Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Jaurés Cecconi

Su di una congettura di T. Radó

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 342-366
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__342_0>

SU DI UNA CONGETTURA DI T. RADÓ

Memoria (*) *di* JAURÉS CECCONI (*a Pisa*).

1. - In una comunicazione al Congresso Internazionale dei Matematici tenutosi a Bologna nel 1928 T. RADÓ [7] (1) si intratteneva sul problema dell'area delle superficie di forma parametrica prendendo in esame per ogni superficie continua

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad 0 \leq {u \atop v} \leq 1,$$

oltre all'area di LEBESGUE $L(S)$, l'area di GEÖCZE e l'area di PEANO.

Dopo avere osservato che secondo queste ultime definizioni l'area di S dipende da ciò che si assume come area della proiezione ortogonale di porzioni σ di S su piani π, opportuni o generici rispettivamente, il RADÓ faceva notare che, se si assume come area della proiezione di σ su π la misura esterna, secondo LEBESGUE, dell'insieme costituito dai punti che appartengono a tale proiezione, le aree del tipo di GEÖCZE e di PEANO che così si ottengono superano, in generale, l'area di LEBESGUE.

Ne risultava allora che le aree così definite venivano in conflitto con l'area di LEBESGUE e che il loro studio non avrebbe portato sostanziali contributi al problema, allora insoluto, dell'area secondo LEBESGUE di S.

Da ciò il RADÓ era indotto, inspirandosi anche ad alcune idee di Z. DE GEÖCZE, a modificare la proiezione ortogonale di σ su π prendendo in sua vece una sola parte di essa, un così detto *nucleo* della proiezione.

(*) Pervenuta in Redazione il 21 maggio 1950.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia in fine del lavoro.

Assumendo come proiezione di σ sul piano π la misura esterna, secondo LEBESGUE, di tale *nucleo* il RADÓ perveniva alle definizioni di area del tipo di GEÖCZE e di PEANO che nel seguito saranno indicate con i simboli $G_R(S)$ e $P_R(S)$, rispettivamente, formulando l'ipotesi che dovesse aversi, per ogni superficie continua S,

$$G_R(S) = P_R(S) = L(S) .$$

In successivi lavori [8], [10] T. RADÓ, in collaborazione anche con P. V. REICHELDERFER, dava una nuova modificazione della proiezione ortogonale di σ su π pervenendo così ad una nuova definizione delle aree del tipo di GEÖCZE e di PEANO, aree che nel seguito saranno indicate con i simboli $G_e(S)$ e $P_e(S)$ rispettivamente.

Quasi contemporaneamente a queste ultime ricerche di T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER ed indipendentemente da esse L. CESARI [2], [3] nei suoi fondamentali studi sull'area, secondo LEBESGUE, delle superficie di forma parametrica, in cui fra l'altro caratterizzava la superficie di area finita secondo LEBESGUE, introduceva un nuovo significato di area della proiezione di σ su di un piano π, pervenendo così alle nuove definizioni di area del tipo di GEÖCZE e di PEANO che nel seguito saranno indicate con i simboli $G_c(S)$, $P_c(S)$ rispettivamente.

Relativamente a queste L. CESARI [4], [3] stabiliva le seguenti relazioni

$$G_c(S) = L(S) \quad , \quad P_c(S) \leq L(S)$$

valide per ogni superficie continua S.

In questa Memoria prendo in esame le varie definizioni cui sopra è fatto cenno.

Dopo avere fatto vedere che le aree così definite dipendono solo dalla superficie S e non dalla rappresentazione adottata per S dimostro, valendomi di alcuni risultati di L. CESARI sulle superficie di area finita secondo LEBESGUE, che per ogni superficie di FRECHET del tipo della 2-cella si ha

$$G_R(S) = G_e(S) = G_c(S) = P_R(S) = P_e(S) = P_c(S) = L(S) .$$

Da ciò risulta, in particolare, la fondatezza della congettura di T. RADÓ cui sopra ho fatto cenno.

§ 1. - Preliminari.

2. - Sia S una superficie di Frechet del tipo della 2-cella [10] e sia

$$(1)\quad T:\quad x = x(u,v)\,,\quad y = y(u,v)\,,\quad z = z(u,v)\,,\quad (u,v)\in Q$$

una sua rappresentazione rispetto alla terna xyz sul quadrato unitario $Q; 0 \leq {u \atop v} \leq 1$; del piano uv.

Le funzioni $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sono perciò continue in Q. Considero le tre trasformazioni piane associate alla T

$$T_1:\quad y = y(u,v)\,,\quad z = z(u,v)\,,\quad (u,v)\in Q$$

$$T_2:\quad z = z(u,v)\,,\quad x = x(u,v)\,,\quad (u,v)\in Q$$

$$T_3:\quad x = x(u,v)\,,\quad y = y(u,v)\,,\quad (u,v)\in Q\,.$$

3. - Sia r la generica regione semplice di Jordan appartenente a Q e sia r^* la curva continua semplice chiusa costituente il contorno di r. Tale r risulta orientata in conseguenza del verso fissato per le rotazioni nel piano uv.

Sia $T(r^*)$ la curva orientata chiusa immagine di r^* secondo le (1) e siano $T_1(r^*)$, $T_2(r^*)$, $T_3(r^*)$ le immagini chiuse orientate di r^* secondo le trasformazioni T_1, T_2, T_3. Poichè i piani yz, zx, xy sono orientati e su di essi è fissato il verso per le rotazioni è possibile considerare sui piani coordinati gli indici di Kronecker $O(y, z; T_1, r)$, $O(z, x; T_2, r)$, $O(x, y; T_3, r)$ relativi alle curve $T_1(r^*)$, $T_2(r^*)$, $T_3(r^*)$ rispettivamente.

È noto che le funzioni $O(y, z; T_1, r)$, $O(z, x; T_2, r)$, $O(x, y; T_3, r)$ sono misurabili.

