad \omega'_n(x) = 0 \text{ quasi dappertutto fuori di } \overline{E}_n.$$

Si consideri allora la curva $C_{n,t}$ $[\bar{y}_1(x) + t\,\omega_n(x),\ \bar{a} \leq x \leq \bar{b},\ \bar{y}_2(z),\ \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$; per t sufficientemente piccolo (minore in modulo di un certo $\bar{t}$ positivo) essa appartiene ad A'. Dimostriamo che è

[11] Per comodità del lettore riporto dal Tonelli la definizione di $\omega_n(x)$. Fissati x_1 e x_2 possiamo scegliere un $\bar{\delta}$ tale che $0 < \bar{\delta} < (x_2 - x_1) : 2$ e che per ogni $\delta > 0$ e $\leq \bar{\delta}$ le misure delle parti di $\overline{E}_n$ contenute in $(x_1, x_1 + \delta)$ e in $(x_2 - \delta, x_2)$ risultino ambedue $> \delta : 2$. Allora ad ogni x'_1 tale che $x_1 < x'_1 < x_1 + \frac{\bar{\delta}}{2}$ corrisponde un massimo valore x'_2 tale che $x_2 - \bar{\delta} < x'_2 < x_2$ e soddisfacente alla condizione che il sottoinsieme $e_{n,1}$ di $\overline{E}_n$, contenuto in (x_1, x'_1), e quello $e_{n,2}$ di $\overline{E}_n$, contenuto in (x'_2, x_2), abbiano uguale misura positiva. Si costruisca allora la funzione $i_n(x)$ ponendo

$$i_n(x) = 1 \text{ nei punti di } e_{n,1}, \quad i_n(x) = -1 \text{ nei punti di } e_{n,2}$$
$$i_n(x) = 0 \quad \text{altrove}$$

e la funzione $\omega_n(x)$ ponendo

$$\omega_n(x) = \int_{\bar{a}}^{x} i_n(x)\,dx\,.$$

anche ordinaria. Infatti per il Teorema del valor medio nella forma di CAVALIERI–LAGRANGE risulta:

$$(16)\qquad f(x, z, \bar{y}_1 + t\omega_n, \bar{y}_2, \bar{y}'_1 + t\omega'_n, \bar{y}'_2) =$$
$$= f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) + t\omega'_n f_{y'_1}(x, z, \bar{y}_1 + t\omega_n, \bar{y}_2, \bar{y}'_1 + \theta t\omega'_n, \bar{y}'_2) +$$
$$+ t\omega_n f_{y_1}(x, z, \bar{y}_1 + \bar{\theta} t\omega_n, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2)$$
$$0 < \theta < 1 \quad , \quad 0 < \bar{\theta} < 1 \, ;$$

perciò avendosi in quasi tutto $\overline{E}_n$

$$| \bar{y}'_1(x) + t\omega'_n(x) | \leq n + \bar{t}$$

si ottiene in virtù dell'ipotesi I) e II) a), per t sufficientemente piccolo, che in quasi-tutto $\overline{E}_n$ e per quasi-tutti gli z di $(\bar{c}, \bar{d})$ è

$$(17)\quad |f(x, z, \bar{y}_1 + t\omega_n, \bar{y}_2, \bar{y}'_1 + t\omega'_n, \bar{y}'_2)| \leq |f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2)| +$$
$$+ |t| \{ D_1 | f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) | + D_2 | \bar{y}'_2 | + D_3 \} +$$
$$+ |t| (\bar{b} - \bar{a}) \{ N_1 | f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) | + N_2 | \bar{y}'_1 | +$$
$$+ N_3 | \bar{y}'_2 | + N_4 | \bar{y}'_1 | | \bar{y}'_2 | + N_5 \} \, .$$

D'altra parte in quasi-tutto il complementare $C(\overline{E}_n)$ di $\overline{E}_n$ rispetto a $(\bar{a}, \bar{b})$ è $\omega'_n(x) = 0$ e perciò dalla (16) e dalla (9) si ottiene quasi-dappertutto in $C(\overline{E}_n)$ e per quasi tutti gli z di $(\bar{c}, \bar{d})$

$$(18)\quad |f(x, z, \bar{y}_1 + t\omega_n, \bar{y}_2, \bar{y}'_1 + t\omega'_n, \bar{y}'_2)| \leq |f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2)| +$$
$$+ |t| (\bar{b} - \bar{a}) \{ N_1 | f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) | + N_2 | \bar{y}'_1 | +$$
$$+ N_3 | \bar{y}'_2 | + N_4 | \bar{y}'_1 | | \bar{y}'_2 | + N_5 \} \, .$$

Dunque la $f(x, z, \bar{y}_1(x) + t\omega_n(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x) + t\omega'_n(x), \bar{y}'_2(z))$ è integrabile su $(\bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq z \leq \bar{d})$ e quindi la $C_{n,t}$ è una curva ordinaria. Essa poi appartiene anche a K non appena t è sufficientemente piccolo (minore in modulo di un certo $\overline{\overline{t}}$ positivo e $< \overline{t}$).

Si consideri ora la differenza $I(\overline{y}_1 + t\omega_n, \overline{y}_2) - I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) =$

$$= \int_{\overline{a}}^{\overline{b}}\int_{\overline{c}}^{\overline{d}} \{f(x, z, \overline{y}_1 + t\omega_n, \overline{y}_2, \overline{y}'_1 + t\omega'_n, \overline{y}'_2) - f(x, z, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2)\} \, dx\, dz =$$

$$= t \int_{x_1}^{x_2}\int_{\overline{c}}^{\overline{d}} \{ \omega'_n f_{y'_1}(x, z, \overline{y}_1 + t\omega_n, \overline{y}_2, \overline{y}'_1 + \theta t\omega'_n, \overline{y}'_2) +$$

$$+ \omega_n f_{y_1}(x, z, \overline{y}_1 + \overline{\theta} t\omega_n, \overline{y}_2, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2)\} \, dx\, dz \, .$$

Per le stesse osservazioni che ci hanno portato alle (17) e (18) risulta che per quasi-tutti gli x di (x_1, x_2) e quasi-tutti gli z di $(\overline{c}, \overline{d})$ è

$$| \omega'_n f_{y'_1}(x, z, \overline{y}_1 + t\omega_n, \overline{y}_2, \overline{y}'_1 + \theta t\omega'_n, \overline{y}'_2) +$$

$$+ \omega_n f_{y_1}(x, z, \overline{y}_1 + \overline{\theta} t\omega_n, \overline{y}_2, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2) | \leq \overline{\overline{t}} \{ D_1 | f(x, z, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2) | +$$

$$+ D_2 | \overline{y}'_2 | + D_3 \} + \overline{\overline{t}}(\overline{b} - \overline{a}) \{ N_1 | f(x, z, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2) | +$$

$$+ N_2 | \overline{y}'_1 | + N_3 | \overline{y}'_2 | + N_4 | \overline{y}'_1 | | \overline{y}'_2 | + N_5 \}$$

e perciò passando al limite sotto il segno di integrale, in virtù del teorema di Lebesque, risulta, essendo la $\overline{C}$ minimante in K

$$\lim_{t \to 0} \left\{ I(\overline{y}_1 + t\omega_n, \overline{y}_2) - I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) \right\} : t = \int_{x_1}^{x_2}\int_{\overline{c}}^{\overline{d}} \{ \omega_n f_{y_1}(x, z, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2) +$$

$$+ \omega'_n f_{y'_1}(x, z, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}'_1, \overline{y}'_2) \} \, dx\, dz = 0 \, .$$

