RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

Su una proprietà dei sistemi algebrici piani di curve contenenti infinite curve spezzate ed alcune sue applicazioni alle varietà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 396-412

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__396_0>

SU UNA PROPRIETÀ DEI SISTEMI ALGEBRICI PIANI DI CURVE CONTENENTI INFINITE CURVE SPEZZATE ED ALCUNE SUE APPLICAZIONI ALLE VARIETÀ

Nota (*) *di* MARIO BALDASSARRI (*a Padova*).

Sui sistemi di curve algebriche nel piano, contenenti curve spezzate, sono note soltanto quelle proprietà garantite, limitatamente a sistemi lineari, dal teorema di KRONECKER - CASTELNUOVO nella sua interpretazione piana, cioè si sa che se un sistema lineare ∞^r di curve algebriche su un piano contiene ∞^{r-1} curve spezzate per $r > 2$ le curve del sistema sono razionali e, se le componenti delle curve spezzate descrivono sistemi ∞^{r-1}, si ha $r \leq 5$, ed il sistema ha grado quattro.

D'altra parte, poichè le proprietà in parola hanno piuttosto un carattere differenziale, era sospettabile che si potesse instaurare una ricerca su abbastanza semplici strumenti, anche nel caso che, lasciata cadere la linearità del sistema, se ne supponesse soltanto l'algebricità, e tipicamente in tal caso mediante l'approssimazione del sistema nell'intorno di una sua curva con sistemi lineari « in piccolo ».

Tali risultati mi sembravano desiderabili perchè essi avrebbero potuto assolvere sistematicamente al ruolo che il teorema di KRONECKER - CASTELNUOVO assolve limitatamente alla caratterizzazione di superficie con curve sezioni spezzate secondo sistemi di conveniente dimensione, nei riguardi di V_r algebriche in analoghe situazioni. In sostanza sarebbe stato possibile dare un facile criterio di classificazione della V_r a curve sezioni di genere abbastanza basso.

(*) Pervenuta in Redazione il 29 maggio 1950.

Tali idee mi hanno guidato nella presente ricerca dove si troveranno ripresi gli essenziali motivi del teorema di BERTINI sui sistemi lineari di curve spezzate per pervenire anzitutto a quello che si può chiamare un teorema di KRONECKER–CASTELNUOVO in senso generale per i sistemi lineari compreso il caso fin'ora trascurato della rete lineare, fondando così una premessa per il più naturale attacco dei sistemi algebrici. Un teorema caratterizza infine l'intorno di una curva spezzata in un tale sistema, quando la curva stessa sia immersa in una infinità di curve spezzate, e si studiano le conseguenze al finito di tale teorema per sistemi di curve sezioni di V_r proiettati su un piano.

Ho così modo di pervenire ad alcune caratterizzazioni di tipi di V_r con ∞^s curve sezioni piane spezzate, che danno con facilità le possibili V_r a curve sezioni dei primi generi.

È tuttavia certo che questo lavoro è ben lontano dall'esaurire i risultati che si potrebbero ottenere, considerando ad esempio sistemi di curve sezioni non piane.

Il lavoro termina con la caratterizzazione della V_3 dello S_4 contenenti ∞^3 curve sezioni spezzate in tre componenti come V_3 a curve sezioni ellittiche ovvero contenenti un sistema algebrico ∞^1 d'indice uno di quadriche.

La generalizzazione di tale teorema interessante, in cui confluisce lo studio che ho già eseguito delle V_3 pluririgate, alle V_r con $r > 3$ e lo studio delle V_r di S_{r+1} con una infinità di sezioni piane di genere convenientemente basso, che si potranno fare nell'ordine generale d'idee che qui si espone sono rimandati ad altre più speciali ricerche.

1. – Sia Λ_2 una rete di curve algebriche irriducibili d'ordine n, data su un piano α, e tale che ∞^1 sue curve risultino riducibili. Indicheremo con C^n la generica curva di Λ_2, e con C' la generica curva spezzata di Λ_2.

La curva spezzata C' descriverà entro Λ_2 un sistema algebrico ∞^1 che diremo Σ, il quale potrà essere irriducibile o no, ed avrà comunque un certo grado α eguale a quello della rete Λ_2 o più piccolo, ed un certo genere π.

Per le ipotesi poste la curva C' sarà composta di più curve

$C'_1, C'_2, \ldots, C'_k$ se k sono le sue componenti con $k \geq 2$, e scriveremo: $C' \equiv \Sigma C'_i$.

La C'_i che avranno certi ordini n_i con $n = \Sigma n_i$, si muoveranno a loro volta entro certi sistemi semplicemente infiniti, irriducibili o no, a seconda che lo sia o no il sistema Σ, che diremo Σ_i, potendo anche un sistema Σ_i ridursi ad una curva fissa, sistemi che, escluso tale caso, avranno comunque certi gradi α_i, e genere in ogni caso eguale al genere π di Σ, in quantochè una qualsiasi componente C'_i (che sarà almeno una retta) imporrà due condizioni indipendenti alle curve della rete Λ_2, e quindi vi sarà una sola C' che la contiene, a meno che non ve ne siano infinite, ma in tal caso la C'_i sarebbe fissa entro il Σ_i, fatto che abbiamo escluso; e viceversa una C' individuerà una sola C'_i di ciascun Σ_i, ed esiste pertanto una corrispondenza birazionale fra gli elementi dei due sistemi Σ e Σ_i.

