

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

RENATO GANDIN

**Sulla determinazione geometrico-funzionale
del gruppo dei punti di contatto di un sistema
di spazi con una curva algebrica**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 19 (1950), p. 54-61

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__54_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

SULLA DETERMINAZIONE GEOMETRICO-FUNZIONALE DEL GRUPPO DEI PUNTI DI CONTATTO DI UN SI- STEMA DI SPAZI CON UNA CURVA ALGEBRICA

. Nota (*) di RENATO GANDIN (a Verona).

Introduzione. — Il problema generale degli spazi plurisecanti una curva algebrica C_p^n di ordine n e di genere p , priva di singolarità puntuali, immersa in uno spazio ad r dimensioni si può dire consista nella determinazione degli S_k dello S_r che hanno con la curva contatti $v_1, v_2 \dots v_t$ — punto essendo $v_i \geq 1$; è noto che, perchè tali spazi esistano, occorre sia soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$(r - k) \sum_{i=1}^t v_i - t = (k + 1) (r - k).$$

Tale problema, per le curve razionali, dal punto di vista numerativo, è stato risolto da SEVERI mentre la trattazione completa dal punto di vista *geometrico-funzionale* e per una curva di genere p , non mi risulta conosciuta.

Scopo della presente Nota è, giusta quanto detto, di offrire la risoluzione del seguente problema particolare, perchè poi, in una successiva generalizzazione del metodo usato che è nella sostanza quello del mio compianto Maestro ANNIBALE COMESSATI, sia possibile conseguire la dimostrazione della formula di equivalenza nel caso generale:

(*) Pervenuta in Redazione il 30 giugno 1949.

« *Determinazione del gruppo dei contatti ν — punto degli S_{r-3} di S_r con una C_p^n di S_r aventi con la curva oltre l'incontro ν — punto, uno ($r - \nu - 2$) — punto ed un ulteriore semplice incontro* ».

Preliminari. — Giova innanzi tutto avvertire che, indicate con $a_i = a_i(n, r, p, i)$ e $b_i = b_i(n, r, p, i)$ due funzioni intere dell'ordine n , del genere p , della curva C_p^n , supposta priva di singolarità puntuali, della dimensione r dello spazio ambiente e dell'indice i ($i = 1, 2, \dots, r - \nu - 2$), con G e K rispettivamente la generica sezione iperpiana ed un gruppo canonico della curva l'interpretazione *geometrico-funzionale*, nel senso di SEVERI, del gruppo Z_i incognito di cui all'enunciato, si esprimerà mediante una equivalenza del tipo:

$$(1) \quad Z_i \equiv a_i G + b_i K,$$

che sarà dimostrata seguendo il metodo di induzione (1) cioè ammettendo la formula

$$Z_{i-1} \equiv a_{i-1} G + b_{i-1} K,$$

dove a_{i-1} e b_{i-1} hanno ovvio significato, cioè $a_{i-1} = a_{i-1}(n, r - 1, p, i - 1)$, $b_{i-1} = b_{i-1}(n, r - 1, p, i - 1)$, e deducendone quindi la (1).

Il procedimento che seguiremo dimostrerà che l'equivalenza (1) vale per $i = 1$ ed in più darà modo di esprimere le funzioni a_i e b_i mediante formule ricorrenti; quando infine tali funzioni saranno note il numero N_i degli S_{r-3} di cui all'enunciato sarà dato dalla formula

$$(2) \quad N_i = \frac{1}{\alpha} [n a_i + 2(p - 1) b_i],$$

che è l'interpretazione numerativa della (1) ed in cui α è un intero che in seguito verrà precisato.

(1) Il procedimento usato per risolvere il problema enunciato è analogo a quello adoperato da A. COMESSATTI nella Nota « *Determinazione dei gruppi di $(r + 1)$ punti comuni ad $(r + 1)$ serie lineari g_r^n* ». [Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, t. 69, P. II, pag. 871].

Costruzione di una corrispondenza sulla C_p^n . — Prima di risolvere il problema di cui all'enunciato è opportuno premettere la determinazione *geometrico-funzionale* del gruppo dei contatti degli S_{r-3} aventi un incontro $(r-3)$ — punto e due ulteriori semplici incontri comuni C_p^n di S_r cioè, insomma, risolvere il problema nel caso $v=1$.

Allo scopo, fissato un generico punto P sulla C_p^n , si consideri la corrispondenza T che nasce dall'associargli il gruppo dei contatti $(r-4)$ — punto degli S_{r-3} passanti per P ed ulteriormente bisecanti.