Non resta ora che ripetere esattamente il ragionamento del Tonelli (ved. Memoria cit. in (9) pag. 218) ricordando solo la definizione della funzione $\varphi_n(x)$ e che l'esistenza degli integrali

$$\int_{\bar a}^{\bar b}\int_{\bar c}^{\bar d}\omega_n f_{y_1}(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y_1', \bar y_2')\, dx\, dz \quad \text{e} \quad \int_{x_1}^{x_2}\int_{\bar c}^{\bar d}\omega_n' f_{y_1'}(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y_1', \bar y_2')\, dx\, dz$$

è assicurata dalle ipotesi fatte I) e II) a)) e dalle (14) e (15), per ottenere la relazione

$$\int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1'}(x_1, z, \bar y_1(x_1), \bar y_2(z), \bar y_1'(x_1), \bar y_2'(z))\, dz - \int_{\bar a}^{x_1}\int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1}(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y_1', \bar y_2')\, dx dz =$$

$$= \int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1'}(x_2, z, \bar y_1(x_2), \bar y_2(z), \bar y_1'(x_2), \bar y_2'(z))\, dz - \int_{\bar a}^{x_2}\int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1}(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y_1', \bar y_2')\, dx\, dz.$$

E poichè x_1 e x_2 sono due punti qualunque di $\overline{E}_n$ risulta che in tutto $\overline{E}_n$, cioè in quasi-tutto E_n, è

$$\int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1'}(x, z, \bar y_1(x), \bar y_2(z), \bar y_1'(x), \bar y_2'(z))\, dz -$$

$$- \int_{\bar a}^{x}\int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1}(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y_1', \bar y_2')\, dx\, dz = c_n \ (cost.)\ .$$

Ma essendo E_n contenuto in E_{n+1} e $m(E_{n+1}) \geq m(E_n) > > \frac{\bar b - \bar a}{2}$ sarà $c_{n+1} = c_n$ e quindi in quasi-tutto $(\bar a, \bar b)$

$$\int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1'}(x, z, \bar y_1(x), \bar y_2(z), \bar y_1'(x), \bar y_2'(z))\, dz -$$

$$\int_{\bar a}^{x}\int_{\bar c}^{\bar d} f_{y_1}(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y_1', \bar y_2')\, dx\, dz = c \ (cost.)\ .$$

E di qui si deduce (ved. n. 4) che la $\overline{C}$ soddisfa alla prima delle (1').

In modo analogo si dimostra la seconda delle (1′), sfruttando le (9′) e (10′).

Vale pure il seguente

TEOREMA II: *Se per ogni campo limitato A' appartenente ad A si possono determinare otto numeri positivi m_1, m_2, M_1, M_2, M_3, M_4, α e β di cui $\alpha \geq 1$ e $\beta \geq 1$ in modo che si abbia in tutto A' e per ogni valore di y'_1 e y'_2*

$$
(19)\quad \begin{cases}
m_1|y'_1|^{\alpha}|y'_2|^{\beta}+m_2 \leq f(x,z,y'_1,y_2,y'_1,y'_2) \leq M_1|y'_1|^{\alpha}|y'_2|^{\beta}+M_2|y'_1|^{\alpha}+M_3|y'_2|^{\beta}+M_4 \\
|f_{y_1}(x,z,y_1,y_2,y'_1,y'_2)| \leq M_1|y'_1|^{\alpha}|y'_2|^{\beta}+M_2|y'_1|^{\alpha}+M_3|y'_2|^{\beta}+M_4 \\
|f_{y'_1}(x,z,y_1,y_2,y'_1 y'_2)| \leq M_1|y'_1|^{\alpha}|y'_2|^{\beta}+M_2|y'_1|^{\alpha}+M_3|y'_2|^{\beta}+M_4 \\
|f_{y_2}(x,z,y_1,y_2,y'_1,y'_2)| \leq M_1|y'_1|^{\alpha}|y'_2|^{\beta}+M_2|y'_1|^{\alpha}+M_3|y'_2|^{\beta}+M_4 \\
|f_{y'_2}(x,z,y_1,y_2,y'_1,y'_2)| \leq M_1|y'_1|^{\alpha}|y'_2|^{\beta}+M_2|y'_1|^{\alpha}+M_3|y'_2|^{\beta}+M_4
\end{cases}
$$

allora ogni curva ordinaria $\overline{C}$ $[\overline{y}_1(x)$, $\overline{a} \leq x \leq \overline{b}$, $\bar{y}_2(z)$, $\overline{c} \leq z \leq \overline{d}]$ che sia minimante per $I(y_1, y_2)$ in una classe K di curve ordinarie C e di indifferenza internamente rispetto ad A e K, è un'estremaloide relativa alla funzione f.

La dimostrazione si ottiene adattando in modo ovvio quella data dal TONELLI per un analogo teorema sugli integrali $J(y)$ [12].

Si osservi anche che nella (19) la $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq$ $\geq m_1 |y'_1|^{\alpha} |y'_2|^{\beta} + m_2$ può essere sostituita dalla coppia delle

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq m_1 |y'_1|^{\alpha} + m_2$$

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq m_1 |y'_2|^{\beta} + m_2 .$$

7. – La variazione prima. – Consideriamo una curva ordinaria C $[y_1(x)$, $a \leq x \leq b$, $y_2(z)$, $c \leq z \leq d]$ e indichiamo con $\overline{\delta} y_1$, $\overline{\delta} y'_1$, $\overline{\delta} y_2$, $\overline{\delta} y'_2$ le *variazioni prime smorzate* rispettivamente delle $y_1(x)$ e $y'_1(x)$ in (a, b) e delle $y(z)$ e $y'(z)$ in

(12) Ved. op. cit. in (3) vol. II, n. 97, pag. 321.

(c, d) [13]. Supposto che esistano gli integrali

$$
(20) \qquad \begin{gathered}
\int_a^b \int_c^d f_{y_i}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')\, dx\, dz\,, \\
\int_a^b \int_c^d f_{y_i'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')\, dx\, dz \qquad (i = 1, 2)\,,
\end{gathered}
$$

diremo *variazione prima smorzata* di $I(y_1, y_2)$ sulla curva C data, l'espressione

$$
(21) \quad \overline{\delta} I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f_{y_1} \overline{\delta} y_1 + f_{y_1'} \overline{\delta} y_1' + f_{y_2} \overline{\delta}_2 y_2 + f_{y_2'} \overline{\delta} y_2')\, dx\, dz
$$

dove intenderemo di considerare solo quelle $\overline{\delta} y_1$ e $\overline{\delta} y_2$ per cui esistono gli integrali $\int_a^b \int_c^d f_{y_i'} \overline{\delta} y_i'\, dx\, dz \qquad (i = 1, 2)$.

Se $\overline{\delta} I(y_1, y_2)$ per quella data curva C è uguale a zero per tutte le possibili $\overline{\delta} y_1$ e $\overline{\delta} y_2$ diremo che essa è identicamente nulla e scriveremo $\overline{\delta} I(y_1, y_2) = 0$.

Ricordando le dimostrazioni dei nn. 2 e 4 a partire dalla formula (2) in poi, si ha immediatamente che, *se su una certa curva ordinaria C esiste la variazione prima smorzata $\overline{\delta} I(y_1, y_2)$ ed è*

$$
(22) \qquad \overline{\delta} I(y_1, y_2) = 0
$$

allora C è un'estremaloide; e se è di classe 1 è un'estremale.

