RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MICHELE SCE

Osservazioni sulle forme quasi-canonica e pseudo-canonica delle matrici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 324-339

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__324_0>

OSSERVAZIONI SULLE FORME QUASI-CANONICA E PSEUDO-CANONICA DELLE MATRICI

Nota (*) *di* MICHELE SCE (*a Pisa*).

Nella Nota: *Forma quasi canonica delle matrici* di S. CHERUBINO [1] si dimostra che mediante trasformazioni unitarie ogni matrice complessa A si può portare alla forma, detta quasi-canonica

$$
(1) \qquad \left\| \begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_{12} & \cdots\cdots & C_{1m} \\ \hline 0 & C_2 & \cdots\cdots & C_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & C_m \end{array} \right\|
$$

dove m è il numero delle radici caratteristiche di A, le C_i essendo matrici della forma

$$
(2) \qquad \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \alpha_i I_{h_0^i} & c_{01}^i & \cdots\cdots & c_{0j_i}^i \\ \hline 0 & \alpha_i I_{h_1^i} & \cdots\cdots & c_{1j_i}^i \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & \alpha I_{h_{j_i}^i} \end{array} \right\|
$$

In queste C_i le matrici $c_{s-1,s}^i$ $(s = 1, \ldots, j_i)$ sono a righe linearmente indipendenti sì che mettono in evidenza la segnatura della radice caratteristica α_i di A e $j_i + 1$ è l'indice di α_i.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 aprile 1950.

(1) Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa, s. 3ª, v. 2º, pp. 151-166, § 3.

Se la matrice A mediante trasformazioni unitarie, si porta ad una forma nella quale gli elementi al di sotto della diagonale principale sono tutti zero, mentre su tale diagonale sono le radici caratteristiche di A, senza però supporre che radici caratteristiche eguali siano necessariamente consecutive, diremo che si è portata A a *forma pseudo-canonica.* È chiaro che le forme quasi-canoniche sono pseudo-canoniche, ma non viceversa.

Salvo il fatto che questo risultato, qui si raggiunge con trasformazioni unitarie, la forma pseudo-canonica risale a F. SCHUR ed è usata, per. es., da M. CIPOLLA (2) col nome di *forma normale*; questo Autore dimostra che due sostituzioni commutabili possono ridursi a forma normale con la stessa sostituzione. Questo teorema viene esteso a più sostituzioni a due a due commutabili e ne viene dedotto un notevole teorema di G. FROBENIUS che anche noi dimostreremo (3).

In queste pagine cercheremo in primo luogo delle condizioni sufficienti affinchè date p matrici, $p-1$ vengano portate a forma pseudo-canonica ed una a forma quasi-canonica con la stessa matrice unitaria. Questo ci farà ritrovare i teoremi citati.

Dopo di che, introducendo per comodità la nozione di matrici *pseudo simili* otteniamo alcuni risultati che non ci consta siano stati da altri segnalati. Insieme a questi, ritroviamo alcune notevoli proprietà che in queste righe vengono collegate tra loro e alle altre qui mentovate appunto dalle nozioni di forme quasi-canonica e pseudo-canonica.

1. – LEMMA 1 : *se C è la forma quasi-canonica di una matrice A che ha la sola radice caratteristica α ed M è una matrice quadrata che non ammetta α come radice caratteristica, ogni matrice b tale che*

$$Mb = bC \tag{1.1}$$

è nulla.

(2) *Analisi algebrica* [3ª ed., Milano (1948)] n. 276.

(3) La nostra dimostrazione è sostanzialmente la stessa di quella data da S. CHERUBINO nella Nota: *Sulle matrici permutabili con una data.* [Rend. Sem. Mat. Padova (1936), v. 7], pp. 128–156, § 5.

