RENDICONTI del SEMINARIO MATEMATICO della UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di bicelle

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 371-395

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__371_0>

GRADO TOPOLOGICO E TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI PER TRASFORMAZIONI PLURIVALENTI DI BICELLE

Memoria (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Pisa*).

Sono ormai celebri i risultati di BROUWER sull' esistenza di almeno un punto unito in una trasformazione continua univalente di una bicella in sè [1]. J. VON NEUMANN [2] ha messo in rilievo per primo, l' interesse che presenta il problema dell' esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti semicontinue superiormente [3].

Più recenti sono le ricerche e i risultati conseguiti da S. EILEMBERG e D. MONTGOMERY e da O. H. HAMILTON [4] nel caso di trasformazioni semicontinue di n-celle in sè e in generale tali che l' immagine di un punto sia un insieme chiuso costituito da

(*) Pervenuta in Redazione il 2 giugno 1950.

(1) Per la bibliografia sull' argomento si veda: G. SCORZA DRAGONI: *Criteri per l' esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [Ann. di Mat. pura e appl., (4) - XXV - 1946, pp. 43–65].

(2) J. VON NEUMANN - O. MORGENSTERN: *Theory of games and economic behaviour* - Princeton 1947, pag. 154; J. VON NEUMANN, *Ueber ein ökonomisches Gleichungssistem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes* [Erg. Math. Kolloqu., vol. 8 (1937)].

(3) Una trasformazione $\boldsymbol{T}$ tra punti P di un insieme chiuso E e insiemi limitati e chiusi di uno spazio $S^{(n)}$ (n–dimensionale) dicesi semicontinua superiormente in E se per ogni punto P_0 di accumulazione di E e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\boldsymbol{T}(P) \subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon$ *definitivamente* al tendere di P a P_0 in E. Si è indicato con $[\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon$ l' ε - intorno n - dimensionale aperto di $\boldsymbol{T}(P_0)$.

(4) S. EILEMBERG - D. MONTGOMERY: *Fixed point theorems for multivalued trasformations* [American Journ. of Math. - LXVIII - 1946, pp. 214–222]; O. H. HAMILTON: *A fixed point theorem for upper semicontinuous trasformation of n cells for which the images of points are non - acyclic continua*: [Duke Math. Journ. - 14 - 1947, pp. 689–693].

un solo *componente* (5). E. MAGENES (6), studiando un problema proposto da R. CACCIOPPOLI e di cui si è interessato anche G. SCORZA DRAGONI (7), è stato portato a generalizzare il problema impostandolo nei seguenti termini:

Sia $E^{(n)}$ una n-cella di uno spazio $S^{(n)}$ reale, euclideo, n-dimensionale; T una trasformazione dei punti di $E^{(n)}$ soddisfacente alle seguenti condizioni:

α') *per ogni* $P \in E^{(n)}$, $T(P)$ *è un insieme chiuso contenuto in* $E^{(n)}$;

α'') T *è semicontinua superiormente*;

α''') *se* $P_0 \in E^{(n)}$ *e* τ *è una porzione chiusa, non vuota e isolata di* $T(P_0)$ (*cioè tale che sia chiuso anche* $T(P_0) - \tau$) *la distanza di* $T(P)$ *da* τ *tende a zero per* $P \to P_0$ *in* $E^{(n)}$.

Quali ulteriori condizioni conviene imporre alla T affinchè ammetta in $E^{(n)}$ almeno un punto unito, cioè un punto $P^* \in E^{(n)}$ e tale che $P^* \in T(P^*)$?

Le ipotesi α'), α''), α''') conducono all'esistenza di almeno un punto unito nel caso che $E^{(n)}$ sia di dimensione $n = 1$ (8); si dimostrano però insufficienti non appena $E^{(n)}$ ha dimensione $n > 1$ come risulta da un esempio costruito da HAMILTON (9) nel caso $n = 2$ e facilmente estendibile per $n > 2$.

Ulteriori condizioni di «*aciclicità*» degli insiemi $T(P)$ considerate da EILEMBERG e MONTGOMERY (10) nel caso che $T(P)$

(5) Dicesi componente (secondo HAUSDORFF) di un insieme chiuso X, l'insieme somma di tutte le parti connesse di X che contengono un medesimo punto P di X.

(6) E. MAGENES: ***Proprietà topologiche di certi insiemi di punti e teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una r-cella in sè***: [Giornale di Mat. di Battaglini - S. N., vol. 78 (1948-49) pp 168-181].

(7) G. SCORZA DRAGONI: ***Su una questione topologica*** [Giorn. di Mat. di Battaglini - S. N., vol. 78 (1948-49) pp. 121-127]; nonchè: ***Alcune proprietà di struttura per certi insiemi di punti*** [Ann. di Mat. pura e appl., (IV) - vol. XXVIII (1949) pp. 221-229].

(8) V. loc. cit. in (6), pag. 175.

(9) V. loc. cit. in (4) per secondo, pag. 692.

(10) V. cit. in (4) per primo.

sia costituito da un solo componente e da E. MAGENES ([11]) nel caso di un numero finito, costante, di componenti, conducono all'esistenza di almeno un punto unito.

A dissipare il dubbio che le condizioni α'), α''), α'''), associate ad una opportuna condizione di *aciclicità* di $\boldsymbol{T}(P)$ potessero esser sufficienti a garantire l'esistenza di almeno un punto unito, in questo lavoro verrà dato un esempio di trasformazione *continua* ([12]) di una bicella E in sè, tale da far corrispondere ad ogni punto di E un insieme di al più *tre* punti distinti, priva di punti uniti. Successivamente si stabiliranno opportune ipotesi che permetteranno di estendere alle trasformazioni plurivalenti di un certo tipo, la nozione di «*grado topologico*» relativo a un ciclo, già introdotta per le trasformazioni continue univalenti. Infine si darà un teorema d'esistenza di punti uniti per certe trasformazioni semicontinue superiormente di una bicella. In particolare, se per ogni punto P l'insieme trasformato $\boldsymbol{T}(P)$ contiene al più *due* punti, e la trasformazione è continua, questa possiede almeno un punto unito.

1. - Esempio di una trasformazione T plurivalente e continua, di una bicella in sè, priva di punti uniti. - La bicella E sia rappresentata dal cerchio $x^2+y^2 \leq 1$. Definiamo la trasformazione T nel primo quadrante di E: $x \geq 0$; $y \geq 0$, facendo corrispondere al punto $P \equiv (x, y)$ l'insieme $T(P)$ dei punti Q_1, Q_2, Q_3 rispettivamente di coordinate:

([11]) V. loc. cit. in (6), nonchè: E MAGENES: *Un' osservazione sui teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una n-cella.* (Questi Rendiconti pp. 108-113).

([12]) Qui la *continuità* va intesa nel senso usuale della teoria degli insiemi; vale a dire, per ogni punto $P_0 \in E^{(n)}$ sia $\lim\limits_{P \to P_0} \boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{T}(P_0)$; è chiaro che una trasformazione continua è anche semicontinua superiormente.

$$
\begin{aligned}
&Q_1: \ x_1 = 8x^2(1 - x^2 - y^2) - 1 \,, && y_1 = +\sqrt{1 - x_1^2}\,; \\
(1)\quad &Q_2: \ x_2 = 8x^2(1 - x^2) - 1 \,, && y_2 = -\sqrt{1 - x_2^2}\,; \\
&Q_3: \ x_3 = \begin{cases} +1 & \text{per } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \\ 8x^2(1 - x^2) - 1 & \text{per } \sqrt{\frac{1}{2}} < x \leq 1 \end{cases} , && y_3 = -\sqrt{1 - x_3^2}\,.
\end{aligned}
$$