4. - Sia K un cubo di lati paralleli agli assi x, y, z, contenente nel suo interno i punti di S, e siano K_1, K_2, K_3 i quadrati dei piani coordinati yz, zx, xy in cui K si proietta ortogonalmente.

Esiste finito od infinito l'integrale di LEBESGUE

$$g(T_1, r) = \iint_{K_1} |O(y, z; T_1, r)| \, dy \, dz$$

introdotto da L. CESARI [1], ed in modo analogo si introducono le quantità $g(T_2, r)$, $g(T_3, r)$ relative alle trasformazioni T_2 e T_3.

Sia inoltre (L. CESARI [2])

$$g(T, r) = [g^2(T_1, r) + g^2(T_2, r) + g^2(T_3, r)]^{1/2} .$$

5. - Essendo r la generica regione semplice di JORDAN appartenente a Q considerata in 3 sia $r_1, r_2, \ldots . r_n$ un gruppo di regioni semplici di JORDAN appartenenti ad r prive a due a due di punti interni in comune. Un tale gruppo sarà indicato nel seguito con il simbolo σ_r.

Pongo, seguendo L. CESARI [2]

$$G_c(T_s, r) = \underset{\sigma_r}{\text{extr. sup.}} \sum_{i=1}^{n} g(T_s, r_i) \qquad s = 1, 2, 3 ,$$

$$G_c(T, r) = \underset{\sigma_r}{\text{extr. sup.}} \sum_{i=1}^{n} g(T, r_i)$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutti i possibili gruppi di regioni σ_r. È allora evidente quali siano i significati dei simboli $G_c(T_1, Q)$, $G_c(T_2, Q)$, $G_c(T_3, Q)$, $G_c(T, Q)$.

In virtù di alcuni teoremi stabiliti da L. CESARI [1], [2] la quantità $G_c(T, Q)$ è indipendente dalla rappresentazione T di S rispetto alla terna $x\,y\,z$ ed è altresì indipendente dalla direzione degli assi x, y, z.

La quantità $G_c(T, Q)$ dipende perciò soltanto dalla superficie S, essa è ciò che nella introduzione si è indicato con il simbolo $G_c(S)$. Deve intendersi cioè

$$G_c(S) = G_c(T, Q) .$$

6. - Sia $\xi\eta\zeta$ una terna cartesiana ortogonale congruente alla terna $x\,y\,z$ considerata in 2, il piano $\xi\eta$ sul quale risulta fissata una pagina positiva sarà indicato nel seguito con il simbolo π.

Sia T' la rappresentazione di S che si deduce da T mediante il passaggio dalle coordinate $x\,y\,z$ alle coordinate $\xi\eta\zeta$. Sia K' un cubo con i lati paralleli agli assi $\xi\eta\zeta$ contenente nel suo interno la superficie S e siano K'_i; $i = 1, 2, 3$; le proiezioni di K' sui piani $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$.

I simboli $T'(r^*)$, T'_i, $T'_i(r^*)$; $i = 1, 2, 3$; ecc. servano ad indicare rispetto alla rappresentazione T' gli analoghi degli enti indicati con $T(r^*)$, T_i, $T_i(r^*)$; $i = 1, 2, 3$; ecc. rispetto alla rappresentazione T.

Pongo, secondo L. CESARI [3],

$$p(T, r) = \underset{\pi}{extr.}\ sup. \iint\limits_{K'_3} | O(\xi, \eta; T'_3, r) | \, d\xi \, d\eta$$

ove l'estremo superiore è preso per tutte le possibili orientazioni della terna $\xi\eta\zeta$, o ciò che è lo stesso per tutte le possibili giaciture del piano π.

Posso allora considerare la quantità

$$P_c(T, r) = \underset{\sigma_r}{extr.}\ sup. \sum_{i=1}^{n} p(T, r_i)$$

ove il significato dei simboli r_i, σ_r è quello stabilito in 5, e dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutti i possibili gruppi di regioni di JORDAN σ_r di r.

È anche evidente quale sarà il significato del simbolo $P_c(T, Q)$. La notazione $P_c(T, Q)$ indica che la definizione di questa quantità implica la particolare rappresentazione T di S data in 2. Essa costituisce l'area secondo PEANO CESARI della superficie rappresentata dalle (1) di 2.

7. – Sia S la superficie data in 2; sia T la rappresèntazione di S ivi considerata. Ciascuna delle trasformazioni T_i; $i = 1, 2, 3$; dà luogo, secondo T. Radó [8], ad una funzione di molteplicità essenziale su ogni regione semplice di Jordan r appartenente a Q. Siano $k(y, z; T_1, r)$, $k(z, x; T_2, r)$, $k(x, y; T_3, r)$ queste funzioni di molteplicità. Sia $\varphi(y, z; T_1, r)$ la funzione che vale 1 se $k(y, z; T_1, r) \neq 0$ e vale zero altrimenti. In modo analogo siano definite le funzioni $\varphi(z, x; T_2, r), \varphi(x, y; T_3, r)$.

Tutte le funzioni ora introdotte sono misurabili, esistono perciò gli integrali di Lebesgue

$$g_e(T_1, r) = \iint_{K_1} k(y, z; T_1, r)\, dy\, dz, \quad \varphi(T_1, r) = \iint_{K_1} \varphi(y, z; T_1, r)\, dy\, dz$$

il primo dei quali può eventualmente valere $+\infty$. In modo analogo si definiscono le quantità $g_e(T_2, r)$, $g_e(T_3, r)$, $\varphi(T_2, r)$, $\varphi(T_3, r)$.

Pongo

$$g_e(T, r) = [g_e^2(T_1, r) + g_e^2(T_2, r) + g_e^2(T_3, r)]^{1/2},$$

$$\varphi(T, r) = [\varphi^2(T_1, r) + \varphi^2(T_2, r) + \varphi^2(T_3, r)]^{1/2}.$$

Si possono allora considerare le quantità

$$G_e(T, r) = \underset{\sigma_r}{\text{extr. sup.}} \sum_{i=1}^{n} g_e(T, r_i),$$

$$G_R(T r) = \underset{\sigma_r}{\text{extr. sup.}} \sum_{i=1}^{n} \varphi(T, r_i)$$

ove il significato dei simboli r_i, σ_r è quello di 5 e dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutti i possibili gruppi di regioni di Jordan σ_r di r.