Sia C di ordine μ ed M di ordine n; sicchè b è di tipo (n, μ). Se

$$(h_0, h_1, \ldots, h_j)$$

è la segnatura di C, scriveremo

$$b = (b_0 \mid b_1 \mid \ldots . \mid b_j) \tag{2.1}$$

con b_k di tipo (n, h_k). Sostituendo la (2) e la (2.1) nella (1.1) questa diventa

$$M(b_0 \mid b_1 \mid \ldots . \mid b_j) = (b_0 \mid b_1 \mid \ldots . \mid b_j) \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \alpha I_{h_0} & c_{01} & \cdots & c_{0j} \\ \hline 0 & \alpha I_{h_1} & \cdots & c_{1j} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \alpha I_{h_j} \end{array} \right\|$$

Eseguendo i prodotti si ha:

$$M b_0 = b_0 \alpha I_{h_0} \qquad \text{cioè} \qquad (M - \alpha I_n) b_0 = 0$$

e poichè $(M - \alpha I_n)$ è quadrata non degenere, deve essere:

$$b_0 = 0 .$$

Allora da

$$M b_1 = b_0 c_{01} + b_1 \alpha I_{h_1}$$

si ha

$$M b_1 = \alpha b_1 \qquad \text{cioè} \qquad (M - \alpha I_n) b_1 = 0$$

e quindi

$$b_1 = 0 .$$

Così proseguendo si dimostra il lemma.

Teorema 1: *se due matrici A e B di ordine n sono permutabili, esiste una matrice unitaria che mentre porta A a forma quasi-canonica, porta B a forma pseudo-canonica.*

Sia infatti U la matrice unitaria che porta a forma quasi-canonica A; cioè si abbia

$$U A \overline{U}_{-1} = C$$

con C data dalla (1). Posto

$$U B \overline{U}_{-1} = B'$$

dalla permutabilità di A e B si ha:

$$C B' = B' C. \tag{3.1}$$

Cominciamo dal supporre che A abbia una sola radice caratteristica, cioè che C abbia la forma (2). Scriviamo B' sotto la forma

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} & B'' & & & B''' \\ \hline B_0 & B_1 & \cdots & B_{j-1} & B_j \end{array} \right\| \tag{4.1}$$

con B'' di ordine $n - h_j$, B_k di tipo (h_j, h_k); sostituendo nella (3.1) si ha:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} \alpha I_{h_0} & c_{01} & \cdots & c_{0j} \\ \hline 0 & \alpha I_{h_1} & \cdots & c_{1j} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \alpha I_{h_j} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc|c} & B'' & & & B''' \\ \hline B_0 & B_1 & \cdots & B_{j-1} & B_j \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} & B'' & & & B''' \\ \hline B_0 & B_1 & \cdots & B_{j-1} & B_j \end{array} \right\| C.$$

Da questa otteniamo

$$\alpha (B_0 \mid B_1 \mid \ldots \mid B_{j-1} \mid B_j) = (B_0 \mid B_1 \mid \ldots \mid B_{j-1} \mid B_j)\, C$$

il cui secondo membro si scrive:

$$(B_0 \mid B_1 \mid \ldots \mid B_{j-1} \mid B_j) \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \alpha I_{h_0} & c_{01} & \cdots & c_{0j} \\ \hline 0 & \alpha I_{h_1} & \cdots & c_{1j} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & \alpha I_{h_j} \end{array} \right\|$$

Eseguendo i prodotti si ha:

$$\alpha B_1 = B_0 c_{01} + B_1 \alpha I_{h_1}$$

che ci dà

$$B_0 c_{01} = 0$$

e poichè c_{01} ha le righe linearmente indipendenti, dev'essere:

$$B_0 = 0 . \tag{5.1}$$

Analogamente da

$$\alpha B_2 = B_0 c_{02} + B_1 c_{12} + B_2 \alpha I_{h_2}$$

si deduce

$$B_1 c_{12} = 0$$

e quindi

$$B_1 = 0 .$$

Così proseguendo, si ha che tutte le B_k sino a B_{j-1} compresa sono nulle. Allora risulta

$$B' = \left\| \begin{array}{c|c} B'' & B''' \\ \hline 0 & B_j \end{array} \right\|$$