Viceversa si dimostra che se C è *un'estremaloide, allora su di essa vale la* (22).

(13) $\overline{\delta} y_1$ $[\overline{\delta} y_2]$ indicherà dunque una qualsiasi funzione assolutamente continua in (a, b) $[(c, d)]$ e nulla negli estremi di (a, b) $[(c, d)]$ e $\overline{\delta} y_1'$ $[\overline{\delta} y_2']$ sarà la derivata di $\overline{\delta} y_1$ $[\overline{\delta} y_2]$.

Infatti in quanto C è un'estremaloide esistono gli integrali (20) (e perciò la $\overline{\delta} I(y_1, y_2)$) e quindi per quasi-tutti gli z di (c, d) si può considerare la funzione di x, $f_{y_1} \overline{\delta} y_1$ e integrarla per parti su (a, b) e così pure per quasi tutti gli x di (a, b) si può considerare la funzione di z, $f_{y_2} \overline{\delta} y_2$ e integrarla per parti su (c, d).

Sicchè la (21) si potrà scrivere

$$\overline{\delta} I(y_1 \, y_2) = \int_c^d \int_a^b \left\{ f_{y'_1} - \int_a^x f_{y_1} \, dx \right\} \overline{\delta} y'_1 \, dz \, dx +$$

$$+ \int_a^b \int_c^d \left\{ f_{y'_2} - \int_c^z f_{y_2} \, dx \right\} \overline{\delta} y'_2 \, dx \, dz =$$

$$= \int_a^b \overline{\delta} y'_1 \left\{ \int_c^d f_{y'_1} \, dz - \int_a^x dx \int_c^d f_{y_1} \, dz \right\} dx +$$

$$+ \int_c^d \overline{\delta}_{y'_2} \left\{ \int_a^b f_{y'_2} - \int_c^z dz \int_a^b f_{y_2} \, dx \right\} dz .$$

Ma dalle (1') si ha in quasi-tutto (a, b)

$$\int_c^d f_{y'_1} \, dz - \int_a^x dx \int_c^d f_{y_1} \, dz = -c_1$$

e in quasi-tutto (c, d)

$$\int_a^b f_{y'_2} \, dx - \int_c^z dz \int_a^b f_{y_2} \, dx = -c_2$$

sicchè risulta:

$$\overline{\delta} I(y_1, y_2) = -\int_a^b c_1 \overline{\delta} y'_1 \, dx - \int_c^d c_2 \overline{\delta} y'_2 \, dz = 0 .$$

§ 2.

Esistenza ed unicità delle estremali.

1. - Considerazioni sul problema « in piccolo ». - È noto ([14]) che nel Calcolo delle Variazioni relativamente all'integrale $J(y)$ hanno notevole importanza i così detti problemi « in piccolo », sia per le estremali che per le estremanti del problema considerato: essi riguardano l'esistenza e l'unicità dell'estremale o dell'estremante che unisce due punti « sufficientemente vicini ».

Uno dei risultati più importanti e caratteristici in proposito è quello che afferma che se la funzione $F(x, y, y')$ soddisfa ad opportune ipotesi ([15]) (le quali in sostanza sono le analoghe delle ipotesi del Teorema I. del cap. I., § 2, n. 1 della M. II. citata in ([1]), e di quello del Teorema II. del n. 5, § 1 e di uno dei Teoremi del n. 6, § 1 della presente Memoria) *allora, se A_0^* è un insieme chiuso composto di punti interni al campo A^*, supposto limitato, di definizione della $F(x, y, y')$, preso comunque un numero positivo ρ si può determinarne un altro δ, in modo che, essendo P_1 e P_2 due punti qualunque rispettivamente di A_0^* e A^*, distanti fra loro meno di δ e di ascisce diverse, nella classe di tutte le curve ordinarie che congiungono i punti detti, ne esista almeno una minimante per $J(y)$ e che tutte queste curve siano delle estremali interne al cerchio (P_1, ρ).*

Viene naturale di domandare: *ci si può porre anche per $I(y_1, y_2)$ un analogo problema, in analoghe condizioni? E avrà questo problema risposta affermativa?*

Si consideri allora il seguente esempio. Nel campo

$$A := 1 \leq x \leq 1\,, \quad -1 \leq z \leq 1\,, \quad \frac{1}{2} \leq y_1 \leq 3\,, \quad -1 \leq y_2 \leq 1\,,$$

([14]) Ved. L. Tonelli, op. cit. in ([3]) vol. II, cap. VII, § 1; e inoltre: *Sulle equazioni di Eulero nel Calcolo delle Variazioni* (Ann. Scuola Norm. sup. Pisa (2), vol. IV, pp. 191-216).

([15]) Ved. L. Tonelli, op. cit. in ([1]) vol. II, n. 107, e l. c. per secondo in ([14]), n. 2.

sia data la funzione $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = y'^2_2\, y_1 + y'^2_1$; risulta: $f_{y'_1} = 2 f_{y'_1}$; $f_{y'_1 y'_1} = 2$; $f_{y_1} = y'^2_2$; $f_{y'_2} = 2 y'_2 y_1$; $f_{y'_2 y'_2} = 2 y_1$; $f_{y_2} = 0$.

Per ogni n e m interi positivi si consideri la classe (completa) [16] $K_{m,n}$ delle curve ordinarie, relativamente alla f considerata, $C_{m,n}\left[y_{1,m}(x),\ 0 \leq x \leq \frac{1}{m^2};\ y_{2,n}(z),\ 0 \leq z \leq \frac{1}{n^2}\right]$ appartenenti ad A e soddisfacenti alle

$$(23)\quad y_{1,m}(0) = 2;\ y_{1,m}\left(\frac{1}{m^2}\right) = 2 + \frac{1}{m};\ y_{2,n}(0) = 0;\ y_{2,n}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}.$$

Fissati comunque n e m, il sistema delle equazioni di Eulero relativamente alla f data è il seguente

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} & y''_{1,m}(x) = \frac{n^2}{2}\int_0^{\frac{1}{n^2}} y'^2_{2,n}(z)\, dz \\ & y''_{2,n}(z) \int_0^{\frac{1}{m^2}} y_{1,m}(x)\, dx = 0 . \end{aligned}\right.$$

Per ogni eventuale soluzione di (24) appartenente ad A, poichè deve essere $y_{1,m}(x) \geq \frac{1}{2}$, il sistema (24) si riduce al sistema

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} & y''_{1,m}(x) = \frac{n^2}{2}\int_0^{\frac{1}{n^2}} y'^2_{2,n}(z)\, dz \\ & y''_{2,n}(z) = 0 \end{aligned}\right.$$

[16] Per la definizione di classe *completa* ved. M. II, cap. I, § 1, n. 1.

e, se vogliamo soddisfatte anche le condizioni (23), necessariamente dovrà essere

$$(26) \qquad y_{2,n}(z) = n z \qquad \left(0 \leq z \leq \frac{1}{n^2}\right),$$

e quindi anche $y''_{1,m}(x) = \frac{n^2}{2}$; da cui, sempre per le (23),

$$(27) \qquad y_{1,m}(x) = \frac{n^2}{4} x^2 + \left(m - \frac{n^2}{4 m^2}\right) x + 2 \qquad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{m^2}\right);$$

e in realtà le (26) e (27) soddisfano al sistema (24) e alle (23).

Dunque la curva $C_{m,n}$ ordinaria data dalle (26) e (27) è l'unica estremale appartenente ad A e soddisfacente alle (23).