Risultano in particolare definite le quantità $G_e(T, Q), G_R(T, Q)$. Le notazioni adottate per queste quantità indicano la loro dipendenza dalla rappresentazione T di S. Le quantità $G_e(T, Q)$, $G_R(T, Q)$ sono rispettivamente l'area secondo GEÖCZE RADÓ e l'area essenziale di GEÖCZE considerate nella introduzione.

8. – I simboli $\xi\eta\xi$, π, T', T'_i, K'_i; $i = 1, 2, 3$; abbiano lo stesso significato che in 6.

Siano $k(\xi, \eta; T'_3, r)$, $\varphi(\xi, \eta; T'_3, r)$ rispettivamente la funzione di molteplicità essenziale, secondo T. RADÓ, di T'_3 associata ad r, e la funzione che vale 1 se $k(\xi, \eta; T'_3, r) \neq 0$, vale 0 altrimenti.

Possono prendersi in considerazione gli integrali di LEBESGUE, il primo dei quali può eventualmente essere $+\infty$,

$$g_e(T'_3, r) = \iint_{K'_3} k(\xi, \eta; T'_3, r)\, d\xi\, d\eta, \quad \varphi(T'_3, r) = \iint_{K'_3} \varphi(\xi, \eta; T'_3, r)\, d\xi\, d\eta$$

Pongo

$$p_e(T, r) = \underset{\pi}{extr.\ sup.} \iint_{K'_3} k(\xi, \eta; T'_3, r)\, d\xi\, d\eta,$$

$$p_\varphi(T, r) = \underset{\pi}{extr.\ sup.} \iint_{K'_3} \varphi(\xi, \eta; T'_3, r)\, d\xi\, d\eta$$

per tutte le possibili orientazioni della terna $\xi\eta\zeta$, o ciò che è lo stesso per tutte le possibili giaciture del piano π.

Pongo infine

$$P_e(T, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} P_e(T, r_i), \quad P_R(T, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} P_\varphi(T, r_i)$$

essendo l'estremo superiore preso rispetto a tutti i possibili gruppi σ_r di regioni di JORDAN di r.

Risultano in particolare definite le quantità $P_R(T, Q)$, $P_e(T, Q)$ che sono rispettivamente l'area secondo PEANO RADÓ e l'area essenziale secondo PEANO considerate nella introduzione.

Anche qui i simboli adottati indicano la dipendenza delle quantità $P_R(T, Q)$, $P_e(T, Q)$ dalla particolare rappresentazione T di S.

9. - Sia S la superficie considerata in 2, T la rappresentazione ivi adottata per S, r una ragione semplice di JORDAN appartenente a Q. Il simbolo $L(T, r)$ indicherà l'area secondo LEBESGUE della porzione di S che è data mediante la rappresentazione

$$T_r: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in r$$

ove le funzioni $x(u, v)$. $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono le funzioni considerate nella (1) di 2.

Poichè l'area secondo LEBESGUE di S è indipendente dalla rappresentazione di S e dalla direzione degli assi x, y, z si scriverà talvolta $L(S)$ invece di $L(T, Q)$.

10. - Raccolgo in questo numero gli enunciati di alcuni teoremi di L. CESARI di cui mi servirò nel seguito.

Teorema I [4]. - Se S è la superficie data in 2, T è la rappresentazione di S ivi considerata, $r_1, r_2, \dots r_n$ un gruppo di ragioni semplici di JORDAN appartenenti a Q e prive a due a due di parti interni in comune vale la disuguaglianza

$$\sum_{i=1}^{n} L(T, r_i) \leq L(T, Q) = L(S).$$

Teorema II [2]. - Se S è la superficie data in 2, se T è la rappresentazione di S ivi considerata e se S ha area finita secondo LEBESGUE esistono quasi ovunque in Q tre funzioni $H_1(u, v; T)$, $H_2(u, v; T)$, $H_3(u, v; T)$, dette gli JACOBIANI generalizzati nel punto (u, v) delle trasformazioni T_1, T_2, T_3 associate alla T. Queste funzioni sono integrabili secondo LEBESGUE in Q e si ha, posto $D(u, v; S) = [H_1^2(u, v; T) + H_2^2(u, v; T) + H_3^2(u, v; T)]^{1/2}$,

$$L(S) = L(T, Q) \geq \iint_Q D(u, v; T)\, du\, dv$$

il segno uguale valendo allora ed allora soltanto che le trasformazioni T_1, T_2, T_3 siano assolutamente continue.

Teorema III [2]. - Se la superficie S data in 2 ha area finita secondo LEBESGUE e se T è la rappresentazione di S ivi considerata, allora a quasi ogni punto (u, v) interno a Q si può far corrispondere una terna di assi cartesiani ortogonali $\xi\,\eta\,\zeta$, congruente alla terna $x\,y\,z$, avente origine sul punto R immagine secondo T di (u, v) e tale che se

$$T': \quad \xi = \xi\,(u, v)\,, \quad \eta = \eta\,(u, v)\,, \quad \zeta = \zeta\,(u, v), \quad (u, v) \in Q\,,$$

è la rappresentazione di S rispetto alla terna $\xi\,\eta\,\zeta$ che si deduce dalla T di 2 mediante cambiamento delle coordinate, e se T'_i ; $i = 1, 2, 3$; sono le trasformazioni piane ad essa associate,

$$\lim_{\delta(q)\to 0} \frac{G_c\,(T'_1, q)}{|q|} = \lim_{\delta(q)\to 0} \frac{G_c\,(T'_2, q)}{|q|} = 0\,,$$

$$\lim_{\delta(q)\to 0} \frac{G_c\,(T'_3, q)}{|q|} = \lim_{\delta(q)\to 0} \frac{L\,(T, q)}{|q|} = D\,(u, v; T)$$

ove q è un quadrato con i lati paralleli agli assi u, v appartenente a Q e contenente (u, v) e $\delta\,(q)$ è il diametro di q.