Si ricordi ancora che un sistema lineare di C^n non può possedere punti multipli variabili (1), a meno che essi non variino su una componente fissa delle curve del sistema, il che nel caso della nostra rete Λ_2 è da escludersi. Pertanto la rete Λ_2 avrà tutti gli eventuali punti multipli della generica C^n fissi nei suoi punti base. Indichiamo con Δ tale gruppo fisso di punti multipli.

La generica curva C' può invece possedere punti multipli variabili ovvero no, in quantochè essa varia nel sistema Σ che è algebrico, ma non necessariamente lineare. Occupiamoci innanzitutto di cosa si possa dire nelle due alternative. Si supponga perciò di pensare C' come insieme di una curva irriducibile, ad esempio C'_1, e di una curva riducibile o no formata dalle altre componenti che diremo $\overline{C'_1} \equiv C'_2 + C'_3 + \ldots + C_k$, notando che se $k = 2$ anche $\overline{C'_1}$ risulta irriducibile. Se tutti i punti multipli della C' sono fissi, il gruppo delle intersezioni di C'_1 con $\overline{C'_1}$ deve pure essere fisso, perchè questi punti sono almeno doppi per la C'. D'altra parte una C'_1 ed una $\overline{C'_1}$ anche non appartenti ad una stessa C' avrebbero allora fisse tutte le intersezioni, e quindi per un punto P generico del piano α non potrebbero passare almeno

(1) Ciò consegue da un ben noto teorema di BERTINI. Cfr. ad es., F. SEVERI, *Trattato di geom. alg.*, pag. 40.

una C'_1 ed una $\overline{C'_1}$, e ciò è assurdo muovendosi entrambe quelle curve in sistemi infiniti, a meno che la C'_1 e la $\overline{C'_1}$ non descrivano uno stesso fascio lineare. Da qui consegue che le k curve C'_i devono variare tutte in un fascio lineare, ed è anche ovvio che il caso è effettivamente possibile bastando combinare linearmente due curve spezzate ciascuna in k curve di uno stesso fascio con un'altra arbitraria curva del piano dello stesso ordine complessivo irriducibile, perchè si abbia appunto una rete di curve irriducibili, contenente un sistema lineare ∞^1 di curve spezzate a componenti tutte variabili secondo i gruppi di una g_k^1 entro un fascio.

Escluso quindi tale caso, occorre ammettere che nel gruppo delle intersezioni di C'_1 ve ne sia almeno una che varia al variare della C' in Σ. Tale intersezione, appunto perchè variabile, non può essere punto multiplo limite di punti multipli delle curve C di Λ_2, e quindi sarà un nuovo punto multiplo che la curva C' acquista spezzandosi, che si presenta come punto di collegamento fra la C'_1 e la $\overline{C'_1}$ (2).

Il punto multiplo acquisito non potrà essere più che doppio per la generica curva spezzata C'. Infatti se fosse almeno triplo in esso s'incrocierebbero almeno tre C'_i, perchè se fosse doppio (almeno) per una C'_i esso sarebbe nei punti del gruppo Δ il che è ora escluso dalla sua supposta variabilità, e poichè le C'_i non possono variare in un fascio lineare, esso sarebbe almeno doppio per le curve C di Λ_2 prossime a quella C', e quindi le curve di Λ_2 avrebbero un punto almeno doppio variabile, ciò che è assurdo.

Inoltre, sempre nella ipotesi che la C' acquisti un punto doppio variabile, si può vedere che la C' stessa non può acquistarne genericamente più di uno, a meno che una delle sue componenti non sia fissa.

Per rendere ciò evidente si rappresentino le curve C della

(2) Il fatto che una C spezzandosi acquisti un punto multiplo si vede facilmente anche nel caso che quel punto acquisito resti fisso. L'osservazione è utile perchè evita l'impiego di un principio elevato come quello dello spezzamento di Enriques, e lo sostituisce nel caso che la curva spezzata sia contenuta in un insieme infinito di curve spezzate con una semplice deduzione.

rete Λ_2 con le rette di un piano β, generando così una trasformazione $(1, D)$ fra α e β. Vi sarà nel piano β una curva φ luogo dei punti per cui due dei D punti corrispondenti su α coincidono; cosicchè ad un punto P di φ corrisponde un fascio di curve C che possiede in uno degli omologhi A' di A una tangente fissa; questo fascio contiene una curva dotata di punto doppio in A', e perciò A' sta sulla Jacobiana della rete Λ_2. Ma la curva φ è l'inviluppo delle rette cui corrispondono curve dotate di punto doppio, e quindi, se si ammette che le curve C' acquistino spezzandosi più punti doppi, la curva φ dovrebbe contenere una certa componente $\bar{\varphi}$ dotata di ∞^1 pluritangenti, che non potrebbe essere altro che una retta, dato che i punti di contatto dovrebbero essere tutti variabili. In tal caso la $\bar{\varphi}$ degenera in un fascio di rette come inviluppo, e quindi le C' devono su α variare in un fascio lineare. Essendo escluso che le componenti siano tutte variabili in tale fascio, non resta altro da supporre che una delle componenti sia fissa, luogo dei punti multipli che la C' acquista al variare delle altre componenti.