Si noti che i tre punti Q_1, Q_2, Q_3 sono, separatamente considerati, funzioni definite e continue in tutto il primo quadrante di E. Estendiamo ora la definizione di $T(P)$ in tutto il cerchio E in modo che, se P e P' sono punti di E simmetrici rispetto all'asse delle x (oppure y), gli insiemi $T(P)$ e $T(P')$ stiano nella stessa relazione di simmetria rispetto all'asse delle x (o rispettivamente y). Tale estensione è possibile e risulta continua su tutto il cerchio E, poichè ai punti di E appartenenti agli assi corrispondono insiemi $T(P)$ simmetrici rispetto ai medesimi assi. Infatti per $y = 0$ e $0 \leq x \leq 1$, le (1) danno:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_2 \,, \quad y_1 = -y_2 \,; \\
(2)\quad &\left.\begin{aligned} x_3 &= +1 \\ y_3 &= \ \ 0 \end{aligned}\right\} \text{per } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{2}}\,; \quad \left.\begin{aligned} x_3 &= x_2 \\ y_3 &= y_2 \end{aligned}\right\} \text{per } \sqrt{\frac{1}{2}} \leq x \leq 1
\end{aligned}
$$

e per $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$ danno invece:

$$
(2')\quad \begin{aligned} x_1 &= -1 \,, & x_2 &= -1 \,, & x_3 &= +1 \\ y_1 &= \ \ 0 \,, & y_2 &= \ \ 0 \,, & y_3 &= \ \ 0 \end{aligned}
$$

e le (2) e (2′) rappresentano insiemi simmetrici rispetto agli assi x e y rispettivamente (naturalmente punti coincidenti vanno considerati come un sol punto).

La trasformazione T così definita è priva di punti uniti. Osserviamo infatti che l'insieme $T(P)$ variando P in E, sta tutto sulla frontiera γ di E, poichè dalle (1) segue $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = 1$; quindi, se vi fossero punti uniti, dovrebbe trovarsene almeno uno con le coordinate soddisfacenti alle $x^2 + y^2 = 1$; $x \geq 0$; $y \geq 0$. E ciò per il modo stesso con cui si è definita la $T(P)$. Si vede subito che questo non è possibile; infatti, sull'arco di γ contenuto nel primo quadrante risulta $x_1 = -1$, $y_1 = 0$; $x_2 \leq 0$; $y_3 \leq 0$ e gli unici punti che possono essere uniti sono quindi $(1, 0)$ e $(0, 1)$; ora sia al primo che al secondo corrisponde l'unico punto $(-1, 0)$.

La T così definita, come del resto ogni trasformazione continua, soddisfa alle condizioni α'), α'') e α'''). Si noti che l'insieme $T(P)$ variando P in E è costituito da un numero limitato di punti (non superiore a tre) e come tale è un insieme *aciclico*. Si vedrà in seguito che una trasformazione continua al più bivalente di una bicella in sè ammette sempre almeno un punto unito.

2. - Considerazioni preliminari. - Prima di fissare le condizioni da imporre ad una trasformazione plurivalente $\boldsymbol{T}$, nell'intento di definirne il *grado* relativo a un ciclo, conviene prender le mosse da un esempio particolarmente semplice il quale giustificherà una ipotesi che altrimenti potrebbe apparire artificiosa.

Si abbia una equazione algebrica nel campo complesso

$$z^n + a_1(p)\, z^{n-1} + \ldots + a_n(p) = 0 \tag{3}$$

i cui coefficienti $a_j(p)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ siano funzioni continue del parametro complesso p. Facciamo corrispondere a p l'insieme $\boldsymbol{T}(p)$ delle radici della (3). La $\boldsymbol{T}$ risulta allora una trasformazione continua plurivalente. Se A è un insieme aperto del piano π dei numeri complessi, la cui frontiera non abbia punti comuni con $\boldsymbol{T}(p_0)$ ($p_0 \in \pi$, prefissato arbitrario) esiste un intorno σ di p_0, tale che variando p in σ, la somma delle molteplicità delle radici $\boldsymbol{T}(p)$ che cadono in A rimane costante. Ebbene, è proprio di una tale proprietà che ci serviremo, trasportandola in casi più generali.

In questo lavoro ci limiteremo, per brevità, alla considerazione di trasformazioni di celle o complessi di celle bidimensionali nel piano $S^{(2)}$. L'estensione al caso n - dimensionale sarà oggetto di una prossima nota.

3. – Nel seguito considereremo esclusivamente una trasformazione plurivalente $\boldsymbol{T}$ dei punti P di una bicella o di un complesso di celle bidimensionale E appartenente al piano reale, euclideo $S^{(2)}$, per cui siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

I. *l'immagine* $\boldsymbol{T}(P)$ *di* P *sia, per ogni* $P \in E$, *un insieme limitato e chiuso del piano* $S^{(2)}$.

II. *il complementare*, $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(P)$ *di* $\boldsymbol{T}(P)$, *per qualunque* $P \in E$ *sia connesso*;

III. $\boldsymbol{T}$ *sia superiormente semicontinua in tutto* E (tale cioè che per ogni $P_0 \in E$ e per qualunque $\varepsilon > 0$ esista un intorno σ di P_0 per cui si abbia $\boldsymbol{T}(P) \subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon$ [13] allorchè $P \in \sigma \cdot E$).

Se $P \in E$, chiameremo *pezzo* di $\boldsymbol{T}(P)$ una parte chiusa τ di $\boldsymbol{T}(P)$ tale che sia chiusa anche la parte complementare $\boldsymbol{T}(P) - \tau$; potendo τ in particolare coincidere con $\boldsymbol{T}(P)$ o con l'insieme vuoto. Ciò posto, supporremo ancora che

IV. *ad ogni punto* $P \in E$ *corrisponda una funzione numerica* $\boldsymbol{F}_P(\tau)$ *additiva, dei pezzi* τ *di* $\boldsymbol{T}(P)$, *tale quindi che se* τ' *e* τ'' *sono due pezzi disgiunti di* $\boldsymbol{T}(P)$ *si abbia* $\boldsymbol{F}_P(\tau' + \tau'') = \boldsymbol{F}_P(\tau') + \boldsymbol{F}_P(\tau'')$.

Osserviamo che se $P_0 \in E$ ed A è un insieme aperto di $S^{(2)}$ la cui frontiera non ha punti comuni con $\boldsymbol{T}(P_0)$ e se ε è un numero positivo minore della distanza tra $\boldsymbol{T}(P_0)$ e la frontiera di A, per la ipotesi III esiste un intorno σ di P_0 tale che per $P \in \sigma \cdot E$ si abbia $\boldsymbol{T}(P) \subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon$. È allora chiaro che

(13) Se X è un insieme di punti di $S^{(2)}$ (o anche un punto) col simbolo $[X]_\varepsilon$ essendo ε un numero positivo, indichiamo l' ε – intorno bidimensionale aperto di X, ossia l'insieme dei punti di $S^{(2)}$ che distano da X meno di ε.

$A \cdot \boldsymbol{T}(P)$ è un *pezzo* di $\boldsymbol{T}(P)$ e avrà senso la espressione $\boldsymbol{F}_P[A \cdot \boldsymbol{T}(P)]$.

Noi supporremo quindi che valga una proprietà analoga a quella messa in rilievo nel numero precedente e precisamente:

V. *se A è un qualunque insieme aperto di $S^{(2)}$ la cui frontiera è disgiunta da $\boldsymbol{T}(P_0)$, esista un intorno σ di P_0 tale che per ogni $P \in \sigma \cdot E$ sia $\boldsymbol{F}_P[A \cdot \boldsymbol{T}(P)] = \boldsymbol{F}_{P_0}[A \cdot \boldsymbol{T}(P_0)]$.*

4. - Se P è un punto di E, e γ è un *ciclo continuo* (14) 1-dimensionale appartenente a $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(P)$, l'insieme aperto $S^{(2)} - \bar{\gamma}$ (15) sarà costituito da al più una infinità numerabile di componenti aperti, connessi e disgiunti $\{A_k\}$. I punti di $\boldsymbol{T}(P)$ appartenenti a un medesimo componente A_k formeranno un *pezzo* $\tau_k = A_k \cdot \boldsymbol{T}(P)$ di $\boldsymbol{T}(P)$. Dimostriamo che i pezzi τ_k non vuoti sono in numero finito; infatti se δ e la distanza (certamente positiva) di $\boldsymbol{T}(P)$ da $\bar{\gamma}$, i δ-intorni aperti $[\tau_k]_\delta$ sono privi di punti comuni a due a due, sono complessivamente limitati poichè la loro somma coincide con $[\boldsymbol{T}(P)]_\delta$, e ciascuno di essi ha misura superficiale non inferiore a quella di un cerchio di raggio δ. Il loro numero non può superare quindi $\dfrac{mis\,[\boldsymbol{T}(P)]_\delta}{\pi\,\delta^2}$.