La terna $\xi\,\eta\,\zeta$ è tale che l'asse ζ di essa ha i coseni direttori

$$\frac{H_1\,(u, v; T)}{D\,(u, v; T)}\,, \quad \frac{H_2\,(u, v; T)}{D\,(u, v; T)}\,, \quad \frac{H_3\,(u, v; T)}{D\,(u, v; T)}$$

se $D(u, v; T) \neq 0$, altrimenti è una qualunque terna con origine in R.

Teorema IV [5]. - Se la superficie S data in 2 ha area finita secondo LEBESGUE e se T è la rappresentazione di S ivi considerata esiste una rappresentazione di S nel quadrato unità Q del piano $u\,v$, sia essa

$$\overline{T}: \quad x = \overline{x}\,(u, v)\,, \quad y = \overline{y}\,(u, v)\,, \quad z = \overline{z}\,(u, v) \quad (u, v) \in Q$$

per la quale le trasformazioni piane associate $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3$ sono assolutamente continue.

§ 2. - L'area secondo Peano - Cesari $P_c(S)$.

11. - Sia S la superficie di FRECHET data in 2 e sia T la rappresentazione di S ivi considerata. Allo scopo di studiare la dipendenza di $P_c(T, Q)$ dalla rappresentazione T di S dimostro che la quantità $P_c(T, Q)$ è un funzionale inferiormente semicontinuo di T. Precisamente dimostro il

TEOREMA: *Se S ed S_n; $n = 1, 2, \ldots$; sono superficie di Frechet del tipo della 2-cella e*

$$T\ :\ x = x(u, v)\,,\quad y = y(u, v),\quad z = z(u,v)\,,\quad (u, v) \in Q$$

$$T_n\colon\ x = x_n(u, v)\,,\quad y = y_n(u, v)\,,\quad z = z_n(u, v),\quad (u, v) \in Q\,,\ n = 1, 2, \ldots,$$

sono loro rappresentazioni simultanee nel quadrato Q, se inoltre si ha uniformemente in Q

$$x(u,v) = \lim_{n\to\infty} x_n(u, v),\quad y(u, v) = \lim_{n\to\infty} y_n(u, v),\quad z(u, v) = \lim_{n\to\infty} z_n(u, v)$$

allora

$$P_c(T, Q) \leq \varliminf_{n\to\infty} P_c(T_n, Q)\,.$$

DIM. - Suppongo che sia $P_c(T, Q) < +\infty$. Sia r la generica regione semplice di JORDAN appartenente a Q.

Sia $p(T, r)$ la quantità definita in 7, sia $p(T_n, r)$ la analoga relativamente a T_n. Per ogni $\varepsilon > 0$ si può determinare una terna $\xi\,\eta\,\zeta$, congruente alla terna $x\,y\,z$ in modo che si abbia

$$\iint_{K_3'} |O(\xi, \eta\,;\ T_3',\ r)|\, d\xi\, d\eta > p(T, r) - \varepsilon\,.$$

Poichè in virtù della ipotesi e di note proprietà di semicontinuità inferiore degli indici topologici [1] si ha

$$\iint_{K_3'} |O(\xi, \eta\,;\ T_3',\ r)|\, d\xi\, d\eta \leq \varliminf_{n\to\infty} \iint_{K_3'} |O(\xi, \eta\,;\ T_{n,3}',\ r)|\, d\xi\, d\eta$$

esiste un intero $\nu(\varepsilon)$ tale che se $n > \nu(\varepsilon)$ si ha

$$\iint_{K'_3} |O(\xi, \eta; T'_{n,3}, r)| \, d\xi \, d\eta > \iint_{K'_3} |O(\xi, \eta; T'_3, r)| \, d\xi \, d\eta > p(T, r) - \varepsilon$$

ed anche

$$p(T_n, r) \geq p(T, r) - \varepsilon$$

dalla quale si deduce a causa della arbitrarietà di ε

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} p(T_n, r) \geq p(T, r) .$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si possono ora determinare μ regioni semplici di Jordan appartenente a Q, prive a due a due di punti interni in comune, in modo che sia

$$\sum_{i=1}^{\mu} p(T, r_i) > P_c(T, Q) - \varepsilon$$

e per la disuguaglianza sopra stabilita si ha

$$P_c(T, Q) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\mu} \underline{\lim}_{n \to \infty} p(T_n, r_i) \leq$$

$$\leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\mu} p(T_n, r_i) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} P_c(T_n, Q)$$

dalla quale per l'arbitrarietà di ε si deduce l'asserto.

Nel caso in cui sia $P_c(T, Q) = +\infty$ il teorema si dimostra con ragionamento del tutto analoghi.

12. - Sono ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema: *Se S è una superficie di* F r e c h e t *del tipo della 2-cella e se*

$$T: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in Q$$

$$\overline{T}: \quad x = \overline{x}(\overline{u}, \overline{v}), \quad y = \overline{y}(\overline{u}, \overline{v}), \quad z = \overline{z}(\overline{u}, \overline{v}), \quad (\overline{u}, \overline{v}) \in R$$

ove Q è il quadrato unitario del piano uv ed R è una regione *semplice di Jordan del piano $\bar{u}\,\bar{v}$, sono due rappresentazioni di S rispetto alla terna cartesiana $x\,y\,z$, si ha*

$$P_c(T, Q) = P_c(\overline{T}, R)\,.$$

Dim. - Considero intanto il caso particolare in cui esista una trasformazione

$$U: \quad u = u(\bar{u}, \bar{v})\,, \quad v = v(\bar{u}, \bar{v})\,, \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in R$$

di R in Q, biunivoca e continua con la propria inversa U^{-1}, tale che detta $T \cdot U$ la rappresentazione di S

$$T \cdot U: \quad x = x[u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})]\,, y = y[u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})]\,,$$

$$z = z[u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})]\,, (\bar{u}, \bar{v}) \in R$$

essa coincida con la rappresentazione $\overline{T}$ di S. Concisamente dirò che è $(T \cdot U, R) = (\overline{T}, R)$. In tal caso per la trasformazione U^{-1}, inversa di U, si ha $(\overline{T} \cdot U^{-1}, Q) = (T, Q)$.