Si faccia ora $\quad n = +\sqrt{8 m^4 + 4 m^3 + 8 \sqrt{m^8 + m^7}}$

e si consideri il punto $\bar{x}_m = \dfrac{8 m^4 + 8 \sqrt{m^8 + m^7}}{2 m^2 (8 m^4 + 4 m^3 + 8 \sqrt{m^8 + m^7})}$;

risulta $0 < \bar{x}_m < \frac{1}{m^2}$ e, come si verifica facilmente, $y'_{1,m}(\bar{x}_m) = 0$, $y_{1,m}(\bar{x}_m) = 1$.

Dunque per *m qualunque* e per $n = +\sqrt{8 m^4 + 4 m^3 + 8 \sqrt{m^8 + m^7}}$ l'estremale soddisfacente alle (23) ed appartenente ad A è tale che la funzione $y_{1,n}(x)$ ammette in $\left(0, \frac{1}{m^2}\right)$ un minimo sempre uguale ad 1.

È chiaro dunque che per la f considerata non si può dire che, *fissati i punti* $\overline{P}_1$ (0,2) *nel piano* (x, y_1) *e* $\overline{P}_2$ (0,0) *nel piano* (z, y_2) *e preso un* $\rho > 0$ *ad arbitrio, si possa determinare un altro* $\delta > 0$ *in modo che essendo* $\overline{\overline{P}}_1 (\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}_1)$ *e* $\overline{\overline{P}}_2 (\overline{\overline{z}}, \overline{\overline{y}}_2)$ *due punti qualunque rispettivamente dei piani* (x, y_1) *e* (z, y_2), *distanti rispettivamente da* $\overline{P}_1$ *e* $\overline{P}_2$ *meno di* δ *e di ascisse rispettivamente diverse da quelle di* $\overline{P}_1$ *e* $\overline{P}_2$, *esista almeno un' estremale* $[y_1(x),\ 0 \leq x \leq \overline{\overline{x}},\ y_2(z),\ 0 \leq z \leq \overline{\overline{z}}]$ *soddisfacente alle* $y_1(0) = 2$, $y_1(\overline{\overline{x}}) = \overline{\overline{y}}_1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\overline{\overline{z}}) = \overline{\overline{y}}_2$ *e tale che i punti* $[x, y_1(x)]$ *e* $[z, y_2(z)]$ *appartengano rispettivamente ai cerchi* $(\overline{P}_1, \rho)$ *e* $(\overline{P}_2, \rho)$; *cioè non esiste un'estremale « in piccolo ».*

Si osservi inoltre che la f soddisfa in A sia alle ipotesi del Teorema I., cap. I., § 2, n. 1, M. II., che assicurano l'esistenza del minimo in $K_{m,n}$, sia a quelle dei teoremi del n. 5 e del n. 6, § 1 della presente Memoria, che assicurano che ogni eventuale minimante interna ad A è un'estremale. Dunque *non può esistere nel problema considerato nemmeno una minimante « in piccolo »* (nel senso sopra specificato per l'estremale).

Non può dunque porsi per $I(y_1, y_2)$ un problema di estremante o di estremale « in piccolo » in generale, come per $J(y)$, a meno di non voler considerare casi assai particolari di funzioni f (e si osservi d'altra parte che nell'esempio precedente la f è di forma molto semplice).

2. - Esistenza dell'estremale con determinate condizioni ai limiti. – Passiamo dunque senz'altro ai problemi di esistenza « in grande » delle estremali.

È chiaro che i risultati della M. II. sull'esistenza dell'estremo e quelli del paragrafo prec. sulle proprietà delle estremanti ci permettono di enunciare immediatamente dei criteri di esistenza dell'estremale soddisfacente a determinate condizioni.

Iniziando col problema dell'estremale che « unisce due coppie di punti », mi limito ([17]) a rilevare il seguente

Teorema I.: *Se i campi A_1 e A_2 coincidono rispettivamente con tutto il piano (x, y_1) o con una striscia a lati paralleli all'asse y_1 di esso e con tutto il piano (z, y_2) o con una striscia a lati paralleli all'asse y_2 di esso, se sono soddisfatte le condizioni per la validità del* **Teorema Generale** *del cap. I., § 3, n. 1, M. II. e quelle di uno dei Teoremi del n. 6 e del Teorema II. del n. 5 del § 1 della presente Memoria, allora presi due punti qualunque $(a, \overline{y}_1)$ e $(b, \overline{\overline{y}}_1)$ di A_1 con $a \neq b$ e altri due punti qualunque $(c, \overline{y}_2)$ e $(d, \overline{\overline{y}}_2)$ di A_2 con $c \neq d$, esiste almeno un'estremale $C\,[y_1(x),\ a \leq x \leq b,\ y_2(z),\ c \leq z \leq d]$ tale che $y_1(a) = \overline{y}_1$, $y_1(b) = \overline{\overline{y}}_1$, $y_2(c) = \overline{y}_2$, $y_2(d) = \overline{\overline{y}}_2$.*

([17]) Potrebbero studiarsi facilmente anche altri risultati, estensioni di analoghi problemi relativi all'estremale dell'integrale $J(y)$ (ved. ad es. L. Tonelli, op. cit. in ([3]) vol. II, n. 120).

Ma il problema dell'esistenza delle estremali può essere studiato direttamente, senza ricorrere a risultati di Calcolo delle Variazioni. Infatti dal n. 3, § 1 segue immediatamente che se la f ammette continue anche le derivate $f_{y_1'x}$, $f_{y_1'y_1}$, $f_{y_1'y_1'}$, $f_{y_2'z}$, $f_{y_2'y_2}$, $f_{y_2'y_2'}$ e sono verificate sempre le $f_{y_1'y_1'} \neq 0$ e $f_{y_2'y_2'} \neq 0$, il sistema (1) delle equazioni delle estremali si può scrivere

$$(28)\quad \begin{cases} y_1''(x) = \dfrac{\displaystyle\int_c^d f_{y_1}(x, z, \ldots)\, dz - \int_c^d f_{y_1'x}(x, z, \ldots)\, dz - y_1'(x) \int_c^d f_{y_1'y_1}(x, z, \ldots)\, dz}{\displaystyle\int_c^d f_{y_1'y_1'}(x, z, \ldots)\, dz} \\[2ex] y_2''(z) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f_{y_2}(x, z, \ldots)\, dx - \int_a^b f_{y_1'z}(x, z, \ldots)\, dx - y_2'(z) \int_a^b f_{y_2'y_2}(x, z, \ldots)\, dx}{\displaystyle\int_a^b f_{y_2'y_2'}(x, z, \ldots)\, dx} \end{cases}$$

E lo studio del sistema (28) può essere condotto direttamente, con i metodi della topologia funzionale; si può così arrivare, sempre per il problema dell'estremale che « unisce due coppie di punti », per es. al seguente

Teorema II. : *Supposto che :*

I) *il campo* A_1 *coincida con la striscia*: $a \leq x \leq b$, $-\infty < y_1 < +\infty$ *e il campo* A_2 *con la striscia*: $c \leq z \leq d$, $-\infty < y_2 < +\infty$;

II) *in tutto* A *e per ogni* y_1' *e* y_2' *esistano e siano continue le derivate* $f_{y_1'x}$, $f_{y_1'y_1}$, $f_{y_1'y_1'}$, $f_{y_2'z}$, $f_{y_2'y_2}$, $f_{y_2'y_2'}$ *e inoltre sia sempre*

$$(29)\qquad f_{y_1'y_1'} \geq m \quad , \quad f_{y_2'y_2'} \geq m$$

con m *costante positiva*;