e scritta la (2) sotto la forma

$$\left\| \begin{array}{c|c} C' & C'' \\ \hline 0 & \alpha I_{h_j} \end{array} \right\|$$

la (3.1) diventa

$$\left\| \begin{array}{c|c} C' & C'' \\ \hline 0 & \alpha I_{h_j} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} B'' & B''' \\ \hline 0 & B_j \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} B'' & B''' \\ \hline 0 & B_j \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} C' & C'' \\ \hline 0 & \alpha I_{h_j} \end{array} \right\|$$

dalla quale si ha

$$C' B'' = B'' C' .$$

Poichè C' è della stessa forma di C si può ripetere il ragionamento di poco fa ancora una o più volte e si trova che B' è della forma

$$(6.1) \qquad B' = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} b_{00} & b_{01} & \cdots\cdots & b_{0j} \\ \hline 0 & b_{11} & \cdots\cdots & b_{1j} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & b_{jj} \end{array} \right\|$$

Perciò, se C ha segnatura unitaria, cioè se ogni $h_k = 1$, mediante la U si è portato B a forma pseudo-canonica. Se C non ha segnatura unitaria b_{kk} è una matrice di ordine h_k che sarà portata a forma quasi-canonica per es. dalla matrice unitaria u_k. La matrice unitaria U' composta mediante le u_k $(k = 0, 1, \ldots, j)$, come si vede subito, porta B' a forma pseudo-canonica, mentre

$$U' \, C \, \overline{U}'_{-1} = C'$$

rimane quasi-canonica. Per quest'ultimo fatto basta osservare che indicando con c'_{rs} le matrici corrispondenti in C' alle c_{rs} di C, si ha

$$u_r \, c_{rs} \, (\bar{u}_s)_{-1} = c'_{rs}$$

e quindi che le c_{rs} aventi righe linearmente indipendenti danno delle c'_{rs} ancora a righe linearmente indipendenti. La matrice unitaria $U' \, U$ porta dunque A a forma quasi-canonica e B a forma pseudo-canonica.

Abbia ora A $m > 1$ radici caratteristiche e sia ancora C la sua forma quasi-canonica. Scrivendo C e B' sotto le forme rispettive

$$\left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C'' \\ \hline 0 & C' \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right\|$$

dove C_1 ha la forma (2) e C' ha radici caratteristiche diverse da quella di C_1, la (3.1) ci dà:

$$(7.1) \qquad C' \, B_3 = B_3 \, C_1 \, .$$

Ma le matrici C', C_1, B_3 soddisfano alle ipotesi di Lemma 1, quindi

$$B_3 = 0 .$$

Perciò la (3.1) ci dà anche:

$$C_1 B_1 = B_1 C_1 \qquad\qquad C' B_4 = B_4 C' .$$

La C' ha la stessa forma della (1), sicchè può ragionarsi come prima, ancora una o più volte e si trova che B' ha la forma:

$$\text{(8.1)} \qquad \left\| \begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ \hline 0 & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_{mm} \end{array} \right\|$$

e perciò che la (3.1) dà luogo alle m relazioni

$$C_k B_{kk} = B_{kk} C_k \qquad\qquad (k = 1, \ldots, m) .$$

Allora per la prima parte del teorema esiste una matrice unitaria U_k che lascia C_k in forma quasi-canonica e porta B_{kk} in quella pseudo-canonica; onde, ecc.

Osservazione: val forse la pena di notare che ogni matrice unitaria che porti a forma quasi-canonica A porta a forma pseudo-canonica tutte le matrici permutabili con A allora e solo che la segnatura di A è unitaria. Allora per i teoremi di Volterra (4) e Molien Cecioni (5) possiamo affermare: se e solo se ogni matrice unitaria che porti a forma quasi-canonica A, porta a forma pseudo-canonica tutte le matrici permutabili con A, il gruppo di tutte le matrici permutabili con A è abeliano ed è esaurito dalle funzioni razionali intere di A.

(4) V. Volterra: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* [Mem. Soc. It. Scienze, s. 3ª, t. 11 (1899)], n. 6.