Per ogni regione semplice di Jordan $\bar{r}$ appartenente ad R esiste in virtù della U una regione semplice di Jordan r appartenente a Q tale che

$$\overline{T}\,(r^*) = T \cdot U(\bar{r}^*) = T(r^*)\,,$$

e quindi per ogni terna $\xi\,\eta\,\zeta$, congruente alla terna $x\,y\,z$, si ha, con evidente significato dei simboli

$$\iint_{K_3'} |\,O(\xi, \eta;\, T_3', r)\,|\, d\xi\, d\eta = \iint_{K_3'} |\,O(\xi, \eta;\, \overline{T}_3', \bar{r})\,|\, d\xi\, d\eta\,.$$

Ne viene allora

$$p\,(T, r) \geq p\,(\overline{T}, r)$$

ed in conseguenza

$$P_c(T, Q) \geq P_c(\overline{T}, R) .$$

Ragionando sulla U^{-1} ne viene analogamente

$$P_c(T, Q) \leq P_c(\overline{T}, R) ,$$

dal confronto delle quali si deduce, nel caso particolare preso in esame,

$$P_c(T, Q) = P_c(\overline{T}, R) .$$

13. - In questo numero continuo la dimostrazione del teorema precedentemente enunciato considerando il caso generale.

In virtù della ipotesi che (T, Q) e $(\overline{T}, R)$ siano due rappresentazioni della stessa superficie di Frechet esiste una successione di trasformazioni

$$U_n: \quad u = u_n(\bar{u}, \bar{v}) , \quad v = v_n(\bar{u}, \bar{v}) , \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in R , n = 1, 2, \ldots ,$$

di R in Q, biunivoche e continue con le proprie misure U_n^{-1}, tale che si ha uniformemente in Q

$$\lim_{n\to\infty} x[u_n(\bar{u}, \bar{v}), v_n(\bar{u}, \bar{v})] = \bar{x}(\bar{u}, \bar{v}) , \lim_{n\to\infty} y[u_n(\bar{u}, \bar{v}) , v_n(\bar{u} \bar{v})] =$$

$$= \bar{y}(\bar{u}, \bar{v}) , \lim_{n\to\infty} z[u_n(\bar{u}, \bar{v}), v_n(\bar{u}, \bar{v})] = \bar{z}(\bar{u}, \bar{v}), (\bar{u}, \bar{v}) \in R$$

e perciò in virtù del teorema dimostrato in 11 si deduce

$$P_c(\overline{T}, R) \leq \varliminf_{n\to\infty} P_c(T_n, R)$$

dove si è posto

$$T_n \equiv T \cdot U_n: \ x = x[u_n(\bar{u}, \bar{v}), v_n(\bar{u}, \bar{v})], \ y = y[u_n(\bar{u}, \bar{v}), v_n(\bar{u}, \bar{v})],$$

$$z = z[u_n(\bar{u}, \bar{v}), v_n(\bar{u}, \bar{v})], (\bar{u}, \bar{v}) \in R .$$

Da questa e dalla uguaglianza

$$P_c(T_n, R) = P_c(T, Q)$$

conseguita in 12 si deduce allora

$$P_c(\overline{T}, R) \leq \varliminf_{n \to \infty} P_c(T, Q) = P_c(T, Q) .$$

La disuguaglianza complementare si deduce in modo analogo. Ne viene perciò

$$P_c(T, Q) = P_c(\overline{T}, R) ,$$

che dimostra completamente il teorema.

14. – Da quanto sopra risulta che se S è la superficie di FRECHET data in 2 la quantità $P_c(T, Q)$ è indipendente dalla rappresentazione T di S rispetto alla terna $x\,y\,z$. Poichè la quantità $P_c(T, Q)$ è anche, evidentemente, indipendente dalla terna scelta per rappresentare la superficie S ne discende che la quantità $P_c(T, Q)$ dipende solo dalla superficie S.

Posso perciò porre, come in 5 $P(S)$ in luogo di $P_c(T, Q)$.

§ 3. – Confronto fra le quantità $P_c(S)$ ed $L(S)$.

15. – In questo numero dimostro il

TEOREMA: *Se S è la superficie di Frechet data in 2, e T è la rappresentazione di S ivi considerata si ha*

$$P_c(S) \leq L(S) \leq 3\,P_c(S) .$$

DIM. – La disuguaglianza di sinistra è stata provata da L. CESARI [3].

Ne riporto la dimostrazione per comodità del lettore. Sia r una regione semplice di JORDAN appartenente a Q. Sia $\xi\,\eta\,\zeta$ una terna cartesiana ortogonale congruente alla terna $x\,y\,z$. Sia T'

la rappresentazione di S rispetto alla terna $\xi\eta\zeta$ che si deduce dalla T mediante cambiamento di coordinate. Poichè l'area di LEBESGUE e l'area secondo GEÖCZE CESARI sono indipendenti dalla orientazione degli assi, e poichè, come si è ricordato nella introduzione, esse coincidono per ogni superficie continua, si ha

$$G_c(T, r) = G_c(T', r) = L(T, r) = L(T', r)\,.$$

Sia σ_r un gruppo di regioni semplici di JORDAN $r_1\, r_2 \ldots . r_n$ appartenenti ad r e prive a due a due di pnnti interni in comune. Sarà

$$\iint_{K'_3} |\,O(\xi, \eta\,; T'_3, r)\,|\, d\xi\, d\eta = g\,(T'_3, r) \leq \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} [g^2\,(T'_1, r) +$$
$$+ g^2\,(T'_2, r) + g^2\,(T'_3, r)] \leq G_c\,(T', r) = L\,(T, r)$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutti i gruppi di regioni σ_r di r. Si ha perciò

$$p\,(T, r) = \underset{\pi}{extr.\ sup.} \iint_{K'_3} |\,O\,(\xi, \eta\,; T'_3, r)\,|\, d\xi\, d\eta \leq L\,(T, r)$$

dove l'estremo superiore è preso rispetto a tutte le possibili orientazioni della terna $\xi\eta\zeta$, o ciò che è lo stesso rispetto a tutte le possibili giaciture di π.