L'insieme dei pezzi τ_k non vuoto in cui viene decomposto $\boldsymbol{T}(P)$ dal ciclo γ è dunque finito. Inoltre, l'*ordine* (16) di un

(14) Qui e nel seguito considereremo *catene continue* e *cicli continui* che saranno intesi esclusivamente nel senso di «*singuläre Kette*» e «*Geschlossene singuläre Kette*» secondo il SEIFERT-THRELFALL, Lehrbuch der Topologie - Leipzig, 1934, pp. 94-97.

(15) Se $\boldsymbol{z} = \Sigma \lambda_j \boldsymbol{z}_j$ è una *catena continua* (combinazione lineare dei *simplessi continui* $\boldsymbol{z}_j$ linearmente indipendenti), colla notazione $\bar{\boldsymbol{z}}$ indicheremo il *sostegno* di $\boldsymbol{z}$ ossia l'insieme dei punti appartenenti ai simplessi continui $\boldsymbol{z}_j$ i cui coefficienti λ_j sono diversi da zero. È chiaro che il sostegno $\bar{\boldsymbol{z}}$ di $\boldsymbol{z}$ è sempre un insieme chiuso e limitato.

(16) Cfr. P. ALEXANDROFF - H. HOPF - *Topologie* - Berlin 1935, pp. 419, 423, 458 e segg. - Per quanto il concetto di «*Stetiger Zyklus*» ivi definito non coincida, a rigor di termini, con quello da noi usato, il lettore noterà che la definizione di *ordine* di un punto rispetto a un ciclo può esser trasportata integralmente alle nostre «*Geschlossene singuläre Ketten*».

punto $Q \epsilon \tau_k$ rispetto al ciclo γ non dipende da Q poichè è $\tau_k \subset A_k$ e A_k è un componente connesso del complementare di $\bar{\gamma}$. Indicato con ν_k detto *ordine* porremo

$$(4) \qquad \omega_P(\gamma) = \sum_k \nu_k \boldsymbol{F}_P(\tau_k)$$

dove la somma va estesa a tutti i *pezzi* τ_k della menzionata decomposizione di $\boldsymbol{T}(P)$ operata dal ciclo γ.

Il numero $\omega_P(\gamma)$ non varia se P vien fatto variare su un continuo $\boldsymbol{K} \subset E$ la cui *immagine* [17] $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$ non ha punti comuni con $\bar{\gamma}$. Infatti, sia $P_0 \epsilon \boldsymbol{K}$ e A_k il componente connesso di $S^{(2)} - \bar{\gamma}$ che contiene il *pezzo* τ_k^0 di $\boldsymbol{T}(P_0)$, si abbia dunque $\tau_k^0 = A_k \cdot \boldsymbol{T}(P_0)$. Per la condizione V esiste un intorno σ di P_0 per cui, se $P \epsilon \sigma \cdot \boldsymbol{K}$, si ha

$$\boldsymbol{F}_P[A_k \cdot \boldsymbol{T}(P)] = \boldsymbol{F}_{P_0}[A_k \cdot \boldsymbol{T}(P_0)]$$

ossia, posto $\tau_k = A_k \cdot \boldsymbol{T}(P)$, anche $\boldsymbol{F}_P(\tau_k) = \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau_k^0)$ e quindi

$$\omega_P(\gamma) = \sum_k \nu_k \boldsymbol{F}_P(\tau_k) = \sum_k \nu_k \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau_k^0) = \omega_{P_0}(\gamma)$$

[17] L'immagine di un insieme $X \subset E$ che indichiamo con $\boldsymbol{T}(X)$ è l'insieme descritto da $\boldsymbol{T}(P)$ variando P in X. Se X è limitato e chiuso $\boldsymbol{T}(X)$ è pure limitato e chiuso.

Dimostriamo intanto che $\boldsymbol{T}(X)$ è limitato. Fissato un $\varepsilon > 0$ per la semicontinuità superiore di $\boldsymbol{T}$ ad ogni punto $P \epsilon X$ corrisponde almeno un intorno σ_P tale che $\boldsymbol{T}(\sigma_P \cdot X) \subset [\boldsymbol{T}(P)]_\varepsilon$. Per il teorema di Pincherle–Borel potremo scegliere in X un numero finito di punti $P_1, P_2, \ldots, P_m$ tali che i corrispondenti intorni $\{\sigma_{P_j}\}$ ricoprano tutto X. Si avrà allora: $\sum_{j=1}^{m} X \cdot \sigma_{P_j} = X$ e quindi $\boldsymbol{T}(X) = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{T}(X \cdot \sigma_{P_j}) \subset \sum_{j=1}^{m} [\boldsymbol{T}(P_j)]_\varepsilon$. Essendo limitata la somma $\sum_{j=1}^{m} [\boldsymbol{T}(P_j)]_\varepsilon$ di un numero finito di insiemi limitati, tale sarà pure $\boldsymbol{T}(X)$.

Sia ora Q^* un punto di accumulazione di $\boldsymbol{T}(X)$. Nell'intorno $[Q^*]_{\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vi sono punti di $\boldsymbol{T}(X)$; non è vuoto quindi l'insieme β_n dei punti P di X, per i quali $\boldsymbol{T}(P)[Q^*]_{\frac{1}{n}} \neq 0$. Detto P^* un punto di X tale che ogni intorno $[P^*]_\rho$ $(\rho > 0)$ abbia punti comuni con infiniti β_n, podove ν_k è l'*ordine* di un qualunque punto di A_k rispetto a γ. Concludendo, per ogni punto $P_0 \in \boldsymbol{K}$, esiste un intorno σ di P_0 tale che variando P in $\sigma \cdot \boldsymbol{K}$ il numero $\omega_P(\gamma)$ rimane costante; ma essendo $\boldsymbol{K}$ un *continuo*, $\omega_P(\gamma)$ dovrà esser costante su tutto $\boldsymbol{K}$ come si riconosce facilmente applicando il teorema di PINCHERLE - BOREL.

5. - Siano $P_0 \in E$, γ' e γ'' due cicli continui 1-dimensionali, appartenenti a $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(P_0)$. Vogliamo dimostrare la relazione:

$$\omega_{P_0}(\gamma' + \gamma'') = \omega_{P_0}(\gamma') + \omega_{P_0}(\gamma'') . \tag{5}$$

Se chiamiamo $\{\tau_k\}$, $\{\tau'_i\}$, $\{\tau''_l\}$ i sistemi di *pezzi* in cui resta decomposto $\boldsymbol{T}(P_0)$ dai cicli $\gamma' + \gamma''$, γ', γ'' rispettivamente, e ν_k, ν'_i, ν''_l gli *ordini* dei punti di τ_k, τ'_i, τ''_l relativi ai cicli corrispondenti, sarà, secondo la definizione

$$\omega_{P_0}(\gamma' + \gamma'') = \sum_k \nu_k \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau_k) , \quad \omega_{P_0}(\gamma') = \sum_i \nu'_i \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau'_i) ,$$

$$\omega_{P_0}(\gamma'') = \sum_l \nu''_l \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau''_l) .$$

tremo determinare in corrispondenza ad un $\varepsilon > 0$ arbitrario, un $\rho_0 > 0$ tale che per $P \in X \cdot [P^*]_{\rho_0}$ sia $\boldsymbol{T}(P) \subset [\boldsymbol{T}(P^*)]_{\frac{\varepsilon}{2}}$ e un intero n_0 tale che:

$$a) \ \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$b) \ \beta_{n_0} \cdot [P^*]_{\rho_0} \neq 0$$

se $\overline{P} \in \beta_{n_0} \cdot [P^*]_{\rho_0}$, sarà $\boldsymbol{T}(\overline{P}) \subset [\boldsymbol{T}(P^*)]_{\frac{\varepsilon}{2}}$ e $\boldsymbol{T}(\overline{P}) \cdot [Q^*]_{\frac{1}{n_0}} \neq 0$. Quest'ultima relazione equivale a $Q^* \in [\boldsymbol{T}(P^*)]_{\frac{1}{n_0}}$ che colla precedente ci dà:

$$Q^* \in [\boldsymbol{T}(P^*)]_{\frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{2}} \subset [\boldsymbol{T}(P^*)]_{\varepsilon} .$$

Per l'arbitrarietà di ε, tenendo presente che $\boldsymbol{T}(P^*)$ è un insieme chiuso, dovrà essere $Q^* \in \boldsymbol{T}(P^*) \subset \boldsymbol{T}(X)$. Perciò $\boldsymbol{T}(X)$, contenendo ogni suo punto d'accumulazione, è chiuso.