III) *esistano sei funzioni* $\psi_1(x)$, $\psi_2(z)$, $\gamma_1(y_1)$, $\gamma_2(y_2)$, $\varphi_1(y_1')$, $\varphi_2(y_2')$ *di cui* $\psi_1(x)$ *e* $\psi_2(z)$ *non negative e integrabili rispettivamente in* (a, b) *e* (c, d), $\gamma_1(y_1)$ *e* $\gamma_2(y_2)$ *non negative e* *integrabili in* $(-\infty, +\infty)$, $\varphi_1(y_1')$ *e* $\varphi_2(y_2')$ *positive e continue in* $(-\infty, +\infty)$ *e tali che*

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi_1(u)}\, du = +\infty\,; \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\varphi_1(u)}\, du = -\infty\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{u}{\varphi_2(u)}\, du = +\infty\,; \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{\varphi_2(u)}\, du = -\infty\,;$$

in modo che in tutto A *e per ogni* y_1' *e* y_2' *risulti*

$$(30) \qquad \begin{cases} \left| f_{y_1} - f_{y_1'x} - y_1' f_{y_1' y_1} \right| \leq \gamma_1(y_1)\,\varphi_1(y_1') + \psi_1(x) \\[2mm] \left| f_{y_2} - f_{y_2'z} - y_2' f_{y_2' y_2} \right| \leq \gamma_2(y_2)\,\varphi_2(y_2') + \psi_2(z) \end{cases}$$

intendendo che o sia $\psi_1(x) = 0$ *in quasi-tutto* (a, b) $[\psi_2(z) = 0$ *in quasi-tutto* $(c, d)]$ *oppure esista una costante* $k > 0$ *tale che sia sempre* $\quad |u| \leq k\,\varphi_1(u)\ [\,|u| \leq k\,\varphi_2(u)]$;
allora, presi comunque quattro numeri reali $\bar{y}_1$, $\bar{\bar{y}}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{\bar{y}}_2$, *esiste sempre almeno un' estremale* $C\ [y_1(x),\ y_2(z)]$ (*soluzione del sistema* (28)) *soddisfacente alle*

$$(31) \qquad y_1(a) = \bar{y}_1\,, \quad y_1(b) = \bar{\bar{y}}_1\,, \quad y_2(c) = \bar{y}_2\,, \quad y_2(d) = \bar{\bar{y}}_2\,.$$

Infatti si osservi anzitutto che in virtù delle (29) e (30) ogni eventuale soluzione $[y_1(x)\,,\ y_2(z)]$ del problema soddisfa alle

$$(32) \qquad \begin{aligned} |\,y_1''(x)\,| &\leq \frac{1}{m}\,[\gamma_1(y_1(x))\,\varphi_1(y_1'(x)) + \psi_1(x)] \\ |\,y_2''(z)\,| &\leq \frac{1}{n}\,[\gamma_2(y_2(x])\,\varphi_2(y_2'(x)) + \psi_2(z)] \end{aligned}$$

sicchè per un noto risultato [18], in virtù anche delle (31), esi-

[18] Ved. L. TONELLI – *Sull' equazione* $y'' = f(x, y, y')$ (Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, (2) – vol. VIII – 1939 – pp. 75-88, n. 6 *c*); G. ZWIRNER – *Su un problema di valori al contorno per equazioni differenziali del secondo ordine* (Rend. Sem. Mat. Roma – (4) – vol. III, 1939 – pp. 57-70) – pag. 59.

stono due costanti L_1 e L_2 positive, tali che per ogni eventuale soluzione del problema si abbia

$$(33) \quad |y_1(x)| \leq L_1, \; |y_1'(x)| \leq L_1, \; |y_2(z)| \leq L_2, \; |y_2'(z)| \leq L_2 .$$

Siano allora H_1 e H_2 i massimi rispettivamente delle espressioni $|f_{y_1} - f_{y_1'x} - y_1' f_{y_1' y_1}|$ e $|f_{y_2} - f_{y_2'z} - y_2' f_{y_2' y_2}|$ per $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, $|y_1| \leq L_1$, $|y_2| \leq L_2$, $|y_1'| \leq L_1$, $|y_2'| \leq L_2$; e costruiamo le due funzioni

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} G_1(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f_{y_1} - f_{y_1'x} - y_1' f_{y_1' y_1} \text{ negli } (x, z, \\ \qquad y_1, y_2, y_1', y_2') \text{ in cui è } |f_{y_1} - f_{y_1'x} - y_1' f_{y_1' y_1}| \leq H_1 \\ G_1(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = H_1 \text{ negli } (x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \text{ in cui} \\ \qquad \text{è } |f_{y_1} - f_{y_1'x} - y_1' f_{y_1' y_1}| > H_1 \\ G_2(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f_{y_2} - f_{y_2'z} - y_2' f_{y_2' y_2} \text{ negli } (x, z, \\ \qquad y_1, y_2, y_1', y_2') \text{ in cui è } |f_{y_2} - f_{y_2'z} - y_2' f_{y_2' y_2}| \leq H_2 \\ G_2(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = H_2 \text{ negli } (x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \text{ in cui} \\ \qquad \text{è } |f_{y_2} - f_{y_2'z} - y_2' f_{y_2' y_2}| > H_2 . \end{array} \right.$$

Sostituiamo il sistema (28) col nuovo sistema

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} y_1''(x) = \dfrac{\displaystyle\int_c^d G_1(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dz}{\displaystyle\int_c^d f_{y_1'y_1'}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dz} \\[2ex] y_2''(z) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b G_2(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx}{\displaystyle\int_a^b f_{y_2'y_2'}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx} \end{array} \right.$$

L'esistenza di almeno una soluzione di (35) soddisfacente alle (31) si ottiene considerando, negli spazi metrici Σ_1 e Σ_2 delle funzioni continue rispettivamente in (a, b) e in (c, d) insieme alle loro derivate prime (la distanza di due punti $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ di Σ_1 essendo al solito data da: $\max_{(a,b)} |\varphi(x) - \psi(x)| + \max_{(a,b)} |\varphi'(x) - \psi'(x)|$ e analogamente in Σ_2) il sistema di trasformazioni funzionali continue:

$$
(36) \quad \left\{
\begin{aligned}
\theta_1(x) &= F_1[\tau_1(x), \tau_2(z)] = \int_a^x dx \int_a^x \Phi_1(x)\, dx + \\
&\quad + \frac{1}{b-a}\left\{\left[\int_a^b dx \int_a^x \Phi_1(x)\, dx - \overline{\overline{y}}_1\right](a-x) + (b-x)\,\bar{y}_1\right\} \\
\theta_2(z) &= F_2[\tau_1(x), \tau_2(z)] = \int_c^z dz \int_c^d \Phi_2(z)\, dz + \\
&\quad + \frac{1}{d-c}\left\{\left[\int_c^d dz \int_c^z \Phi_2(z)\, dz - \overline{\overline{y}}_2\right](c-z) + (d-z)\,\bar{y}_2\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

dove

$$
\Phi_1(x) = \frac{\int_c^d G_1(x, z, \tau_1(x), \tau_2(z), \tau_1'(x), \tau_2'(z))\, dz}{\int_c^d f_{y_1' y_1'}(x, z, \tau_1(x), \tau_2(z), \tau_1'(x), \tau_2'(z))\, dz}
$$

e $$
\Phi_2(z) = \frac{\int_a^b G_2(x, z, \tau_1(x), \tau_2(z), \tau_1'(x), \tau_2'(z))\, dx}{\int_a^b f_{y_2' y_2'}(x, z, \tau_1(x), \tau_2(z), \tau_1'(x), \tau_2'(z))\, dx}.
$$

In virtù delle (29) e (34) risulta

$$|\theta_1''(x)| \leq \frac{H_1}{m} \qquad |\theta_2''(z)| \leq \frac{H_2}{m}$$

e $\theta_1(x)$ e $\theta_2(z)$ soddisfano inoltre alle (31), sicchè per un noto Teorema [19], il sistema (36) ammette almeno un elemento unito $[y_1(x), y_2(z)]$ il quale è dunque una soluzione delle (35) soddisfacente alle (31). D'altra parte in virtù delle (34) e (30), questa soluzione soddisfa anche alle (32) e quindi alle (33). Ed allora, tenendo presente le (34), risulta che $[y_1(x), y_2(z)]$, è soluzione anche del sistema (28).