In virtù del teorema I di 10 si ha perciò

$$P_c\,(T, Q) = \underset{\sigma_Q}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} p\,(T, r_i) \leq \underset{\sigma_Q}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} L\,(T, r_i) \leq L\,(T, Q)$$

dove σ_Q è un gruppo di regioni semplici di JORDAN $r_1\, r_2 \ldots . r_n$ appartenenti a Q e prive a due a due di punti interni in comune, e l'estremo superiore è preso rispetto a tutti i possibili gruppi σ_Q. La disuguaglianza di sinistra è così dimostrata.

Per dimostrare la disuguaglianza di destra osservo che per ogni regione di JORDAN r appartenente a Q si ha

$$g_i(T. r) \leq p(T, r) \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

ne risulta

$$g(T, r) = [g^2(T_1, r) + g^2(T_2, r) + g^2(T_3, r)]^{1/2} \leq 3\, p(T, r)$$

e quindi

$$G_c(T, Q) = L(T, Q) \leq 3\, P_c(T, Q).$$

Il teorema enunciato è così completamente dimostrato.

16. - Dal teorema ora dimostrato si deduce il seguente

TEOREMA: *Se S è la superficie di F r e c h e t data in 2, se T è la rappresentazione di S ivi considerata, condizione necessaria e sufficiente affinchè $P_c(S)$ sia finito è che lo sia $L(S)$.*

17. - In questo numero dimostro il seguente

TEOREMA: *Se S è la superficie di F r e c h e t data in 2 e se essa ha area finita secondo L e b e s g u e si ha*

$$P_c(S) \geq L(S).$$

DIM. - In virtù del teorema IV di L. CESARI citato in 10, e della ipotesi che la superficie S ammetta area secondo LEBESGUE finita esiste una rappresentazione di S per la quale le tre trasformazioni piane associate sono assolutamente continue. Suppongo, per semplicità, che questa rappresentazione sia la stessa T di 2.

Risulta perciò

$$L(S) = \iint_Q D(u, v; T)\, du\, dv.$$

Considero i seguenti insiemi di punti di Q

E_1: $(u, v) \in E_1$ se $D(u, v; T) = [H_1^2(u, v; T) + H_2^2(u, v; T) + H_3^2(u, v; T)]^{1/2}$ non esiste,

E_2: $(u, v) \in E_2$ se non è $\lim\limits_{\delta(q) \to 0} \dfrac{L(T, q)}{|q|} = D(u, v; T)$.

Dai teoremi II e III di L. Cesari, riportati in 10 risulta che l'insieme $E = E_1 + E_2$ è di misura nulla.

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio determinino $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme h di Q di misura minore di σ si abbia

$$\iint_h D(u, v; T)\, du\, dv < \varepsilon .$$

Ogni punto (u, v) di $Q - E$ gode delle seguenti proprietà

α) $\lim\limits_{\delta(q) \to 0} \dfrac{L(T, q)}{|q|} = D(u, v; T)$

β) esiste una terna $R\xi\eta\zeta$, $R = T(P)$, $P \equiv (u, v)$ per cui si ha

$$\lim_{\delta(q) \to 0} \frac{G_c(T_1', q)}{|q|} = \lim_{\delta(q) \to 0} \frac{G_c(T_2', q)}{|q|} = 0 , \quad \lim_{\delta(q) \to 0} \frac{G_c(T_3', q)}{|q|} = D(u, v; T)$$

ove si è indicato con q un quadrato con i lati paralleli agli assi u, v appartenente a Q e contenente (u, v) e con $\delta(q)$ il diametro di q.

Per il teorema di copertura di Vitali esiste perciò un gruppo finito di punti di $Q - E$ siano essi $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots (u_n, v_n)$ e di altrettanti quadrati $q_1\, q_2 \ldots . q_n$ con i lati paralleli agli assi u, v appartenenti a Q ed aventi il centro nel corrispondente punto (u_i, u_i) tali che

$$q_i \cdot q_j = 0 , \quad i, j = 1, 2, \ldots n , \quad \text{se } i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^{n} |q_i| > |Q| - \sigma$$

$$\left| \frac{L(T, q_i)}{|q_i|} - D(u_i, v_i; T) \right| < \frac{\varepsilon}{|Q|}, \left| \frac{G(T_3^{(i)}, q_i)}{|q_i|} - D(u_i, v_i; T) \right| < \frac{\varepsilon}{|Q|}$$

essendo ε e σ i numeri sopra introdotti, ed essendo $T^{(r)}$, $T_3^{(i)}$ le trasformazioni che si ottengono da T, T_3 passando dalla terna cartesiana $x\,y\,z$ alla terna $\xi^{(i)}\,\eta^{(i)}\,\zeta^{(i)}$ che corrisponde al punto $(u_i\,v_i)$ secondo la proprietà β).