Anche tale caso può in effetti pensarsi. Si pensi ad esempio alla rappresentazione piana della rete di curve segata su una F_2^4 dello S_3 con retta doppia dai piani passanti per un punto della retta doppia, si ottiene sul piano α una rete di quartiche di genere due che contiene un fascio di curve spezzate in una cubica ellittica ed una retta variabile in un fascio, e qui la C' acquista appunto due punti doppi, e l'esempio è anzi generalizzabile al caso di una F_2^n con retta $(n-2)$ — pla.

Tale caso rientra comunque nella ipotesi che le componenti della C' descrivano un fascio lineare di curve spezzate, ed anzi, per un noto teorema di Bertini esaurisce tale possibilità completamente. Infatti è viceversa ovvio che se le C' variano in un sistema lineare o le componenti descrivono tutte uno stesso fascio lineare, ed allora fra i punti base vi possono essere più punti multipli acquisiti, come anzi sarà di certo per $k > 2$, ovvero una componente è fissa ed allora le sue intersezioni variabili con un'altra componente potranno essere più di due, ed anzi lo saranno certo se quella curva fissa non è razionale.

Riprendiamo, esaurito il caso che Σ sia un sistema lineare, la nostra deduzione nella residua ipotesi.

Abbiamo in tal caso già visto che la C'_1 e la $\overline{C}'_1$ presentano in una loro intersezione un nuovo punto doppio per la C' e non più di uno, nè più che doppio, che si troverà su C'_1 e su una delle componenti di $\overline{C}'_1$, ad esempio su $\overline{C}'_2$. Ma si può allora ripetere il ragionamento ad esempio con C'_3 e la curva residua $\overline{C}'_3 = C'_1 + C'_2 + C'_4 + \ldots + C'_k$. Si troverebbe allora che deve esistere un punto di collegamento anche fra C'_3 e un'altra componente, punto che dev'essere pure variabile e distinto dal primo. Ma allora la C' spezzandosi acquisterebbe almeno due punti doppi variabili, e questo per quanto abbiamo visto è, nelle attuali ipotesi, impossibile, e quindi si conclude che la C' non può spezzarsi in più di due componenti: cioè $k = 2$. Riassumiamo tutto ciò nel seguente teorema:

Teor. 1. - *Se una rete Λ_2 di curve algebriche irriducibili, data su un piano α, contiene ∞^1 curve spezzate, la generica curva spezzandosi acquista certo dei punti multipli secondo le tre possibilità:*

a) *I punti multipli acquisiti possono essere fissi, quando le curve spezzate siano composte con una involuzione in un fascio.*

b) *I punti multipli acquisiti variano su una componente fissa delle curve spezzate e le altre componenti variano in un fascio lineare.*

c) *I punti multipli acquisiti sono variabili, non più che doppi e non più di uno quando la curva spezzata varii in un sistema ∞^1 non lineare, ed in tal caso la curva spezzata non può avere più di due componenti.*

2. - Passiamo ora ad approfondire lo studio del caso (c) cercando di determinare in tale ipotesi la natura della rete Λ_2.

Intanto la proposizione (c) conduce ad una immediata conseguenza, infatti da essa risulta che le $\overline{C}'_1$ e $\overline{C}'_2$ di una stessa $\overline{C}'$ si tagliano in un solo punto fuori del gruppo Δ e ciò sarà quindi anche vero per la C'_2 prossime a quella $\overline{C}'_2$ rispetto la stessa $\overline{C}'_1$, e anche quindi al finito; in altre parole il grado relativo dei sistemi Σ_1 e Σ_2 è in tal caso eguale ad uno.

Dopociò cominciamo col trattare la possibilità che uno dei due sistemi Σ_1 o Σ_2 abbia grado zero, cioè sia un fascio lineare. Supponiamo ad esempio: $\alpha_1 = 0$.

In tal caso Σ_2 è certamente distinto da Σ_1 perchè se no si cadrebbe nella ipotesi (a) del Teor. 1. Anzi la generica C'_2 è unisecata dalle curve C'_1 di Σ_1, e quindi è razionale, ed essendo per di più in tal caso $\pi = 0$, sarà analogamente razionale la C'_1. Si conclude che la C si spezza in due curve razionali con l'acquisto di un solo punto doppio, e quindi le C stesse sono curve razionali.

Pertanto se $\alpha_1 = 0$ (ed analogamente se $\alpha_2 = 0$) la rete Λ_2 è composta di curve razionali e contiene ∞^1 curve C' spezzate in due componenti, una delle quali descrive un fascio lineare e l'altra un sistema ∞^1 razionale.