Osservazione. - È chiaro che nel Teorema II. ciascuna delle (29) può assere sostituita rispettivamente con la $f_{y_1'y_1'} \leq -m$ e la $f_{y_2'y_2'} \leq -m$.

3. Esistenza dell'estremale con determinate condizioni iniziali. - Gli stessi risultati richiamati nel numero precedente e i ragionamenti ivi usati portano immediatamente a Teoremi di esistenza dell'estremale soddisfacente a terminate condizioni «iniziali» (cioè per la quale risulti $y_1(a) = \bar{y}_1$, $y_1'(a) = \bar{y}_1'$, $y_2(c) = \bar{y}_2$, $y_2'(c) = \bar{y}_2'$, con $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_1'$, $\bar{y}_2'$ numeri assegnati).

Sorvolando sull'analogo del Teorema I. del numero precedente, mi limito a rilevare che *nell'ipotesi* I), II), III) *del Teorema II. possiamo esser certi che presi comunque quattro numeri reali* $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_1'$, $\bar{y}_2'$ *esiste sempre almeno un'estremale* $[y_1(x), a \leq x \leq b, y_2(z), c \leq z \leq d]$ *soluzione del sistema* (28), *soddisfacente alle*

(19) G. D. Birkhoff - O. D Kellog - *Invariant points in functions space* (Trans. of the Amer. Soc. - vol. 23 (1922) - pp. 96-115); R. Caccioppoli - *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale* (Rend. Acc. Lincei (6) - vol. XI - 1930 - pp. 794-799).

$$(31') \quad y_1(a) = \bar{y}_1 \ , \ y_1'(a) = \bar{y}_1' \ , \ y_2(c) = \bar{y}_2 \ , \ y_2'(c) = \bar{y}_2' \ .$$

Basterà infatti nelle considerazioni precedenti sostituire al sistema (36) il seguente

$$(36') \quad \begin{cases} \theta_1(x) = \bar{y}_1 + \bar{y}_1'(x-a) + \displaystyle\int_a^x (x-t)\,\Phi_1(t)\,dt \\ \theta_2(z) = \bar{y}_2 + \bar{y}_2'(z-c) + \displaystyle\int_c^z (z-u)\,\Phi_2(u)\,du \end{cases}$$

dove $\Phi_1(x)$ e $\Phi_2(z)$ hanno lo stesso significato del numero precedente.

Osservazione. – Si osservi che accanto ai problemi con le condizioni «ai limiti» (31) e a quelli con le condizioni «iniziali» (31′) si possono nello stesso modo e giungendo ad analoghi risultati considerare problemi con condizioni di tipo «misto» cioè con le condizioni $y_1(a) = \bar{y}_1$, $y_1(b) = \bar{\bar{y}}_1$, $y_2(c) = \bar{y}_2$, $y_2'(c) = \bar{y}_2'$, oppure con le $y_1(a) = \bar{y}_1$, $y_1'(a) = \bar{y}_1'$, $y_2(c) = \bar{y}_2$, $y_2(d) = \bar{\bar{y}}_2$.

4. – Unicità dell'estremale con determinate condizioni ai limiti. –

Teorema: *Supposto che:*

I) *i campi A_1 e A_2 coincidano rispettivamente con tutto il piano (x, y_1) o con una striscia a lati paralleli all'asse y_1 e con tutto il piano (z, y_2) o con una striscia a lati paralleli all'asse y_2;*

II) *in tutto A e per ogni y_1' e y_2' esistano continue le derivate parziali del secondo ordine della f rispetto a y_1, y_2, y_1', y_2' e la forma quadratica avente per discriminante*

$$\begin{vmatrix} f_{y_1 y_2} & f_{y_1 y_2} & f_{y_1 y_1'} & f_{y_1 y_2'} \\ f_{y_2 y_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{y_1' y_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{y_2' y_1} & \cdots & \cdots & f_{y_2' y_2'} \end{vmatrix}$$

sia sempre definita positiva;
allora presi comunque due punti $(a, \bar{y}_1)$ *e* $(b, \bar{\bar{y}}_1)$ *di* A_1 $(a \neq b)$ *e due punti* $(c, \bar{y}_2)$ *e* $(d, \bar{\bar{y}}_2)$ *di* A_2 $(c \neq d)$, *esiste al più una sola estremale* $C[y_1(x), y_2(z)]$ *tale che* $y_1(a) = \bar{y}_1$, $y_1(b) = \bar{\bar{y}}_1$, $y_2(c) = \bar{y}_2$, $y_2(d) = \bar{\bar{y}}_2$.

Supposto infatti per assurdo che esistano due estremali soluzione del problema: $C[y_1(x), y_2(z)]$ e $\overline{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)]$ si consideri dapprima la differenza

$$I(y_1, y_2) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \int_a^b\!\!\int_c^d [f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_1', \bar{y}_2')]\, dx dz;$$

applicando la formula del TAYLOR arrestata al secondo termine e tenendo presente che per essere $\overline{C}$ un'estremale è $\bar{\delta} I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0$ (ved. n. 7, § 1) e che è verificata l'ipotesi II), si ottiene

$$I(y_1, y_2) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) > 0 .$$

Ma nello stesso modo dovrebbe essere

$$I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - I(y_1, y_2) > 0$$

e di qui l'assurdo.

Dalla dimostrazione data si deduce che *l'estremale C, se esiste, è l'unica curva minimante.*

CAPITOLO II.

LE EQUAZIONI DI EULERO RELATIVE AD $I(y_1)$. APPLICAZIONI.

§ 1.

Le equazioni di Eulero per $I(y)$.

1. - Preliminari e definizioni. - Diremo *campo* A un insieme di punti del piano contenente tutti i propri punti di accumulazione al finito.

La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ sarà definita per ogni coppia di punti (x, y_1) e (z, y_2) di A e per ogni valore di y_1' e y_2' e continua in ogni punto $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ in cui è definita insieme alle sue derivate $f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_1'}, f_{y_2'}$. Ciò equivale anche a dire che la f è definita per ogni valore di y_1' e y_2' e ogni punto (x, z, y_1, y_2) del campo $A^2 = A \times A$ dello spazio (x, z, y_1, y_2) prodotto dei due campi uno del piano (x, y_1) e l'altro del piano (z, y_2) entrambi coincidenti con A; questa seconda nomenclatura ha il vantaggio di essere analoga a quella relativa a $I(y_1, y_2)$, quando si ponga in essa $A_1 = A$, $A_2 = A$, $A = A^2$, e ci permetterà dunque di dare senso anche per $I(y)$ alle proposizioni stabilite per $I(y_1, y_2)$.