Da questa si deduce

$$\sum_{i=1}^{n} G_c(T_3^{(i)}, q_i) > \sum_{i=1}^{n} \left\{ D(u_i, v_i; T) - \frac{\varepsilon}{|Q|} \, q_i | \right\} \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} D(u_i, v_i; T) \, | q_i | - \varepsilon >$$

$$> \sum_{i=1}^{n} \left\{ L(T, q_i) - \frac{\varepsilon}{|Q|} \, q_i | \right\} - \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{n} L(T, q_i) - 2\varepsilon ,$$

ed anche in virtù della assoluta continuità della rappresentazione T di S

$$\sum_{i=1}^{n} G_c(T_3^{(i)}, q_i) > \sum_{i=1}^{n} \iint_{q_i} D(u, v; T) \, du\, dv - 2\varepsilon =$$

$$= \iint_{\sum_{i=1}^{n} q_i} D(u, v; T) \, du\, dv - 2\varepsilon = \iint_{Q} D(u, v; T) \, du\, dv -$$

$$- \iint_{Q - \sum_{i=1}^{n} q_i} D(u, v; T) \, du\, dv - 2\varepsilon > \iint_{Q} D(u, v; T) \, du\, dv - 3\varepsilon = L(T, Q) - 3\varepsilon.$$

In virtù della definizione di $G_c(T_3^{(i)}, q_i)$; $i = 1, 2, \ldots n$; è allora possibile determinare un gruppo di poligoni interni a q_i; $i = 1, 2, \ldots n$; siano così $\pi_{i,1}, \pi_{i,2}, \ldots \pi_{i,m_i}$; $i = 1, 2, \ldots n$; a due a due senza punti interni in comune tali che si abbia

$$\sum_{r=1}^{m_i} \iint_{K_3^{(i)}} | O(\xi^{(i)}, \eta^{(i)}; T_3^{(i)}, \pi_{i,r}) | \, d\xi^{(i)} d\eta^{(i)} > G_c(T_3^{(i)}, q_i) - \frac{\varepsilon}{n}, \; i = 1, 2, \ldots n.$$

Se ne deduce allora

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{mi}\iint_{K_3^{(i)}} | O(\xi^{(i)}, \eta^{(i)}; T_3^{(i)}, \pi_{i,r}) | \, d\xi^{(i)} d\eta^{(i)} > L(T, Q) - 4\varepsilon$$

e da questa per la definizione di $P_c(T, Q)$ e l'arbitrarietà di ε

$$P_c(T, Q) \geq L(T, Q) = L(S).$$

In conseguenza del teorema stabilito in 13 risulta quindi

$$P_c(S) \geq L(S).$$

18. - I risultati dei numeri 14, 15, 16, 17 permettono quindi di concludere con il

Teorema: *Se S è una superficie di Frechet del tipo della 2-cella si ha*

$$P_c(S) = L(S).$$

§ 4. - Le aree secondo Peano Radó $P_R(S)$, $P_e(S)$.

19. - Sia S la superficie data in 2 T la rappresentazione di S ivi considerata.

Valendomi della eguaglianza

$$\iint_{k_1} k(y, z; T_1, r)\, dy\, dz = g_e(T_1, r) = G_c(T_1, r)$$

e delle analoghe stabilite da L. Cesari [2] e T. Radó [9] si provano, con argomenti analoghi a quelli del paragrafo 2, per le quantità $P_R(T, Q)$, $P_e(T, Q)$ gli analoghi dei teoremi stabiliti in 11, 12, 13, 14.

Questi teoremi consentono, fra l'altro, di concludere con la indipendenza delle quantità $P_R(T, Q)$, $P_e(T, Q)$ dalla rappresentazione T della superficie S e dal riferimento xyz.

In tal modo risulta legittimo l'uso dei simboli $P_R(S)$, $P_e(S)$ in luogo di $P_R(T, Q)$, $P_e(T, Q)$.

20. - Confronto in questo numero le quantità $P_e(S)$ ed $L(S)$.

Un esame delle definizioni prova che si ha, in virtù della eguaglianza ricordata in 19,

$$P_c(S) \leq P_e(S),$$

per ogni superficie di Frechet S.

In forza della uguaglianza $P_c(S) = L(S)$ basterà provare che $P_e(S) \leq L(S)$ perchè ne risulti $P_e(S) = L(S)$. Allo scopo osservo che, usando delle notazioni fin qui adottate e della uguaglianza di 19, si può scrivere

$$\iint_{K'_3} |k(\xi, \eta; T'_3, r)| \, d\xi \, d\eta = g_e(T'_3, r) = G_e(T'_3, r) =$$

$$= \underset{\sigma_r}{\text{extr. sup.}} \sum_{i=1}^{n} g(T'_3, r) \leq$$

$$\leq \underset{\sigma_r}{\text{extr. sup.}} \sum_{i=1}^{n} [g^2(T'_1, r_i) + g^2(T'_2, r_i) + g^2(T'_3, r_i)]^{1/2} = G_o(T', r)$$

dalla quale per la indipendenza dell'area $G_c(S)$ dalla orientazione degli assi S è riferita si deduce

$$\iint_{K'_3} |k(\xi, \eta; T'_3, r)| \, d\xi \, d\eta \leq G_c(T, r) = L(T, r)$$

e quindi, per ogni regione semplice r di Jordan di Q

$$p_e(T, r) \leq L(T, r).$$

Allo stesso modo che in 15 si può allora con la disuguaglianza

$$P_e(T, Q) = P_e(S) \leq L(S) .$$

Risulta così provato che per ogni superficie S di Fouchet del tipo della 2-cella si ha

$$P_e(S) = L(S) .$$

21. - Allo scopo di confrontare le quantità $P_R(S)$ ed $L(S)$ raccolgo in questo numero alcune proprietà delle quantità $\varphi(T_i, r)$; $i = 1, 2, 3$; definite in 8.

Sia r una regione semplice di Jordan appartenente a Q. I simboli r^*, $T(r^*)$, $T_i(r^*)$, $O(y, z, T_1, r)$, $O(z, x; T_2, r)$, $O(x, y; T_3, r)$ conservino il significato precedentemente fissato.

Sia $o(y, z; T_1, r)$ la funzione che vale 1 se $O(y, z; T_1, r) \neq 0$, vale 0 altrimenti. In modo analogo siano definite le funzioni $o(z, x; T_2, r)$, $o(x, y; T_3, r)$.