Posto $\tau_{kil} = \tau_k \cdot \tau'_i \cdot \tau''_l$, sarà τ_{kil} un pezzo di $\boldsymbol{T}(P_0)$ e inoltre

$$\tau_k = \sum_{il} \tau_{kil}\,, \quad \tau'_i = \sum_{kl} \tau_{kil}\,, \quad \tau''_l = \sum_{ki} \tau_{kil}$$

per cui, tenendo presente l'additività di $\boldsymbol{F}_{P_0}(\tau)$

$$\omega_{P_0}(\gamma' + \gamma'') = \sum_k \nu_k \boldsymbol{F}_{P_0}\Big(\sum_{il} \tau_{kil}\Big) = \sum_{kil} \nu_k \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau_{kil})$$

$$\omega_{P_0}(\gamma') = \sum_i \nu'_i \boldsymbol{F}_{P_0}\Big(\sum_{kl} \tau_{kil}\Big) = \sum_{kil} \nu'_i \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau_{kil}) \tag{6}$$

$$\omega_{P_0}(\gamma'') = \sum_l \nu''_l \boldsymbol{F}_{P_0}\Big(\sum_{ki} \tau_{kil}\Big) = \sum_{kil} \nu''_l \boldsymbol{F}_{P_0}(\tau_{kil})$$

le somme essendo estese a tutte le terne di indici k, i, l per cui $\tau_{kil} \neq 0$. Sommando membro a membro le ultime due delle (6) ed essendo, per l'additività dell'ordine di un punto rispetto ad un ciclo ([18]) $\nu_k = \nu'_i + \nu''_l$ (dove per ogni k, i ed l sono gli indici per cui $\tau_{kil} \neq 0$) dal confronto con la prima delle (6) si trae la (5).

È immediato pure che, se γ è un ciclo in $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(P_0)$ e $-\gamma$ è il ciclo opposto è

$$\omega_{P_0}(-\gamma) = -\omega_{P_0}(\gamma)$$

e più in generale se $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sono cicli in $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(P_0)$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ interi relativi

$$\omega_{P_0}(\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \ldots + \lambda_n \gamma_n) = \lambda_1 \omega_{P_0}(\gamma_1) + \\ + \lambda_2 \omega_{P_0}(\gamma_2) + \ldots + \lambda_n \omega_{P_0}(\gamma_n)\,.$$

([18]) V. loc. cit. in ([15]) pag. 418 formula (2) e pp. 419-423.

6. Se $\boldsymbol{H}$ è un insieme limitato e chiuso di $S^{(2)}$, il complementare $S^{(2)} - \boldsymbol{H}$ è costituito dalla somma di regioni aperte, connesse e disgiunte, delle quali una ed una sola, A, è illimitata. Un punto o un insieme contenuto in A lo diremo «*non circondato da* $\boldsymbol{H}$».

Indicheremo con $\boldsymbol{E}_0$ l'insieme dei punti uniti di E nella $\boldsymbol{T}$, cioè dei punti $P \in E$ tali che $P \in \boldsymbol{T}(P)$. Ciò posto, dimostriamo il seguente

Lemma I. - *Se P_0 è un punto di $E - \boldsymbol{E}_0$, esiste un ρ-intorno di P_0 $(\rho > 0)$, tale che ogni insieme chiuso $\boldsymbol{K} \subset E \cdot [P_0]_\rho$ è non circondato dalla propria immagine $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$.*

Per la condizione II esisterà una poligonale $\pi \subset S^{(2)} - \boldsymbol{T}(P_0)$ collegante il punto P_0 con un punto O non circondato da $\boldsymbol{T}(E)$. Se δ è la distanza $(\delta > 0)$ tra $\boldsymbol{T}(P_0)$ e π, per la condizione III esisterà un ρ-intorno di P_0, con $0 < \rho \leq \frac{\delta}{2}$, tale che per ogni punto $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ sia $\boldsymbol{T}(P) \subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_{\frac{\delta}{2}}$. Se $\boldsymbol{K}$ è un qualunque insieme chiuso contenuto in $E \cdot [P_0]_\rho$, sarà $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \subset$ $\subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_{\frac{\delta}{2}}$. Preso un punto P qualunque di $\boldsymbol{K}$, esso potrà congiungersi con O mediante la poligonale $\pi' = \pi + P_0 P$ ottenuta da π aggiungendovi il segmento rettilineo $P_0 P$. I punti di $P_0 P$ distano da P_0, e quindi da π meno di $\rho \leq \frac{\delta}{2}$. La poligonale π' è perciò esterna all'insieme $[\boldsymbol{T}(P_0)]_{\frac{\delta}{2}}$ e a maggior ragione esterna a $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$. Ma O essendo *non circondato* da $\boldsymbol{T}(E)$ sarà *non circondato* da $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$ poichè $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K}) \subset \boldsymbol{T}(E)$. L'altro estremo P della poligonale π' dovendo quindi appartenere allo stesso componente connesso di $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$ che contiene O, sarà esso pure *non circondato* da $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{K})$. Dall'esser P arbitrario in $\boldsymbol{K}$ segue l'asserto.

7. - Sia $z = \sum_i \lambda_i z_i$ una r-catena continua $(r = 1, 2)$ appartenente a $E - \boldsymbol{E}_0$. Diremo che z è una *catena normale* quando ogni punto $P \in \bar{z}$ soddisfa alla seguente proprietà:

β) « *la somma* $\boldsymbol{H}_P$ *dei sostegni* $\bar{z}_i$ *dei simplessi appartenenti ad* z *che contengono* P *non è circondata dalla propria immagine* $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{H}_P)$ ».

Dimostriamo ora il seguente

Lemma II. – *Se* z *è una* r *- catena continua* $(r = 1, 2)$ *appartenente a* $E - \boldsymbol{E}_0$, *esiste una* ***suddivisione baricentrica*** [19] *di* z (*di rango abbastanza elevato*) *che è una* ***catena normale.***

Dette $z = {}^0z, {}^1z, \ldots, {}^nz, \ldots$ le successive suddivisioni baricentriche di z, chiamiamo con G_n l'insieme dei punti P di ${}^n\bar{z}$ per i quali la proprietà (β) non è soddisfatta.

Se per qualche n è $G_n = 0$ allora ${}^nz$ è una catena normale. Basterà quindi dimostrare che non può essere per ogni n, $G_n \neq 0$.

Supponiamo, se è possibile, $G_n \neq 0$ per ogni n. Esisterà allora almeno un punto P^* tale che ogni suo intorno abbia punti comuni con infiniti G_n. Determiniamo in conformità del lemma I (n. 6), un ρ - intorno di P^*, tale che ogni insieme chiuso contenuto in $E \cdot [P^*]_\rho$ sia *non circondato* dalla propria immagine. Se diciamo δ_n il massimo *diametro* [20] dei sostegni dei simplessi costituenti la r - catena ${}^nz$, sarà $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$.