Indicando con Y il gruppo dei punti P' omologhi di P nella T ed osservando che tale gruppo è equivalente a quello dei contatti $(r-4)$ — punto degli S_{r-4} aventi un incontro $(r-4)$ e due ulteriori semplici incontri con la Γ_p^{n-1} , proiezione della C_p^n da P in un S_{r-1} , tenendo presente quanto precedentemente detto, si potrà scrivere per Y , la seguente equivalenza:

$$(3) \quad Y \equiv a'_{i-1} (G - P) + b'_{i-1} K,$$

dove con a'_{i-1} e b'_{i-1} si sono indicate le funzioni prima definite dopo aver sostituito in esse ad n, r, i rispettivamente $(n-1)$, $(r-1)$ ed $(i-1)$.

Per quanto riguarda la corrispondenza inversa T^{-1} si noti che, fissato P' sulla C_p^n , i punti P da cui esso proviene sono quelli di appoggio semplice degli S_{r-3} aventi un incontro $(r-4)$ — punto in P' ed ulteriormente trisecanti. Indicando pertanto con X il gruppo dei punti P' , omologhi di P nella T^{-1} , osservando che tale gruppo è equivalente a quello delle trisecanti la Γ_p^{n-r+4} di S_4 , come facilmente si deduce proiettando su detto spazio la C_p^n dallo S_{r-5} osculatore in P' e ricordando la relativa formula di equivalenza nota (2), dopo aver sostituito in essa ad n e G rispettivamente $(n-r+4)$ e $\{G - (r-4)P\}$, si potrà scrivere, per X , la seguente espressione:

(2) Cfr. R. GANDIN: « *Risoluzione geometrico funzionale del problema degli spazi plurisecanti una curva algebrica immersa in uno spazio a tre, quattro e cinque dimensioni* » [Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Vol. XXX, N. 5].

$$(4) \quad X \equiv \left\{ \binom{n-r}{2} - (p-1) \right\} G - (r-4) P - (n-r-2) K,$$

da cui discende che la corrispondenza T istituita fra i punti della C_p^n è dotata di *valenza*

$$\gamma = \left\{ \binom{n-r}{2} (r-4) - (p-1)(r-4) \right\}.$$

Notando che le coincidenze della T cadono solamente nei punti di contatto $(r-3)$ — punto degli S_{r-3} di cui detto, applicando il *principio* di CAYLEY-BRILL si potrà scrivere, per il gruppo Z_i incognito, la seguente equivalenza:

$$(5) \quad Z_i \equiv \left\{ a'_{i-1} + \binom{n-r}{2} - (p-1) \right\} G + \\ + \left\{ b'_{i-1} - (n-r-2) + \binom{n-r}{2} (r-4) - (p-1)(r-4) \right\} K.$$

Da tale formula discende inoltre che i coefficienti di G e di K altro non sono che le espressioni che competono rispettivamente alle funzioni a_i e b_i .

La formula (1) rimane quindi dimostrata nella ipotesi che valga la (2) ed in più sono state trovate espressioni ricorrenti per a_i e b_i . Rimane da provare che la (1) vale per $i=1$ e ciò si ottiene molto semplicemente considerando che in tal caso il problema è già risolto poichè si riduce alla determinazione del significato funzionale del gruppo dei punti di appoggio delle rette trisecanti una C_p^n di S_4 ; ricordando perciò la formula di equivalenza nota, si potrà scrivere, per il gruppo Z_1 , la seguente relazione:

$$(6) \quad Z_1 \equiv \left\{ \binom{n-4}{2} - (p-1) \right\} G - (n-6) K,$$

dalla quale si deduce, inoltre, che per $i=1$ i coefficienti a_1 e b_1 hanno rispettivamente le espressioni:

$$(7) \quad a_1 \equiv \left\{ \binom{n-4}{2} - (p-1) \right\}, \quad b_1 = -(n-6);$$

nel caso $i = 2$, adoperando ancora una volta la corrispondenza T precedentemente costruita, ed applicando il *principio* di CAYLEY-BRILL si ottiene, per Z_2 , la seguente equivalenza:

$$(8) \quad Z_2 \equiv \left\{ 2 \binom{n-5}{2} - 2(p-1) \right\} G + \\ + \left\{ \binom{n-5}{2} - 2(n-7) - (p-1) \right\} K;$$

da cui si deduce inoltre che, per $i = 2$, i coefficienti a_2 e b_2 hanno le espressioni seguenti:

$$a_2 = \left\{ 2 \binom{n-5}{2} - 2(p-1) \right\}, \\ b_2 = \left\{ \binom{n-5}{2} - 2(n-7) - (p-1) \right\}.$$

Da quanto precede si riesce ad intuire la formula generale che è, come sarà ora dimostrato, data dalla seguente equivalenza:

$$(9) \quad \boxed{Z_{r-3} \equiv \left\{ (r-3) \binom{n-r}{2} - (r-3)(p-1) \right\} G + \\ + \left\{ \binom{r-3}{2} \binom{n-r}{2} - (r-3)(n-r-2) - \binom{r-3}{2}(p-1) \right\} K}$$

con la convenzione che $\binom{r-3}{2} = 0$ quando $(r-3) < 2$.