Per la nota classificazione dei sistemi lineari di curve razionali [3], una tale rete può sempre trasformarsi birazionalmente in una rete di curve razionali d'ordine n con un punto $(n-1)$ — plo.

Supponiamo infine che α_1 e α_2 siano entrambi maggiori di zero. Dimostreremo che in tale caso essi devono essere tutti due eguali ad uno, e che i sistemi Σ_1 e Σ_2 devono ridursi ad un unico sistema.

Si supponga infatti che ad esempio α_2 sia maggiore di uno. Ciò vorrebbe dire che anche l'indice di Σ_2 sarebbe almeno eguale a due. Quindi per un punto generico P del piano passerebbero almeno due curve C'_2. Si faccia allora variare P su una generica C'_1. Allora il punto P non può essere sempre punto di collegamento per una C', altrimenti il luogo del punto doppio che la C' acquista conterrebbe la C'_1, e ciò va escluso per l'arbitrarietà della C'_1 entro Σ_1. Ciò vuol dire che per un punto generico della C'_1 passerebbero almeno tre curve C', una quella collegata alla C'_1 stessa e due quelle collegate alle due C'_2. Ma dovendo essere queste tre curve linearmente indipendenti perchè le C' per ipotesi non variano in un fascio lineare, si avrebbe che tutte le curve C della rete Λ_2 passerebbero per P, cioè, facendo variare P nella C'_1 conterrebbero quella C'_1, il che è ancora assurdo. Quindi intanto: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

(3) Cfr. ad esempio, F. Enriques, *Teoria delle superficie raz.*, pag. 286.

Da ciò deriva che il sistema Σ_1 ad esempio: o è privo di punti base ed allora è un sistema di rette, o possiede un punto base, ed allora la generica C'_1 è in corrispondenza birazionale con gli elementi di un intorno di conveniente ordine di quel punto base, e quindi è razionale. Analogamente per la C'_2 in Σ_2.

Da ciò al solito si ricava intanto la razionalità delle curve C della rete Λ_2, non solo, ma poichè: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, e $[C'_1 \times C'_2] = 1$, si ha che il grado D della rete è eguale a quattro. Ora, com'è noto, una simile rete può sempre birazionalmente trasformarsi in una rete di coniche priva di punti base, nella quale effettivamente $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$.

Possiamo a tal punto enunciare il teorema:

Teor. 2 - *Se una rete Λ_2 di curve algebriche irriducibili su un piano α contiene ∞^1 curve spezzate C' non appartenenti ad un fascio lineare, si hanno due casi possibili:*

α) *Le curve della rete sono razionali ed una componente della curva C' spezzate descrive un fascio lineare.*

β) *Le curve della rete sono ancora razionali e le componenti delle curve spezzate C' descrivono un unico sistema razionale. In tal caso la rete Λ_2 ha grado quattro.*

3. - Sia ora Λ_r un sistema lineare di ∞^r curve algebriche irriducibili C su un piano α, contenente ∞^{r-1} curve spezzate C'. Per $r = 2$ la sua caratterizzazione è esaurita dai teoremi precedenti. Supponiamo quindi: $r > 2$.

Le curve del sistema Λ_r che soddisfano ad $r - 2$ arbitrarie condizioni lineari formano allora una rete, e per questa si verificheranno le ipotesi dei Teor. 1 e 2, in quantochè essa contiene ∞^1 curve spezzate. Pertanto o le componenti delle C' nella rete descrivono un sistema lineare e si hanno allora due casi.

Nel primo caso quelle componenti devono variare secondo una involuzione in un fascio, ed allora naturalmente tutte le ∞^{r-1} C' devono essere composte con una g_k^{r-1} entro le curve di un fascio. Se si fa l'immagine proiettiva del sistema Λ_r si ottiene in uno S_r una superficie conica ([4]) le cui rette si rappresentano nelle curve del fascio, in modo che la superficie conica rappresenta la involuzione associata al sistema lineare: ai gruppi di curve della g_k^{r-1} corrispondono le sezioni iperpiane del cono con gli S_{r-1} per il suo vertice.

Nel secondo caso una componente delle curve spezzate contenute in una rete generica del Λ_r deve essere fissa entro quella rete, e quindi deve essere fissa per tutte le C' del Λ_r; il sistema lineare Λ_r rappresenta in tal caso una rigata razionale dello S_r, ed esso sarebbe ancora birazionalmente riducibile ad un sistema ∞^r di C^n con un punto $(n-1)$ — plo.

Finalmente nel caso che le curve di quella rete siano razionali e la rete stessa sia di grado quattro, si conclude che il Λ_r è un sistema lineare di curve razionali di grado quattro, rappresentativo di una superficie di Veronese o di una sua proiezione.