Potremo quindi scegliere un intero n_0 in modo che sia $\delta_{n_0} < \frac{\rho}{2}$ e che nell'intorno $[P^*]_{\frac{\rho}{2}}$ cada qualche punto di G_{n_0}.

Sia $P_0 \in G_{n_0} \cdot [P^*]_{\frac{\rho}{2}}$, se $\boldsymbol{H}_{P_0}$ è la somma dei sostegni dei simplessi di ${}^nx$ che contengono il punto P_0, sarà $\boldsymbol{H}_{P_0}$ un insieme chiuso di *diametro* minore di $\frac{\rho}{2}$ e poichè è $\overline{P_0 P^*} < \frac{\rho}{2}$ sarà $\boldsymbol{H}_{P_0} \subset E \cdot [P^*]_\rho$. Ne segue che $\boldsymbol{H}_{P_0}$ è non circondato dalla propria immagine $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{H}_{P_0})$, e P_0 soddisfacendo alla condizione (β) non dovrebbe appartenere a G_{n_0} contrariamente all'ipotesi.

(19) V. opera citata in (14), pag. 105 (è usato il termine « *Normalunterteilung* »).

(20) Diametro di un insieme di punti è l'estremo superiore delle distanze delle coppie di punti appartenenti all'insieme.

8. - Grado della trasformazione T relativo a un ciclo normale. - Sia Γ una 1-catena normale di frontiera nulla, appartenente ad $E - E_0$, brevemente, un *ciclo normale* [21].

Posto $\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k$, dove i Γ_k sono gli 1-simplessi continui di Γ (non necessariamente tutti distinti); se, come di consueto, indichiamo con un punto sovrapposto il passaggio da una catena alla propria frontiera e poniamo $\dot{\Gamma}_k = P_{k,1} - P_{k,2}$ essendo $P_{k,1}$ e $P_{k,2}$ i vertici di Γ_k, dovrà essere $\dot{\Gamma} = \sum_{k=1}^{N} \dot{\Gamma}_k = \sum_{k=1}^{N} (P_{k,1} - P_{k,2}) = 0$ ossia

$$\sum_{k=1}^{N} P_{k,1} = \sum_{k=1}^{N} P_{k,2}\,; \tag{7}$$

l'una o l'altra delle somme (7) rappresenta la 0-catena dei vertici di Γ.

Consideriamo un vertice $P_{k,i}$ $(k = 1, 2, \ldots, N;\ i = 1, 2)$ di Γ e indichiamo con $H_{k,i}$ l'insieme (chiuso), somma dei *sostegni* $\overline{\Gamma}_j$ dei simplessi Γ_j che contengono $P_{k,i}$, poniamo cioè $H_{k,i} = \sum_{P_{k,i} \in \overline{\Gamma}_j} \overline{\Gamma}_j$. Ciascun insieme $H_{k,i}$, per la definizione di ciclo normale, sarà *non circondato* da $T(H_{k,i})$ e quindi se O è un punto *non circondato* da $T(\overline{\Gamma})$ potremo far corrispondere ad ogni vertice $P_{k,i}$ una 1-catena $C_{k,i}$ godente delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{k,i} &= O - P_{k,i} \\ \overline{C}_{k,i} &\subset S^{(2)} - T(H_{k,i})\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Un insieme di catene come $\{C_{k,i}\}$ lo chiameremo un *sistema di catene associato al ciclo normale* Γ. Sarà bene tener presente

[21] I cicli considerati qui e nel seguito saranno supposti sempre cicli continui 1-dimensionali, anche senza dichiararlo esplicitamente.

che se $C_{k,i}$ e $C_{h,j}$ sono due catene di un sistema *associato* a Γ, supporremo $C_{k,i} = C_{h,j}$, qualora sia $P_{k,i} = P_{h,j}$.

Con un sistema $\{C_{k,i}\}$ associato a Γ potremo costruire i cicli

$$\gamma_k = C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2}$$

per i quali, osservando che $\bar{\gamma}_k \subset \bar{C}_{k,1} + \bar{\Gamma}_k + \bar{C}_{k,2}$, $\bar{C}_{k,i} \subset S^{(2)} - T(H_{k,i}) \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma}_k)$, $\bar{\Gamma}_k \subset H_{k,i} \subset S^{(2)} - T(H_{k,i}) \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma}_k)$, segue

$$\bar{\gamma}_k \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma}_k)\,. \tag{9}$$

La (9) ci dice che l'espressione $\omega_{P_k}(\gamma_k)$ ha senso per ogni punto $P_k \in \bar{\Gamma}_k$ e non dipende dal particolare P_k scelto nel continuo $\bar{\Gamma}_k$ per quanto s'è detto al n. 4.

Definiamo ora il *grado* $\Omega(\Gamma)$ *della trasformazione* T *relativo al ciclo normale* Γ ponendo

$$\Omega(\Gamma) = \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(\gamma_k)\,.$$

Il grado $\Omega(\Gamma)$ *non dipende dalla scelta del punto* O *e del sistema di catene* $\{C_{k,i}\}$ *associato a* Γ.

Infatti se $\{C'_{k,i}\}$ è un altro sistema di catene associato a Γ sarà $\dot{C}'_{k,i} = O' - P_{k,i}$, con O' non circondato da $T(\bar{\Gamma})$. Esisterà quindi una 1-catena C tale che $\dot{C} = O' - O$, $\bar{C} \subset S^{(2)} - T(\bar{\Gamma})$; allora, posto $\gamma'_k = C'_{k,1} + \Gamma_k - C'_{k,2}$, sarà

$$\gamma'_k = (C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2}) + (C'_{k,1} - C_{k,1} - C) - (C'_{k,2} - C_{k,2} - C)$$

ossia

$$\gamma'_k = \gamma_k + (C'_{k,1} - C_{k,1} - C) - (C'_{k,2} - C_{k,2} - C) \tag{10}$$

da cui segue

$$(11)\ \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(\gamma'_k) = \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(\gamma_k) + \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(C'_{k,1} - C_{k,1} - C) - \\ - \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(C'_{k,2} - C_{k,2} - C)$$

essendo $C'_{k,1} - C_{k,1} - C$ e $C'_{k,2} - C_{k,2} - C$ dei cicli appartenenti a $S^{(2)} - T(\overline{\Gamma}_k)$.

Per l'arbitrarietà di $P_k \in \overline{\Gamma}_k$ avremo

$$(12)\quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(C'_{k,1} - C_{k,1} - C) &= \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_{k,1}}(C'_{k,1} - C_{k,1} - C)\,, \\ \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(C'_{k,2} - C_{k,2} - C) &= \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_{k,2}}(C'_{k,2} - C_{k,2} - C)\,; \end{aligned}$$

si riconosce facilmente che le somme ai secondi membri delle (12) contengono gli stessi termini poichè se indichiamo con $\sum_{j=1}^{N'} \mu_j Q_j = \sum_{k=1}^{N} P_{k,1} = \sum_{k=1}^{N} P_{k,2}$ la 0 - catena dei vertici di Γ, dove i Q_j sono punti a due a due *distinti* e μ_j le rispettive molteplicità, il valore comune delle due somme risulta uguale a

$$\sum_{j=1}^{N'} \mu_j\, \omega_{Q_j}(C'_j - C_j - C)$$

avendo indicato con C_j la catena $C_{k,1}$ per $P_{k,i} = Q_j$ e analogamente per C'_j.

Si ha quindi per la (11)

$$\sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(\gamma_k) = \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}(\gamma'_k)$$

cioè l'indipendenza di $\Omega(\Gamma)$ dalla scelta particolare del sistema $\{C_{k,i}\}$ di catene associato a Γ.