Ricordiamo anche che dicesi *curva ordinaria* C ogni funzione assolutamente continua $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, i cui punti $(x, y(x))$ appartengono al campo A e tale che esista finito l'integrale secondo LEBESGUE

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)\, dx\, dz .$$

Supporremo inoltre, come si è soliti a fare, che la f soddisfi alla relazione

$$(37) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1'),$$

ciò che facilita lo studio e non toglie del resto generalità ad $I(y)$, in quanto, se non valesse la (37), basterebbe sostituire alla f la funzione

$$\bar{f}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = [f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') + f(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1')] : 2,$$

essendo evidentemente per ogni curva ordinaria

$$\int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \bar{f}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz \text{ [20]}.$$

Dalla (37) si ricava che valgono anche le

$$(38) \qquad \begin{aligned} f_{y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') &= f_{y_2'}(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1') : \\ f_{y_1}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') &= f_{y_1}(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1') \end{aligned}$$

e anche, nel caso che esistano, relazioni analoghe per le derivate successive di f (per esempio $f_{y_1'x}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = f_{y_2'z}(z, x, y_2, y_1, y_2', y_1')$).

Infine anche per $I(y)$ diremo che una curva ordinaria $\bar{C}[\bar{y}(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}]$ appartenente ad una classe K di curve ordinarie C, è di *indifferenza internamente rispetto ad* A *e* K,

[20] L'ipotesi (37) è supposta sia da FUBINI che da FAEDO; non così GOLDSTINE, ma appunto per l'osservazione fatta, ciò non Gli ha portato un effettivo vantaggio (si vedano per es. la definizione di variazione prima data da GOLDSTINE (luogo cit. in (2) pp. 354–355) e quella che noi daremo nel n. 4). La (37) non è stata da noi supposta nelle precedenti M. I e II, solamente perchè non ci era allora di effettivo aiuto nel semplificare i ragionamenti.

quando esiste un $\rho > 0$ tale che i punti (x, y) con $\bar{a} \leq x \leq \bar{b}$, $| y - \bar{y}(x) | \leq \rho$ appartengano ancora ad A e ogni curva ordinaria $C\,[y(x),\ \bar{a} \leq x \leq \bar{b}]$ avente gli stessi estremi di $\overline{C}$ e appartenente all'intorno (ρ) di $\overline{C}$, appartenga anche a K.

La curva $C\,[y(x)]$ è di classe 1 quando la derivata $y'(x)$ è continua in tutto $(a,\ b)$.

2. - Le condizioni di Eulero; le estremali; le estremaloidi. - Tutti i risultati dai nn. 2, 3, 4, 5 del § 1, cap. I. sulle proprietà delle estremanti per $I(y_1, y_2)$ si trasportano esattamente anche ad $I(y)$. Faccio rilevare che è bene tener presente, sia nell'enunciare l'ipotesi che nelle dimostrazioni, le relazioni (37), (38) e analoghe; con ciò i sistemi (1) e (1') delle equazioni di Eulero si riducono in questo caso rispettivamente alle due equazioni

$$
\begin{aligned}
(39) \qquad & \int_a^b f_{y_1}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dz\ - \\
& - \frac{d}{dx}\int_a^b f_{y_1'}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dz = 0
\end{aligned}
$$

$$
(39') \qquad \int_a^x dx \int_a^b f_{y_1}(x, z, \ldots)\, dz - \frac{d}{dx}\int_a^x dx \int_a^b f_{y_1'}(x, z, \ldots)\, dz = c
$$

e, se esistono continue le derivate $f_{y_1'x}$, $f_{y_1'y_1}$, $f_{y_1'y_1'}$ (e quindi anche per la (37) le $f_{y_2'z}$, $f_{y_2'y_2}$, $f_{y_2'y_2'}$) e la $y(x)$ ammette la derivata seconda, la (39) si può anche scrivere

$$
(40) \qquad \int_a^b f_{y_1} dz - \int_a^b f_{y_1'x} dz - y'(x)\int_a^b f_{y_1'y_1} dz - y''(x)\int_a^b f_{y_1'y_1'} dz = 0.
$$

Anche le definizioni di estremale e di estremaloide si introducono in modo del tutto analogo: ogni curva $C\,[y(x),$

$a < x \leq b]$ di classe 1 soddisfacente alla (39) si dirà *un'estremale relativa alla* f; ogni curva ordinaria $C\ [y(x),\ a \leq x \leq b]$ tale che risultino integrabili in $[a < x \leq b,\ a \leq z \leq b]$ le funzioni $f_{y_1}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))$ e $f_{y'_1}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))$ [e quindi anche le f_{y_2} e $f_{y'_2}$] e che soddisfi all'equazione (39') si dirà un'*estremaloide* relativa alla f.

3. – Le condizioni di Eulero sotto opportune ipotesi sulla f. – Anche i risultati del n. 6, § 1, cap. I. si estendono senz'altro ad $I(y)$.

Per il Teorema I. va osservato anzitutto che ora le ipotesi (9') e (10') sono, in virtù delle (38), conseguenza rispettivamente delle (9) e (10). Quanto alla dimostrazione, costruite, come nel n. 6 citato, le funzioni $\varphi_n(x)$ e $\omega_n(x)$, si consideri la curva $C_{n,t}\ [\bar{y}(x) + t\omega_n(x),\ \bar{a} \leq x \leq b]$. Per dimostrare che $C_{n,t}$ è una curva ordinaria, si applichi ancora il Teorema del valor medio nella forma di Cavalieri–Lagrange, così da ottenere

$$
\begin{aligned}
(16')\qquad & f(x, z, \bar{y}(x) + t\omega_n(x), \bar{y}(z) + t\omega_n(z), \bar{y}'(x) + \\
&+ t\omega'_n(x), \bar{y}'(z) + t\omega'_n(z)) = f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) + \\
&+ t\omega'_n(z) f_{y'_2}(x, z, \bar{y}(x) + t\omega_n(x), \bar{y}(z) + t\omega_n(z), \bar{y}'(x) + \\
&+ t\omega'_n(x), \bar{y}'(z) + \theta'_2 t\omega'_n(z)) + t\omega'_n(x) f_{y'_1}(x, z, \bar{y}(x) + t\omega_n(x), \bar{y}(z) + \\
&+ t\omega_n(z), \bar{y}'(x) + \theta'_1 t\omega'_n(x), \bar{y}'(z)) + t\omega_n(z) f_{y_2}(x, z, \bar{y}(x) + \\
&+ t\omega_n(x), \bar{y}(z) + \theta_2 t\omega_n(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) + \\
&+ t\omega_n(x) f_{y_1}(x, z, \bar{y}(x) + \theta_1 t\omega_n(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}(z))
\end{aligned}
$$

con $0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1,\ 0 < \theta'_1 < 1,\ 0 < \theta'_2 < 1$.

Applicando ora le (9), (9'), (10), (10') e, ai risultati così ottenuti, successivamente ancora il Teorema del valor medio nella forma di Cavalieri–Lagrange e le stesse (9), (9'), (10), (10'), si arriva, in modo analogo a quanto si è fatto con la (16), a maggiorare i moduli dei vari termini del secondo membro di (16') (e quindi anche quello del primo membro) con funzioni integrabili e con ciò si conclude che $C_{n,t}$ è ordinaria. Lo stesso artifizio di calcolo si adopera poi per dimostrare l'esistenza del $\lim_{t \to 0} \{ I(\bar{y} + t\omega_n) - I(\bar{y}) \} : t$.