Concludendo si può enunciare il teorema:

Teor. 3. - *Un sistema lineare* $\infty^r\ \Lambda_r$ *di curve algebriche irriducibili dato su un piano* α, *il quale contenga* ∞^{r-1} *curve spezzate può presentare due soli casi:*

a) *Le curve spezzate ammettono una componente (o più componenti) variabile in un sistema di dimensione* $< r-1$.

b) *Il sistema* Λ_r *è un sistema di curve razionali di grado quattro.*

È questo in sostanza per $r \geq 3$ il teorema di Kronecker-Castelnuovo nella sua interpretazione piana, che qui è stato ricavato nuovamente partendo dal caso finora non studiato della rete lineare.

4. - Indichiamo ora con Γ_r un sistema algebrico ∞^r di curve piane algebriche d'ordine n ed irriducibili, ossia l'insie-

([4]) Ciò segue dal fatto che per ogni curva dello S_r immagine di una componente C_1' devono passare ∞^{r-2} sezioni iperpiane, e quindi quella curva deve essere una retta. Inoltre poichè la sezione iperpiana spezzata non può avere punti multipli variabili deve appunto trattarsi di un cono.

me delle curve rappresentate su un piano $(y_0\, y_1\, y_2)$ dalle equazioni:

$$\begin{cases} f(y_0\, y_1\, y_2\,;\, t_0, \ldots, t_{r+1}) = 0 \\ \phi(t_0, t_1, \ldots, t_{r+1}) = 0 \end{cases}$$

dove f e ϕ siano polinomi irriducibili e le t_i parametri omogenei.

L'equazione: $\phi(t_i) = 0$ rappresenta in un certo spazio $S_{r+1}\,[t_0, \ldots, t_{r+1}]$ una forma W_r irriducibile. Si supponga ancora $r > 3$.

Sia $P_0\,(t_i^{(0)})$ un punto semplice della W e sia C_0 la curva associata nel sistema Γ_r. Si può allora associare ad ogni arco analitico γ (in particolare algebrico) di W uscente da P_0 un sistema $\infty^1\, \gamma^*$ contenuto in Γ_r analitico (in particolare algebrico) contenente C_0. Ha quindi senso considerare sull'arco γ il punto prossimo a P_0 e quindi su Γ_r la curva prossima a C_0 nel sistema γ^*, che sarà poi, per note definizioni, la curva segante su C_0 il gruppo caratteristico associato al sistema γ^*. Le stesse elementari *considerazioni di carattere differenziale* (5) *che mostrano che il gruppo caratteristico dipende* solo dalla tangente all'arco γ in P_0, fanno vedere che le curve C prossime a C_0 formano una varietà razionale ∞^{r-1} in corrispondenza biunivoca con le direzioni tangenziali di W intorno a P_0, e dovendo esse segare una serie lineare su C_0 (che è supposta curva semplice di Γ_r) quel sistema di curve prossime è anzi un sistema lineare in piccolo che indicheremo con $\Lambda_{r-1}\,(C_0)$.

Tali osservazioni assicurano dunque intanto la possibilità di approssimare un sistema algebrico nell'intorno di una sua curva semplice, mediante un sistema lineare, che si potrebbe chiamare lineare tangente al Γ_r nella sua curva C_0, con un ovvio traslato del significato sul modello rappresentativo.

Si supponga ora che il sistema Γ_r contenga, sempre nella ipotesi $r > 3$, ∞^{r-1} curve spezzate C formanti un sistema algebrico Σ_{r-1} entro Γ_r, e per modo inoltre che la generica curva

(5) Cfr. F. Severi, *Sul teorema fondam. dei sistemi continui di curve*, Annali di Mat., 1944.

del Σ_{r-1} sia semplice per il Γ_r, cioè che la varietà W_{r-1} immagine delle C' spezzata entro la W_r immagine delle C del Γ_r sia semplice per la W_r stessa ([6]). La varietà W'_{r-1} potrà essere irriducibile o no, e nella seconda alternativa penseremo senz' altro che il simpolo W'_{r-1} indichi una sua qualsiasi componente irriducibile; pura o no, nel qual caso trascureremo le eventuali componenti di dimensione $< r-1$.

Si consideri in tali ipotesi un punto P_0 di W'_{r-1}, cui resterà associata una curva C'_0 del sistema Σ_{r-1}. Avrà allora senso considerare il sistema tangente, che sarà un sistema lineare di curve contenente le curve C' prossime a C'_0 in Σ, sistema che sarà contenuto nel sistema tangente a C'_0 entro il Γ_r, e che diremo $\Lambda_{r-2}(C'_0)$.

Ci troviamo dunque nella situazione che l'intorno di una curva spezzata del sistema algebrico Γ_r è dato da un «elemento» di sistema lineare ad $r-1 > 2$ contenente ∞^{r-2} curve spezzate con $r-2>1$.

È ovvio che per l'elemento di sistema lineare $\Lambda_{r-1}(C'_0)$ continuano a valere i risultati che abbiamo già dimostrato per un sistema lineare finito nelle analoghe condizioni, in quantochè si tratta di proprietà di pura natura differenziale che si possono agevolmente esprimere per curve prossime.

Infatti è ancora vero che le curve dell'elemento $\Lambda_{r-1}(C'_0)$ spezzandosi acquistano dei punti doppi, e ne possono acquistare od uno o più.