9. - Teorema di addizione. - Dimostriamo il seguente teorema fondamentale:

Se $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots \Gamma^{(n)}$ *sono cicli normali* (appartenenti quindi a $E - \boldsymbol{E}_0$) *e se è*

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma^{(\nu)} = 0 \tag{13}$$

è pure

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Omega(\Gamma^{(\nu)}) = 0 \,.$$

Potremo, mediante un sistema di simplessi continui z_1, $z_2, \ldots, z_N$ linearmente indipendenti rappresentare i cicli

$$\Gamma^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} z_k \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

restando così determinati gli interi (relativi) $\sigma_k^{(\nu)}$ $(k = 1, 2, \ldots, N;$ $\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Avremo anzitutto, se $P_{k,1}$ e $P_{k,2}$ sono i vertici di z_k in modo che $\dot{z}_k = P_{k,1} - P_{k,2}$,

$$\dot{\Gamma}^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} \dot{z}_k = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} (P_{k,1} - P_{k,2})$$

da cui, $\sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} P_{k,1} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} P_{k,2}$. Queste somme rappresentano la 0-catena dei vertici di $\Gamma^{(\nu)}$; rappresentiamole anche mediante un opportuno sistema di punti a due a due distinti $P_1^*, P_2^*, \ldots$ $\ldots, P_s^*$ ponendo

$$\sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} P_{k,1} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} P_{k,2} = \sum_{j=1}^{s} \mu_j^{(\nu)} P_j^* \,;$$

in tal modo i $\mu_j^{(\nu)}$ saranno interi determinati.

Se O è un punto *non circondato* da nessun insieme $\boldsymbol{T}(\overline{\Gamma}^{(\nu)})$, potremo per ogni $\nu = 1, 2, \ldots, n$ scegliere un sistema $\{ C_{k,i}^{(\nu)} \}$ di catene associato al ciclo normale $\Gamma^{(\nu)}$ e tale che

$$\dot{C}_{k,i}^{(\nu)} = O - P_{k,i} \qquad (i = 1, 2)$$

e ciò per ogni k per cui z_k è contenuto *effettivamente* in $\Gamma^{(\nu)}$ ossia per cui è $\sigma_k^{(\nu)} \neq 0$. Per ogni altro valore di k intenderemo per $C_{k,i}^{(\nu)}$ la 1 catena nulla.

Il *grado* $\Omega(\Gamma^{(\nu)})$ sarà (essendo P_k un punto abitrario in $\overline{z}_k$)

$$\Omega(\Gamma^{(\nu)}) = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} \omega_{P_k} (C_{k,1}^{(\nu)} + z_k - C_{k,2}^{(\nu)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k} (\sigma_k^{(\nu)} C_{k,1}^{(\nu)} + \sigma_k^{(\nu)} z_k - \sigma_k^{(\nu)} C_{k,2}^{(\nu)})$$

e quindi

$$(14) \quad \sum_{\nu=1}^{n} \Omega(\Gamma^{(\nu)}) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k} (\sigma_k^{(\nu)} C_{k,1}^{(\nu)} + \sigma_k^{(\nu)} z_k - \sigma_k^{(\nu)} C_{k,2}^{(\nu)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,1}^{(\nu)} - \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,2}^{(\nu)} \right)$$

perchè dalla (13) segue

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Gamma^{(\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{(\nu)} z_k = \sum_{k=1}^{N} z_k \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} = 0$$

ed essendo gli z_k indipendenti: $\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} = 0$.

Osserviamo che $\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,i}^{(\nu)}$ per $i = 1, 2$, sono cicli appartenenti a $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(\bar{z}_k)$ per cui potremo scindere la somma (14) in due parti come segue:

$$(15)\quad \sum_{\nu=1}^{n} \Omega(\Gamma^{(\nu)}) = \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,1}^{(\nu)}\right) - \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,2}^{(\nu)}\right);$$

ma le due somme a secondo membro della (15) sono uguali perchè, posto $P_k = P_{k,1}$ nella prima e $P_k = P_{k,2}$ nella seconda, possiamo in queste raggruppare i termini i cui indici k sono rispettivamente tali che $P_{k,1} = P_j^*$ e $P_{k,2} = P_j^*$, ottenendo

$$(16)\qquad \sum_{k=1}^{N} \omega_{P_{k,i}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,i}^{(\nu)}\right) = \sum_{j} \omega_{P_j^*}(\Delta_j)$$

dove è

$$\Delta_j = \sum_{P_{k,i}=P_j^*}{}_{k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,i}^{(\nu)} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ \sum_{P_{k,i}=P_j^*}{}_{k} \sigma_k^{(\nu)} C_{k,i}^{(\nu)} \right\}.$$

Per quei k per cui $P_{k,i} = P_j^*$, le $C_{k,i}^{(\nu)}$ per un fissato ν, sono tutte coincidenti con una catena che possiamo chiamare $C_j^{(\nu)}$; perciò potremo scrivere:

$$\Delta_j = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ C_j^{(\nu)} \cdot \sum_{P_{k,i}=P_j^*}{}_{k} \sigma_k^{(\nu)} \right\}$$

e poichè la $\sum\limits_{P_{k,i}=P_j^*} \sigma_k^{(\nu)} = \mu_j^{(\nu)}$ non dipende da i ($i = 1, 2$), per la (16) le due somme a secondo membro della (15) sono eguali ed è quindi $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \Omega(\Gamma^{(\nu)}) = 0$. Rimane con ciò dimostrato il teorema.

10. - Facciamo alcune brevi considerazioni:

a) Se Γ *è un ciclo normale, tale è pure* $-\Gamma$ *ed essendo* $\Gamma + (-\Gamma) = 0$ *si ha, per il teorema di addizione* $\Omega(\Gamma) + \Omega(-\Gamma) = 0$ *quindi:*

$$\Omega(-\Gamma) = -\Omega(\Gamma);$$

b) Se Γ *è un ciclo normale somma di cicli normali* $\Gamma^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, *da* $\sum_{\nu=1}^{n} \Gamma^{(\nu)} - \Gamma = 0$ *segue*

$$\Omega(\Gamma) = \sum_{\nu=1}^{n} \Omega(\Gamma^{(\nu)});$$

c) Se $\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k$ è un ciclo normale e $\overline{\Gamma}$ è *non circondato* da $\boldsymbol{T}(\overline{\Gamma})$ potremo scegliere un sistema di catene $\{C_{k,i}\}$ associato a Γ, tale che $\overline{C}_{k,i} \subset S^{(2)} - \boldsymbol{T}(\overline{\Gamma})$ $(k = 1, 2, .., N;\ i = 1, 2)$. In tal caso, poichè $\omega_P(C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2})$ non varia se P varia su $\overline{\Gamma}$, sarà

$$(17)\quad \Omega(\Gamma) = \sum_{k=1}^{N} \omega_P(C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2}) = \omega_P\left[\sum_{k=1}^{N} (C_{k,1} + \Gamma_k - C_{k,2})\right] = \omega_P(\Gamma)$$

dove P è un punto arbitrario di $\overline{\Gamma}$.

Se inoltre Γ è omologo a zero in $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(\overline{\Gamma})$, cioè se Γ è frontiera di una 2 catena continua appartenente a $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(\overline{\Gamma})$ sarà

$$\Omega(\Gamma) = \omega_P(\Gamma) = 0$$

come si riconosce facilmente osservando che nella formula (4) n. 4 definente $\omega_P(\gamma)$ tutti i ν_k sono nulli quando γ è omologo a zero in $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(P)$;

d) Sia ancora $\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k$ un ciclo normale; ${}^p\Gamma$ la p-esima *suddivisione baricentrica* di Γ e ${}^p\Gamma_k$ la p-esima *suddivisione baricentrica* del simplesso continuo Γ_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, sarà ${}^p\Gamma = \sum_{k=1}^{N} {}^p\Gamma_k$ e quindi, essendo anche $\Gamma - {}^p\Gamma$ un ciclo normale, $\Omega(\Gamma - {}^p\Gamma) = \Omega\left[\sum_{k=1}^{N} (\Gamma_k - {}^p\Gamma_k)\right]$. Ma i $\Gamma_k - {}^p\Gamma_k$ sono cicli normali non circondati dalla propria immagine dato che $\overline{\Gamma_k - {}^p\Gamma_k} = \overline{\Gamma}_k$ e Γ_k è un simplesso di un ciclo normale. Inoltre essendo $\Gamma_k - {}^p\Gamma_k$ omologo a zero in $S^{(2)} - T(\overline{\Gamma}_k)$, per le considerazioni fatte in (*c*) sarà $\Omega(\Gamma - {}^p\Gamma) = \sum_{k=1}^{N} \Omega(\Gamma_k - {}^p\Gamma_k) = 0$; da ciò segue

$$\Omega(\Gamma) = \Omega({}^p\Gamma)\,.$$

Quest'ultima proprietà ci permette di *estendere la definizione di grado di T rispetto ad un ciclo 1-dimensionale non normale $\mathfrak{z}$ appartenente a $E - E_0$, ponendo*

$$\Omega(\mathfrak{z}) = \Omega({}^p\mathfrak{z})$$

dove ${}^p\mathfrak{z}$ è una suddivisione baricentrica di $\mathfrak{z}$, di rango p tale che ${}^p\mathfrak{z}$ sia un ciclo normale. In tal caso $\Omega({}^p\mathfrak{z})$ non dipende da p e la definizione è dunque legittima.