Le quantità

$$u(T_1, r) = \iint_{K_1} o(y, z; T_1, r)\, dy\, dz,\ u(T_2, r) =$$

$$= \iint_{K_2} o(z, x; T_2, r)\, dz\, dx,\ u(T_3, r) = \iint_{K_3} o(x, y; T_3, r)\, dx\, dy$$

$$u(T, r) = [u^2(T_1, r) + u^2(T_2, r) + u^2(T_3, r)]^{1/2}$$

sono state studiate da L. Cesari (2), il quale ha dimostrato le seguenti relazioni

$$G_e(T, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} u(T, r_i),$$

$$G_e(T_s, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} u(T_s, r_i),\ s = 1, 2, 3 .$$

Sussistono inoltre le relazioni

$$u(T_s, r) \leq \varphi(T_s, r) \leq g_e(T_s, r)\,;\ s = 1, 2, 3\,;$$

valide per ogni regione semplice di JORDAN r appartenente a Q, dalle quale si desumono le

$$G_c(T, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} \varphi(T, r_i)\,,$$

$$G_c(T_s, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} \varphi(T_s, r_i)\,,\ s = 1, 2, 3\,.$$

22. - Un facile esame delle definizioni delle quantità $P_e(S)$, $P_R(S)$ permette di concludere che si ha, per ogni superficie S

$$P_R(S) \leq P_e(S)$$

e quindi in virtù dei risultati del numero 20

$$P_R(S) \leq L(S)\,.$$

Osservando poi che per ogni regione semplice di JORDAN r appartenente a Q si ha

$$u(T_s, r) \leq p_\varphi(T_s, r)\,;\quad s = 1, 2, 3, \quad u(T, r) \leq 3\, p_\varphi(T, r)$$

si deduce per ogni superficie S

$$L(S) = G_e(S) = G_c(T, Q) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} u(T, r_i) \leq$$

$$\leq \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} 3\, p_\varphi(T, r_i) < 3\, P_R(T, Q) = 3\, P_R(S)\,.$$

Se infine nella ultima parte del ragionamento fatto in 17 si usa la relazione

$$G_c(T_3, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} \varphi(T_3, r_i)$$

anzichè la

$$G_c(T_3, r) = \underset{\sigma_r}{extr.\ sup.} \sum_{i=1}^{n} g(T_3, r_i)$$

si ottiene facilmente anche nel presente caso la disuguaglianza

$$P_R(S) \geq L(S)$$

valida per ogni superficie S, di FRECHET del tipo della 2-cella, di area secondo LEBESGUE finita.

Da tutto ciò risulta allora per ogni superficie di FRECHET del tipo della 2-cella

$$P_R(S) = L(S).$$

§ 5. - Le aree secondo Geöcze-Radó $G_R(S)$, $G_e(S)$.

23. - Sia S la superficie data in 2, e sia T la rappresentazione di S ivi considerata.

Gli argomenti usati nel paragrafo 4 permettono intanto di affermare che è

$$G_R(T, Q) \geq G_c(S), \quad G_e(T, Q) \geq G_c(S).$$

Dalle definizioni risulta inoltre

$$G_R(T, Q) \leq G_e(T, Q).$$

È stato dimostrato da T. RADÓ [10] che si ha

$$G_e(T, Q) \leq L(S).$$

Tutte queste considerazioni mostrano che si ha, qualunque sia la rappresentazione adottata per S e qualunque sia il riferimento rispetto al quale S è rappresentata

$$G_R(T, Q) = G_e(T, Q) = L(S).$$

Ne risulta in particolare che le quantità $G_R(T, Q)$, $G_e(T, Q)$ sono indipendenti dalla rappresentazione di S e dalla terna rispetto alla quale S è riferita.

Si può perciò porre $G_e(S)$ e $G_R(S)$ in luogo di $G_e(T, Q)$ e $G_R(T, Q)$.

§ 6. - **Conclusione.**

24. - Si è perciò conseguito il seguente finale

Teorema: *Se S è una superficie di Frechet del tipo della 2-cella esistono indipendentemente dalla rappresentazione di S e dalla terna scelta per rappresentare S le quantità $P_c(S)$, $P_R(S)$, $P_e(S)$, $G_c(S)$, $G_R(S)$, $G_e(S)$.*

Vale inoltre la uguaglianza

$$P_c(S) = P_R(S) = P_e(S) = G_c(S) = G_R(S) = G_e(S) = L(S).$$

BIBLIOGRAFIA

1. - L. Cesari: *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue* [Annali R. Scuola Normale Sup. Pisa - II Serie - vol. X (1941) pp. 253-294 vol. XI (1942) pp. 1-42].

2. - L. Cesari: *Sui fondamenti geometrici dell' integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica.* [Memorie R. Accademia d'Italia, vol. XIII (1943) pp. 1323-1481].

3. - L. Cesari: *Sulle trasformazioni continue e sull' area delle superficie.* [Memorie R. Accademia d' Italia, vol. XII (1942) pp. 1305-1397].

4. - L. Cesari: *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie.* [Memorie R. Accademia d' Italia, vol. XIV (1944) pp. 891-950].

5. - L. Cesari: *Parametrizzazione delle superficie continue di area finita*

secondo L e b e s g u e. [Annali di Mat. pura ed applicata. Serie IV – Tomo XXVI (1947) pp. 301–374].

6. - L. Cesari : *Proprietà tangenziali delle superficie continue.* [Commentarii Math. Helvetici, vol. XXII (1949) pp. 1-16].

7. – T. Radó : *Sur l'aire des surfaces continues.* [Atti del congresso internazionale dei matematici - Bologna (1928) vol. VI pp. 355 360].

8. – T. Radó – P. V. Reichelderfer : *A theory of absolutely continuous transformations in the plane.* [Trans. Amer. Math. Soc., vol. XXXXIX (1941) pp. 258-307].

9. – T. Radó : *Two – dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity.* [Duke Math. Journal, vol. XIV (1947) pp. 587–608].

10. – T. Radó : *Length and area.* [Amer. Math. Soc. Colloquium publications, vol. XXX].

11. – P. V. Reicheldeefer : *On bounded variation and absolute continuity for parametric representations of continuous surfaces.* [Trans. – Amer. Math. Soc., vol. LIII (1943) pp. 251–291].