Nel primo caso si avranno due possibilità, o le due componenti ([7]) delle curve spezzate prossime a C'_0 descrivono due differenti sistemi, e ciò, dato che le curve spezzate devono variare anch' esse in un elemento lineare, potrà essere solo se una di esse descrive un sistema di dimensione zero, cioè è una componente fissa, il che a sua volta data la genericità di C'_0 entro

([6]) Tale ipotesi, soddisfatta certo nelle applicazioni che faremo, non è in certo senso indispensabile, ma non è il caso di impostare discussioni delicate per una estensione di scarso valore.

([7]) Si noti che avendo la C' acquistato un solo punto doppio le componenti non possono essere più di due.

Σ_{r-1} può succedere solo se in Σ_{r-1} una delle due componenti descrive un sistema di dimensione inferiore ad $r-1$, ed in tal caso le curve prossime a C'_0 in Γ_r possono rappresentarsi sulle sezioni iperpiane di una rigata dello S_{r-1} prossime ad una sezione iperpiana passante per una retta della rigata, senza che nulla si possa dire del genere delle C.

Ovvero le due componenti variano in uno stesso sistema lineare nel qual caso due curve spezzate hanno nel Λ_{r-1} (C'_0) quattro intersezioni fisse nel punto doppio acquisito, e quindi due curve generiche del Λ_{r-1} (C'_0) avranno quattro intersezioni variabili, cioè il sistema lineare tangente a Γ_r in C'_0 avrà grado quattro. Ne segue che le C prossime a C'_0 dovranno bisecare le componenti delle curve spezzate, ma dovendo esse passare semplicemente pel punto doppio acquisito dalle C', una sola di queste intersezioni è variabile, cosicchè quelle C unisecano le componenti delle C' che risultano quindi razionali, e razionali saranno allora le stesse curve C prossime a C_0.

In tale caso dunque il sistema Γ_r è nell'intorno di ogni sua curva spezzata approssimabile con un sistema lineare tangente di curve razionali.

Si conclude da ciò che nel sistema Γ_r tutte le ∞^r curve sufficientemente prossime alle curve spezzate sono razionali, e data l'algebricità del sistema, che tutte le sue curve sono razionali.

Nella ipotesi invece che le $\bar{C}$ spezzandosi abbiano acquisito più punti doppi, il sistema lineare tangente a Γ_r in C'_0, può rappresentarsi in uno spazio lineare S_{r-1} in una superficie che dovrà ammettere ∞^{r-2} iperpiani più che tangenti, e che non potrà quindi essere che un cono, e la rappresentazione sarà tale che alle curve di Γ_r prossime a C'_0 corrisponderanno le sezioni iperpiane con iperpiani pel vertice del cono prossimi ad uno di essi: il che è tutto pressapoco immediato dopo quanto precede. Tali deduzioni possono allora tradursi nel seguente teorema:

TEOR. 4. – *Dato un sistema algebrico Γ_r irriducibile di curve C irriducibili e algebriche, contenente ∞^{r-1} spezzate C' tale che la generica curva spezzata sia sem-*

plice per il Γ_r l' insieme delle ∞^{r-1} curve prossime ad una generica curva spezzata presenta le possibilità:

a) *Esso è un elemento di un sistema lineare di curve razionali di grado quattro, ed in tal caso le curve del Γ_r sono tutte razionali.*

b) *Esso è un elemento di sistema lineare immagine proiettiva delle sezioni iperpiane di una rigata in uno S_{r-1} fatte con iperpiani per una retta della rigata prossime ad una di esse, che se la curva spezzata acquista più di un punto doppio è un cono, le sezioni essendo allora fatto con iperpiani pel vertice del cono prossimi ad uno di essi. Entrambi questi casi sono caratterizzati dal fatto che una componente descrive un sistema di dimensione inferiore ad $r-1$.*

Tale teorema specifica dunque la natura dell' intorno di una curva spezzata entro un sistema algebrico Γ_r contenente ∞^{r-1} curve spezzate, e dà quindi una caratterizzazione «in piccolo» del Γ_r. Esso è da ritenersi fondamentale per le applicazioni che seguono, intese a dimostrare il proficuo e facile impiego, oltre che per il loro proprio interesse.

5. - Una prima semplice applicazione, che è tuttavia il caso di fare per completezza, è la dimostrazione del teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO nella sua interpretazione spaziale.

Sia F una superficie della S_r che ammetta ∞^{r-1} curve sezioni spezzate. Da uno S_{r-3} generico dello S_r si proietti il sistema delle curve sezioni di F su un piano α. Si otterrà su α un sistema algebrico Γ_r di curve C^* (8), tali che la generica C^* è la proiezione *semplice* di una curva C sezione iperpiana di F, ed inoltre sul sistema Γ_r vi saranno ∞^{r-1} curve spezzate C'^*. Quindi saranno applicabili le proposizioni del teorema 4, e si potrà dire che o le curve del sistema sono razionali, e due curve prossime hanno quattro intersezioni, nel qual caso la F risulta una superficie a curve sezioni razionali, e tale che due piani

(8) Indicheremo costantemente con asterischi le proiezioni piane di figure dello S_r.

prossimi hanno sulla loro retta intersezione quattro punti in comune con la superficie, cioè la F stessa ha ordine quattro, e quindi coincide con la superficie di Veronese ovvero con una sua proiezione.