11. – Abbiamo definito il *grado* della trasformazione T per un qualunque ciclo 1-dimensionale $\mathfrak{z}$ appartenente a $E - E_0$.

Il *grado* così definito rimane invariato per le successive *suddivisioni baricentriche* di $\mathfrak{z}$. Evidentemente anche il teorema di addizione dimostrato al n. 9 per i cicli normali continua a sussistere per i cicli normali di $E - E_0$.

Dimostriamo ora l'*invarianza del grado di T relativo a cicli omologhi.*

Supponiamo che il ciclo $\mathfrak{z}$ sia omologo a zero in $E - E_0$, vale a dire esista una 2-catena z appartenente a $E - E_0$ per cui sia $\mathfrak{z} = \dot{z}$; scriveremo allora colla notazione usuale $\mathfrak{z} \sim 0$.

Per il lemma II (n. 7) esisterà una *suddivisione baricentrica* ${}^p z$ di z che sarà una catena normale. La frontiera ${}^p\dot{z}$ di ${}^p z$ coinciderà colla p-esima *suddivisione baricentrica* di $\mathfrak{z}$.

Se poniamo ${}^p z = \sum_{j=1}^{h} {}^p z_j$ dove gli ${}^p z_j$ sono i simplessi continui (bidimensionali) costituenti ${}^p z$ saranno le frontiere ${}^p\dot{z}_j$ di questi, dei cicli normali omologhi a zero in $S^{(2)} - \boldsymbol{T}(\overline{{}^p z_j})$ e non circondati dalle proprie immagini $\boldsymbol{T}(\overline{{}^p \dot{z}_j})$; per quanto s'è dimostrato al n. 10 in (c) si avrà $\Omega({}^p\dot{z}_j) = 0$ e quindi

$$\Omega(\mathfrak{z}) = \Omega\left(\sum_{j=1}^{h} {}^p\dot{z}_j\right) = 0 .$$

Se infine $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{z}'$ sono cicli omologhi in $E - \boldsymbol{E}_0$ da $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}' \sim 0$ in $E - \boldsymbol{E}_0$ segue $\Omega(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}') = 0$ ossia

$$\Omega(\mathfrak{z}) = \Omega(\mathfrak{z}') .$$

12. – Teorema di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una bicella. – Come applicazione della teoria esposta nei numeri precedenti, diamo un teorema di esistenza di punti uniti per una trasformazione plurivalente $\boldsymbol{T}$ dei punti di E, soddisfacente alle condizioni I, II, III, IV, V del n. 3, nel caso che E sia una bicella. In tale ipotesi E sarà il sostegno di un simplesso topologico ([22]) z e la frontiera di E coinciderà col sostegno della frontiera di z. Se $\overline{\dot{z}}$ non contiene punti uniti, sarà $\dot{z}$ un ciclo appartenente a $E - \boldsymbol{E}_0$. *Qualora si abbia* $\Omega(\dot{z}) \neq 0$ *esiste almeno un punto unito interno ad* E. Infatti se $\boldsymbol{E}_0$ fosse vuoto, sarebbe $\dot{z} \sim 0$ in $E - \boldsymbol{E}_0 = E$ da cui seguirebbe $\Omega(\dot{z}) = 0$ per quanto s'è dimostrato al numero precedente, e ciò contrariamente all'ipotesi.

([22]) Cfr. Seifert-Threlfall, *Lehrbuch der Topologie* – Leipzig (1934) pag. 41; i simplessi topologici si possono considerare come particolari simplessi continui in corrispondenza biunivoca con un proprio « *Urbild* ».

Calcoliamo ora il *grado* relativo a $\dot{z}$ nel caso che si abbia

$$T(\bar{\dot{z}}) \subset E. \tag{18}$$

Se $T(\bar{\dot{z}})$ è totalmente *interno* ad E, $\dot{z}$ è un ciclo normale, non circondato da $T(\bar{\dot{z}})$ e per la (17) n. 10 si ha $\Omega(\dot{z}) = \omega_P(\dot{z})$ con $P \in \bar{\dot{z}}$. Essendo l'*ordine* di qualunque punto interno ad E rispetto ad $\dot{z}$, ± 1 a seconda dell'orientazione di $\dot{z}$, sarà

$$\Omega(\dot{z}) = \pm F_P[T(P)] \qquad \text{con} \quad P \in \bar{\dot{z}}.$$

Se $T(\bar{\dot{z}})$ ha qualche punto sulla frontiera di E pur valendo la (18), potremo ricondurci al caso precedente col seguente artifizio: sia H un *simplesso euclideo orientato* del piano $\Sigma^{(2)}$. Detto Φ un *omeomorfismo* tra $\Sigma^{(2)}$ e $S^{(2)}$ per cui si abbia $\dot{z} = \Phi(H)$ ed H^* un simplesso in $\Sigma^{(2)}$ *omotetico* ad H con centro di omotetia nel baricentro di H e contenente H nel suo interno, sarà $\dot{z}^* = \Phi(H^*)$ un simplesso topologico il cui sostegno $E^* = \bar{\dot{z}}^*$ conterrà internamente $E = \bar{\dot{z}}$. Definiamo la trasformazione T^* dei punti della bicella E^* ponendo

$$T^*(P) = T(P) \qquad \text{per} \quad P \in E$$

$$T^*(P) = T(P_1) \qquad \text{per} \quad P \in E^* - E$$

dove P_1 è quel punto della frontiera di E per cui $\Phi^{-1}(P_1)$ è la proiezione di $\Phi^{-1}(P)$ dal baricentro di H sulla frontiera di H. La trasformazione T^* è definita in E^* e soddisfa evidentemente alle condizioni I, II, III, IV, V qualora si ponga

$$F_P^*(\tau) = F_P(\tau) \quad \text{se } P \in E \text{ e } \tau \text{ è un } \textit{pezzo} \text{ di } T^*(P) = T(P)$$

$$F_P^*(\tau) = F_{P_1}(\tau) \quad \text{se } P \in E^* - E \text{ e } \tau \text{ è un } \textit{pezzo} \text{ di } T^*(P) = T(P_1).$$

Ma essendo $T^*(\bar{\dot{z}}^*) = T(\bar{\dot{z}}) \subset E$ ed E *interno* ad E^* ci siamo ricondotti al caso precedente per cui, indicando con $\Omega^*(...)$ il grado della trasformazione T^*, sarà

$$\Omega^*(\dot{z}^*) = \pm F_P^*[T^*(P)] = \pm F_{P_1}[T(P_1)]$$

dove P è un punto qualunque di $\bar{z}^*$. Ora essendo $\dot{z}^* \sim \dot{z}$ in $E^* - \boldsymbol{E}_0$ sarà $\Omega^*(\dot{z}^*) = \Omega^*(\dot{z})$; osservando infine che $\bar{z} \subset E$ e che in tutto E la $\boldsymbol{T}^*(P)$ e la $\boldsymbol{F}_P^*$ coincidono rispettivamente colla $\boldsymbol{T}(P)$ e con $\boldsymbol{F}_P$ si avrà

$$\Omega^*(\dot{z}) = \Omega(\dot{z}) = \pm \boldsymbol{F}_{P_1}[\boldsymbol{T}(P_1)] \text{ con } P_1 \in \bar{z} .$$

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se $\boldsymbol{T}$ è una trasformazione plurivalente dei punti di una bicella E, soddisfacente alle condizioni I, II, III, IV, V (cfr. n. 3) *e se inoltre*:

α) *l'immagine della frontiera di E è contenuta in E*

β) $\boldsymbol{F}_P[\boldsymbol{T}(P)] \neq 0$ *per* $P \in E$ (23)

esiste in E almeno un punto $P \in \boldsymbol{T}(P)$.