La dimostrazione prosegue poi come nel n. 6, § 1, cap. I.

Il Teorema II. vale senz'altro anche per $I(y)$.

4. - La variazione prima. - Data una curva ordinaria $C\,[y(x),\ a \leq x \leq b]$ e considerate le variazioni prime smorzate $\overline{\delta} y$ e $\overline{\delta} y'$ della $y(x)$ e della $y'(x)$, se esistono gli integrali

$$\int_a^b\!\!\int_a^b f_{y_1}(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)\,dx dz + \int_a^b\!\!\int_a^b f_{y_1'}(x, z, \ldots)\,dx dz ,$$

dicesi *variazione prima smorzata* di $I(y)$ su C l'espressione

$$\overline{\delta} I(y) = \int_a^b\!\!\int_a^b (f_{y_1}\overline{\delta} y + f_{y_1'}\overline{\delta} y')\,dx\,dz ,$$

intendendo di considerare solo quelle $\overline{\delta} y$ per cui esiste l'integrale

$$\int_a^b\!\!\int_a^b f_{y_1'}\overline{\delta} y'\,dx\,dz .$$

Naturalmente, per le (38), in $\overline{\delta} I(y)$ a f_{y_1} e $f_{y_1'}$ si possono sostituire le f_{y_2} e $f_{y_2'}$. Valgono poi risultati del tutto corrispondenti a quelli del n. 7, § 1, cap. I.

5. - Esistenza e unicità delle estremali. - È chiaro che tutti i risultati dei nn. 2, 3, 4 del § 2, cap. I. sull'esistenza e l'unicità delle estremali, fatte le ovvie modifiche valgono anche per $I(y)$; si tenga presente che il sistema di equazione di

EULERO di $I(y_1, y_2)$ è ora sostituito con un'unica equazione integro-differenziale, relativamente alla quale vanno espressi i risultati sopra citati.

Sarebbe interessante vedere se è possibile costruire anche per $I(y)$ un esempio analogo a quello del n. 1, § 1, cap. I.

§ 2.

Applicazioni alle equazioni integro-differenziali.

1. - Il FUBINI nell'introdurre lo studio del funzionale $I(y)$ ha già messo in rilievo la possibilità di applicazioni nel campo delle equazioni integro-differenziali, partendo appunto dall'osservazione che la condizione di EULERO per $I(y)$ si esprime attraverso un'equazione integro-differenziale; e come conseguenza dell'esistenza del minimo in un caso particolare di $I(y)$, Egli ha dato un Teorema di esistenza in un problema ai limiti per una particolare equazione integro-differenziale del secondo ordine (21).

Risultati più ampi e più significativi si possono ottenere dallo studio da noi fatto in generale di $I(y)$ e di $I(y_1, y_2)$: i Teoremi dei nn, 2, 3, 4 del § 2, cap. I., e del n. 5, § 1, cap. II. sono appunto criteri di esistenza o di unicità relativi a sistemi e ad equazioni integro-differenziali del secondo ordine. E in generale di fronte ad un sistema o ad una equazione integro-differenziale del tipo di FREDHOLM si può cercare se essi

(21) L'equazione è la seguente:

$$r(x)\,y''(x) + q(x)\,y'(x) + p(x)\,y(x) + \int_0^1 \left\{ \sigma(x,z)\,y(z) + \tau(x,z)\,y'(z) \right\} dz = 0$$

dove $r(x)$, $q(x)$, $p(x)$, $\sigma(x,z)$, $\tau(x,z)$ sono opportune funzioni assegnate. Questo caso considerato dal FUBINI, se si tiene inoltre presente l'osservazione fatta nel § 2, cap. II, M. I, rientra nei risultati conseguiti nelle M. I e II e nella presente.

possano interpretarsi come sistema o equazione di EULERO di un certo integrale di FUBINI-TONELLI, al quale siano applicabili i risultati sull'esistenza dell'estremo e sulle proprietà delle estremanti da noi stabiliti secondo il *metodo diretto del Tonelli.*

Nel numero seguente ne vedremo appunto, a titolo di esempio, un caso immediato.

2. - TEOREMA: *Sia $F(x, z, y_1, y_2)$ una funzione definita e continua insieme alla derivata F_{y_1} per ogni coppia (x, y_1) e (x, y_2) del campo $A: 0 \leq u \leq b$, $-\infty < y < +\infty$ e soddisfacente alla*

$$F(x, z, y_1, y_2) = F(z, x, y_2, y_1)\,; \tag{41}$$

esistano inoltre due numeri non negativi h_1 e h_2 e un altro α, soddisfacente alle $0 < \alpha \leq 2$, tali che in tutto A sia

$$F(x, z, y_1, y_2) \geq -h_1 y_1^{2-\alpha} - h_2\,; \tag{42}$$

allora l'equazione

$$y''(x) = \int_0^b F_{y_1}(x, z, y(x), y(z))\, dz \tag{43}$$

ammette almeno una soluzione soddisfacente alle condizioni

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(b) = 0\ . \tag{44}$$

Si consideri infatti la funzione

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = \frac{y_1'^2}{2} + \frac{y_2'^2}{2} + F(x, z, y_1, y_2)$$

e la classe K (che risulta completa) delle curve ordinarie $y = y(x)$ $0 \leq x \leq b$, assolutamente continue, soddisfacenti alle (44) e tali che esista finito l'integrale secondo LEBESGUE

$$I(y) = \int_0^b\!\!\int_0^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz\ .$$

In virtù della (42), dal criterio II. del n. 2, § 3, cap. I, M. II (più precisamente vedasi quanto è detto nel n. 1, § 3, cap. II, M. II) si ricava che esiste il minimo di $I(y)$ in K. Sia C una curva minimante; essa risulta d'indifferenza internamente rispetto ad A e K e, poichè la f soddisfa alle condizioni del Teorema II., n. 6 e del Teorema II., n. 5 del § 1, cap. I. (vedasi anche il n. 2, § 1, cap. II) essa è anche un'estremale relativa alla f, la cui equazione di EULERO risulta essere appunto la (43).

Il Teorema è ancora valido se nella (42) si pone $\alpha = 0$, purchè tra i numeri b e h_1 sia soddisfatta la relazione

$$b < \frac{\pi}{\sqrt{2h_1}} .$$

Basta sostituire al criterio II del n. 2, § 3, cap. I, M. II, una sua immediata estensione, in modo del tutto analogo a quanto è stato fatto da S. CINQUINI nel risolvere mediante il Calcolo delle Variazioni un problema ai limiti per un certo tipo di equazioni differenziali non lineari [22].

Il Teorema può estendersi anche ai sistemi di equazioni integro-differenziali del secondo ordine.

[22] S. CINQUINI – *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali non lineari* (Boll. dell' U. M. I., vol. XVII (1938)). L'estensione si ottiene anche nel nostro caso sostituendo alla ipotesi 2) del citato criterio II la seguente:

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = g_1(x, z, y_1', y_2') - g_2(x, z, y_1, y_2)$$

con $\quad g_1(x, z, y_1', y_2') \geq C_1 y_1'^2 - C_2, \; g_2(x, z, y_1, y_2) \leq C_3 y_1^2 + C_4$

dove i C sono numeri non negativi con $C_1 > 0$ e tale che sia

$$C_1 > C_3 \left(\frac{b^* - a^*}{\pi}\right)^2$$

(si veda per la dimostrazione la nota [3] del lavoro citato di S. CINQUINI).