Ovvero per una componente delle curve spezzate passano ∞^{r-2} iperpiani e quindi quella componente è una retta e la F risulta una semplice rigata, o, infine, la F ammette ∞^{r-1} iperpiani più che tangenti e non può essere altro che un cono.

Risultati questi che ridanno appunto il ben noto enunciato, approfondito, del teorema di Kronecker-Castelnuovo.

6. - Consideriamo ora una varietà algebrica irriducibile d'ordine n ad r dimensioni, che per comodità supponiamo senz'altro immersa in uno S_{r+1}, e su di essa il sistema ∞^{ρ} con $\rho = 3(r-1)$ delle sue curve sezioni con i piani dello S_{r+1}. Si supponga che fra queste ve ne siano ∞^{s} spezzate non appartenenti ad uno spazio di dimensione inferiore ad $r+1$. Se si verificasse questa seconda ipotesi si seghi con quello S_t, con t minimo, la V_r, ed allora o la sezione risulta una forma spezzata dello S_t, ovvero la forma si trova nelle condizioni della V_r. Pertanto l'ipotesi esclude soltanto il caso in cui le sezioni spezzate siano tutte quelle di uno S_t, con $t < r+1$.

Naturalmente il numero s dovrà essere tale che: $2 \leq s < \rho$. Si proietti ora il sistema delle curve C considerato da uno S_{r-2} generico su un piano α. Si otterrà su α un sistema Γ_{ρ} algebrico di curve irriducibili contenente ∞^{s} curve spezzate. S'imponga alle curve C^* del Γ_{ρ} di possedere oltre gli eventuali che già abbiano, $\rho - s - 1$ punti doppi. Si otterrà su α un sistema Γ_{s+1} ancora algebrico costituito di curve irriducibili (perchè Γ_{ρ} contiene ∞^{s} e non più curve spezzate) ed inoltre il sistema Γ_{s+1} deve ancora contenere entro se il sistema Σ_s delle ∞^{s} curve spezzate. Infatti una curva del Γ_{ρ} si potrà far spezzare in seguito alla imposizione di successivi punti doppi, e quindi imponendo un ulteriore punto doppio alle curve del Γ_{s+1} si dovranno trovare anche le curve del Σ_s.

Ci troviamo dunque di fronte ad un sistema algebrico Γ_{s+1} contenente ∞^{s} curve spezzate che è appunto nella situazione del teorema 4, e si potrà dire che: o una componente della generica curva spezzata fa parte di infiniti piani, e quindi è una retta, che risulterà variabile in un sistema ∞^{s-r+1}, ovvero il sistema Γ_{s+1} è un sistema di curve razionali, e quindi la V_r è a curve sezioni di genere: $p = \rho - s - 1 = 3r - s - 4$. Inoltre se si considerano due piani per una retta dello S_r prossimi fra loro, la retta loro intersezione taglierà la V_r in tanti punti quante sono le intersezioni di due curve prossime, che sono quattro più quelle acquisite per i $\rho - s - 1$ punti doppi imposti, cioè in tutto: $4 + 4(\rho - s - 1) = 4(\rho - s)$. Si conclude col teorema:

Teor. 5. - *Le V_r algebriche, irriducibili, dello S_{r+1}, per $r > 2$, con ∞^s curve sezioni piane spezzate non appartenenti ad uno S_t con $t < r + 1$ e per $2 < s < \rho = 3(r - 1)$ sono: o V_r contenenti ∞^{s-r+1} rette, o $V_{r\,4(\rho-s)}$ a curve sezioni piane di genere $p = \rho - s - 1$, non essendo naturalmente escluso che i due casi si verifichino insieme.*

Si noti ancora che se una V_r dello S_{r+1} ha curve sezioni piane di genere $p = \rho - s - 1$, e se si considerano i piani che sono p - tangenti si ottiene un sistema di ∞^{s+1} curve razionali, che contiene quindi in corrispondenza ai piani $(p + 1)$ — tangenti un sistema ∞^s di curve spezzate, e quindi si trova pel teorema precedente che essa può avere al più ordine $4(\rho - s)$, e che se l'ordine è inferiore a questo essa contiene necessariamente almeno $\infty^{s-r+1} = \infty^{2r-p-3}$ rette. Inoltre questa seconda possibilità si può avere ovviamente solo se $2r - p - 3 \geq 0$, cioè $p \leq 2r - 3$, ossia se: $2r - 3 < p \leq 3r - 6$ si può presentare solo il primo caso, e quindi la V_r deve necessariamente avere ordine eguale a $4(\rho - s)$. Ciò conduce ad enunciare ancora il teorema:

Teor. 6. - *Le V_r^n dello S_{r+1} a curve sezioni di genere p tale che: $2r - 3 < p \leq 3r - 6$ hanno necessariamente l'ordine: $n = 4(p + 1)$, e se $p \leq 2r - 3$ possono avere al più quell'ordine, o un ordine inferiore qualora esse contengano almeno ∞^{2r-p-3} retta.*

7. - Vale la pena di segnalare il caso particolare dei teoremi 5 e 6 per $s = 2(r - 1)$. I due teoremi riuniti in un solo enunciato affermano allora che:

TEOR. 6^1. - *Se una V_r dello S_{r+1} con $r \geq 2$, ha $\infty^{2(r+1)}$ curve sezioni piane spezzate o essa è una V_r rigata dello S_{r+1} o è una $V_r^{4(r-1)}$ dello S_{r+1} a curve sezioni di genere $r-2$, e viceversa le V_r^n dello S_{r+1} a curve sezioni di genere $r-2$ hanno al più l'ordine $n = 4(r-1)$ e se hanno ordine inferiore sono necessariamente rigate.*

Caso ben speciale di questo teorema è il teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO, nonchè i ben noti risultati sulle V_3 a curve sezioni ellittiche. Per queste il teorema garantisce che le V_3^n dello S_4 con ∞^4 curve sezioni spezzate sono o rigate o a curve sezioni ellittiche, e che una V_3^n a curve sezioni ellittiche non può avere ordine superiore ad otto, e che se ha ordine minore di otto è necessariamente rigata.

8. - Esponiamo infine un altro tipo di questione che si risolve coi teoremi di questa nota.

Sia data una V_3 algebrica di uno S_4 con ∞^3 curve sezioni spezzate in tre componenti.

Si proietti ancora da una retta dello S_4 su un piano α generico il sistema delle curve sezioni C della V_3. Si trova sul piano α un sistema algebrico ∞^6 Γ_6 di curve C^* irriducibile, contenente ∞^3 curve C'^* spezzate in tre componenti.

S' impongono alle C^* altri due punti doppi oltre quelli eventualmente posseduti.

Si troverà un sistema ∞^4 di curve Γ_4, che non possono essere spezzate in più di due componenti, che conterrà il sistema delle C'^*. Inoltre le curve di Γ_4 non possono essere irriducibili altrimenti con la imposizione di un solo punto doppio ne acquisterebbero più di uno e poichè le curve con tre punti doppi in più della generica provengono dai piani tritangenti la V_3, tutti i piani tritangenti sarebbero quadritangenti, e ciò è escluso da un mio risultato dimostrato altrove (9). Ne segue che le

(9) Cfr. la mia nota: «*Sulle varietà pluririgate di tre dimensioni*», e «*Aggiunta etc.....*», Rendic. del Sem. Mat. della Univ. di Padova, pp. 172 e sg.

Col nome di pluririgate improprie designo appunto quelle V_3 che contengono ∞^1 quadriche formanti un sistema algebrico d'indice uno.

curve di Γ_4 devono essere necessariamente spezzate in due sole componenti, e con analoghi ragionamenti si vede che il Γ_4 sarà contenuto in un sistema Γ_5 di curve irriducibili.

A questo sistema Γ_5 è allora applicabile il teorema 4, e quindi o la V_3 è rigata o è a curve sezioni ellittiche (cfr. teor. 5). Nel primo caso si trascuri la componente rettilinea. La curva residua varierà nel Γ_4 e sarà in esso generalmente irriducibile per quanto si è visto sopra. Ma allora si ha un sistema $\overline{\Gamma}_4$ (quello descritto dalla parte residua irriducibile dopo tolta la componente rettilinea) che ancora contiene ∞^3 curve spezzate, e quindi quella componente o è razionale o essa si spezza ancora ∞^3 volte in una retta ed in una parte residua. Nel primo caso la V_3 è quindi una rigata ma ancora ellittica, e nel secondo caso è una V_3 pluririgata. Ma allora, come consegue da un mio teorema nella V_3 pluririgate [10], o essa è una pluririgata propria ed allora la V_3 è ancora a curve sezioni ellittiche, ovvero è una pluririgata impropria ed allora contiene un sistema algebrico ∞^1 di quadriche. Concludendo abbiamo dimostrato il teorema:

Teor. 7. - *Se una V_3 dello S_4 ammette ∞^3 sezioni piane spezzate in tre componenti essa è una V_3 a curve sezioni ellittiche, escluso il caso che essa contenga un sistema d'indice uno di quadriche.*

Tale teorema è suscettibile di una estensione analoga a quella che i teoremi 5, 6 e 6′ danno del teorema di Kronecker - Castelnuovo, che richiede però una premessa sulla estensione dei teoremi sulle V_3 pluririgate alle V_r pluririgate con $r > 3$, che perciò lascio ad altra ricerca, tanto più che le applicazioni già esposte sono certo sufficenti a prospettare la fecondità applicativa del teorema sulla caratterizzazione intorniale dei sistemi algebrici.

Altre applicazioni troveranno pure sede più opportuna nello studio che sto compiendo sulle varietà possedenti una infinità di opportuna dimensione di curve di genere convenientemente basso.

(10) Vel. nota prec.