13. - Sono soddisfatte tutte le condizioni del teorema precedente quando una trasformazione $\boldsymbol{T}$ di una bicella E soddisfa alle I, II, III del n. 3, alla condizione (α_1) e ad una delle (α_2), (α_2') seguenti:

α_1) se P_0 *è un punto qualunque di E e se τ_0 è un pezzo di $\boldsymbol{T}$ (P_0), l'insieme $\boldsymbol{T}(P)[\tau_0]_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, sia definitivamente non vuoto* al tendere di P a P_0 in E (24).

α_2) *$\boldsymbol{T}(P)$ per ogni $P \in E$ sia costituito da un numero finito e costante h di componenti* (25).

α_2') *$\boldsymbol{T}(P)$ per ogni $P \in E$ abbia al più due componenti.*

Nell'ipotesi (α_2) sono soddisfatte anche le condizioni IV e V se poniamo per $P \in E$:

(19) $\quad \boldsymbol{F}_P(\tau) =$ *numero dei componenti di* τ

(23) $\boldsymbol{F}_P[\boldsymbol{T}(P)]$ non varia al variare di P in E e ciò per la ipotesi V.

(24) Cioè, per ogni $\varepsilon > 0$ esista un intorno σ di P_0 tale che per $P \in \boldsymbol{E} \cdot \sigma$ sia $\boldsymbol{T}(P)[\boldsymbol{T}_0]_\varepsilon \neq 0$.

(25) V. nota (7) nonchè: P. ALEXANDROFF - H. HOPF - *Topologie* - Berlin - 1935 - pp. 49 e 117.

e lo stesso nell' ipotesi (α_2') se poniamo:

$$(20) \qquad \boldsymbol{F}_P(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau = 0 \\ 1 & \text{se } \tau \neq 0\,,\ \tau \neq \boldsymbol{T}(P) \\ 2 & \text{se } \tau = \boldsymbol{T}(P) \end{cases}$$

τ essendo un *pezzo* qualunque di $\boldsymbol{T}(P)$.

E facile riconoscere che in entrambi i casi la $\boldsymbol{F}_P(\tau)$ è una funzione additiva dei pezzi τ di $\boldsymbol{T}(P)$. Resta da dimostrare che sussiste la condizione V. Nell' ipotesi (α_2), sia $P_0 \in E$, $T_1, T_2, \ldots, T_h$ i componenti di $\boldsymbol{T}(P_0)$ ed A un insieme aperto in $S^{(2)}$ la cui frontiera non abbia punti in comune con $\boldsymbol{T}(P_0)$. Se δ è la distanza (necessariamente positiva) tra $\boldsymbol{T}(P_0)$ e la frontiera di A, ed ε un numero positivo minore di δ e tale che gli ε-intorni $[T_j]_\varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ non interferiscano a due a due, sarà $[\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon = \sum_{j=1}^{h} [T_j]_\varepsilon$ e ciascun $[T_j]_\varepsilon$ sarà totalmente interno o totalmente esterno ad A.

Per la semicontinuità superiore della $\boldsymbol{T}$ e per l' ipotesi (α_2) esisterà un $\rho > 0$ tale che per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ sia $\boldsymbol{T}(P) \subset \subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon$ e in ciascun $[T_j]_\varepsilon$ cada qualche punto di $\boldsymbol{T}(P)$. Allora $\boldsymbol{T}(P) \cdot [T_j]_\varepsilon$ è un pezzo non vuoto di $\boldsymbol{T}(P)$ e poichè i $[T_j]_\varepsilon$ sono tutti disgiunti e in numero di h, ciascuno dei $[T_j]_\varepsilon$ conterrà uno ed un solo componente di $\boldsymbol{T}(P)$. Se μ è il numero dei componenti T_j di $\boldsymbol{T}(P_0)$ contenuti in A, lo stesso μ sarà il numero dei componenti di $\boldsymbol{T}(P)$ contenuti in A, per cui per la (19) si ha

$$\boldsymbol{F}_P[A \cdot \boldsymbol{T}(P)] = \boldsymbol{F}_{P_0}[A \cdot \boldsymbol{T}(P_0)] = \mu$$

per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$. Vale quindi la condizione V.

Nell' ipotesi (α_2'), mantenendo per P_0, A ed ε il significato anzidetto, potranno presentarsi tre casi:

1° $A \cdot \boldsymbol{T}(P_0) = 0$; allora per la semicontinuità superiore di $\boldsymbol{T}$ esiste un $\rho > 0$ tale che per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ si abbia

$\boldsymbol{T}(P) \subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon$, sarà quindi per tali punti $A \cdot \boldsymbol{T}(P) = 0$ da cui per la (20)

$$\boldsymbol{F}_P[A \cdot \boldsymbol{T}(P)] = \boldsymbol{F}_{P_0}[A \cdot \boldsymbol{T}(P_0)] = 0 .$$

2° $A \cdot \boldsymbol{T}(P_0) = \boldsymbol{T}(P_0)$; per $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ è $\boldsymbol{T}(P) \subset \subset [\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon \subset A$ e per tali P si avrà per la (20)

$$\boldsymbol{F}_P[A \cdot \boldsymbol{T}(P)] = \boldsymbol{F}_{P_0}[A \cdot \boldsymbol{T}(P_0)] = 2 .$$

3° $A \cdot \boldsymbol{T}(P_0) \neq 0$, $A \cdot \boldsymbol{T}(P_0) \neq \boldsymbol{T}(P_0)$; in questo caso $\boldsymbol{T}(P_0)$ è costituito da due componenti T_1 e T_2 una interna e l'altra esterna ad A. Per $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ si avrà $\boldsymbol{T}(P) \subset [T_1]_\varepsilon + + [T_2]_\varepsilon = [\boldsymbol{T}(P_0)]_\varepsilon$ e se ρ è abbastanza piccolo, per la (α_2') ciascun *pezzo* $\boldsymbol{T}(P)[T_1]_\varepsilon$, $\boldsymbol{T}(P)[T_2]_\varepsilon$ è non vuoto ed è quindi un componente di $\boldsymbol{T}(P)$. Se T_1 è il componente di $\boldsymbol{T}(P_0)$ contenuto in A si ha

$$A \cdot \boldsymbol{T}(P) = \boldsymbol{T}(P)[T_1]_\varepsilon \neq \boldsymbol{T}(P)$$

per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$. Avremo dunque in questo caso per la (20)

$$\boldsymbol{F}_P[A \cdot \boldsymbol{T}(P)] = \boldsymbol{F}_{P_0}[A \cdot \boldsymbol{T}(P_0)] = 1 .$$

È soddisfatta quindi la condizione V. Inoltre nell'ipotesi (α_2) si ha evidentemente

$$\boldsymbol{F}_P[\boldsymbol{T}(P)] = h \neq 0 \qquad \text{per} \quad P \in E$$

e nell'ipotesi (α_2')

$$\boldsymbol{F}_P[\boldsymbol{T}(P)] = 2 \qquad \text{per} \quad P \in E .$$

In entrambi i casi è quindi soddisfatta la condizione (β) del n. 12. Basterà imporre anche la (α) del n. 12 per poter affermare nei due casi l'esistenza di almeno un punto unito [26].

([26]) Il Teorema di esistenza nell'ipotesi (α_2) limitandoci a trasformazioni di bicelle in sè, è in sostanza contenuto in un teorema analogo per r-celle dimostrato da E. Magenes nella nota citata ([6]) pp. 175–181.