Verifichiamo innanzi tutto la (9) per $i = 1$, cioè per $r = 4$; se ne ricavano immediatamente le (6) e (7).

Ciò fatto, ammettiamo la sua validità per il valore $(r-1)$ di r ed $(n-1)$ di n e dimostriamola per il valore di r ed n servendoci della (5).

Posto $(r-1)$ in luogo di r ed $(n-1)$ in luogo di n nella (9) e tenuto conto della (5) si ha, per a_{r-3} , la seguente espressione:

$$a_{r-3} = \left\{ (r-4) \binom{n-r}{2} - (r-4)(p-1) + \binom{n-r}{2} - (p-1) \right\},$$

da cui, dopo elementari trasformazioni,

$$a_{r-3} = \left\{ (r-3) \binom{n-r}{2} - (r-3)(p-1) \right\}.$$

Procedendo in maniera affatto analoga si perviene, per b_{r-3} , alla seguente formula:

$$b_{r-3} = \left\{ \binom{r-4}{2} \binom{n-r}{2} - (r-4)(n-r-2) - \binom{r-4}{2} (p-1) - \right. \\ \left. - (n-r-2) + (r-4) \binom{n-r}{2} - (p-1)(r-4) \right\},$$

cioè dopo ovvie trasformazioni,

$$b_{r-3} = \left\{ \binom{r-3}{2} \binom{n-r}{2} - (r-3)(n-r-2) - \binom{r-3}{2} (p-1) \right\}.$$

L'interpretazione numerativa della (9) si ottiene ponendo n in luogo di G e $2(p-1)$ in luogo di K e porge, per il numero N_{r-3} delle coincidenze, la seguente espressione:

$$(10) \quad N_{r-3} = 3! \frac{r-3}{2} \binom{n-r-2}{3} + \\ + \frac{r-3}{2} \left\{ n(n-1)(r-4) - 2n(r-1)(r-3) + \right. \\ \left. + r(r-1)(r-2) \right\} p - 2 \left\{ (r-3)(r-4) \right\} \binom{p}{2}.$$

Il risultato conseguito mediante l'uso della corrispondenza T istituita fra i punti della C_p^n ci permette ora di risolvere immediatamente anche il problema di cui all'enunciato usando una corrispondenza del tutto analoga.

Infatti, considerata sulla C_p^n la corrispondenza T' che associa al generico punto P il gruppo dei punti di appoggio semplice degli S_{r-3} aventi in P un incontro $(v-1)$ — punto, uno $(r-v-2)$ e due ulteriori semplici incontri, e notando che, per quanto riguarda la corrispondenza inversa T'^{-1} , valgono considerazioni simili a quelle già espresse precedentemente, si giunge con il procedimento già adoperato, alla seguente formula di equivalenza, per il gruppo Z_v dei contatti degli S_{r-3} di cui all'enunciato :

$$(11) \quad \left[\begin{aligned} Z_v \equiv & \left\{ v(r-v-2) \binom{n-r}{2} - v(r-v-2)(p-1) \right\} G + \\ & + \left\{ v \binom{r-v-2}{2} \binom{n-r}{2} - v(r-v-2)(n-r-2) - \right. \\ & - v \binom{r-v-2}{2} (p-1) + v(r-v-2) \binom{n-r}{2} - \\ & \left. - (v-1)(r-v-2)(p-1) \right\} K \end{aligned} \right]$$

la cui interpretazione numerativa, che si ottiene dalla (11), come più volte detto, porge, dopo qualche trasformazione, la seguente espressione :

$$(12) \quad N_v = 3! \frac{v_1 v_2}{\alpha} \binom{n-r+2}{3} + \\ + \frac{v_1 v_2}{\alpha} \left\{ n(n-1)(r-4) - 2n(r-1)(r-3) + \right.$$

$$+ r(r-1)(r-2) \left\{ p + \frac{4}{\alpha} \right\} 2(n-r+2) \binom{\nu_1}{2} \binom{\nu_2}{2} - \\ - \nu_1 \nu_2 (2\nu_1 \nu_2 - r + 2) \left\{ \binom{p}{2} \right\},$$

dove $\nu_2 = (r - \nu_1 - 2)$ ed $\alpha = 1$ se $\nu_1 \neq \nu_2$ ed entrambi da 1, $\alpha = 2$ se $\nu_1 = \nu_2$ o se $\nu_2 = 1$ ed $\alpha = 3$ se $\nu_1 = \nu_2 = 1$, formula che coincide con quella nota ⁽³⁾.

⁽³⁾ Cfr. F. SEVERI: « *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio* ». [Memorie della R. Accademia Scienze di Torino, t. 51 (1904)] pag. 95.