(5) F. Cecioni: *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici.* [Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (1910), v. 11], n. 17.

TEOREMA 2: *date p matrici $A_1, A_2, \ldots, A_p$ (di ordine n) a due a due permutabili, esiste una matrice unitaria che porta A_1 a forma quasi-canonica e $A_2, \ldots, A_p$ a forma pseudo-canonica.*

Poichè il teorema è vero per $p = 2$, supponiamolo dimostrato per $p > 1$ matrici.

Sia U la matrice unitaria che porta A_1 alla forma quasi-canonica C e poniamo

$$U A_k \overline{U}_{-1} = B_k \qquad (k = 2, \ldots, p).$$

Poichè A_1 è permutabile con tutte le A_k, si ha

$$C B_k = B_k C \qquad (k = 2, \ldots, p) \tag{9.1}$$

e se A_1 è di segnatura unitaria, B_k è una forma pseudo-canonica di A_k ed il teorema è dimostrato. In generale dalla (9.1) si ha che B_k è della forma (8.1) e che le corrispondenti matrici B_{ii} sono della forma (6.1). In queste (8.1) e (6.1) converrà far menzione degli indici k ed i di B_k e delle B_{ii}^k, scrivendo B_{rs}^k e b_{ut}^{ik}. La permutabilità delle B_k tra loro dà luogo a quella delle B_{ii}^k e la permutabilità di queste ultime a quella delle b_{tt}^{ik}. Allora alle $p - 1$ matrici $b_{tt}^{i2}, \ldots, b_{tt}^{ip}$ si può applicare il teorema (supposto valido per $p - 1$ matrici) ed esiste una matrice unitaria u_{ti} che porta b_{tt}^{i2} a forma quasi-canonica e le b_{tt}^{ik} $(k = 3, \ldots, p)$ a forma pseudo-canonica. Dicendo U' la matrice composta mediante queste u_{ti}, prese in ordine opportuno, si ha che $U' U$ porta a forma quasi-canonica A_1 ed a forma pseudo-canonica $A_2, \ldots, A_p$.

2. – Siano A e B due matrici che si possano portare a forma pseudo-canonica con la stessa matrice unitaria; se la matrice unitaria che porta A alla forma quasi-canonica data dalle (1), (2) porta B alla forma pseudo-canonica data dalle (8.1), (6.1) con le b_{ss}^i matrici diagonali di ordine eguale a quello delle corrispondenti matrici scalari $\alpha_i I_{h_s}$ della (2), diremo che A e B sono *pseudo simili*.

2 2

La nozione di pseudo simiglianza è molto diversa da quella di simiglianza, e l'esser due matrici simili non implica che siano pseudo simili.

TEOREMA 3: *se due matrici A e B sono tali che, posto*

$$AB - BA = C \tag{1.2}$$

C sia pseudonulla, permutabile e pseudo simile ad A, esiste una matrice unitaria che porta A a forma quasi-canonica e B a forma pseudo-canonica.

Infatti essendo A e C permutabili esiste una matrice unitaria U che porta A a forma quasi-canonica e C a forma pseudo-canonica. Posto

$$U A \overline{U}_{-1} = A' \qquad U B \overline{U}_{-1} = B' \qquad U C \overline{U}_{-1} = C'$$

si ha

$$A' B' - B' A' = C' . \tag{2.2}$$

Le matrici A' e C' saranno date rispettivamente dalla (1) e dalla (8.1) e possiamo scriverle:

$$A' = \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & A''' \\ \hline 0 & A'' \end{array} \right\| \qquad C' = \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C''' \\ \hline 0 & C'' \end{array} \right\| \tag{3.2}$$

dove A_1 ha la forma (2) e C_1 quella (6.1). Posto allora, con divisione in quadranti dello stesso tipo di quelli di A' e C':

$$B' = \left\| \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right\| \tag{4.2}$$

e sostituendo nella (2.2) si ha:

$$A'' B_3 - B_3 A_1 = 0 , \tag{5.2}$$

quindi, per il Lemma 1:

$$B_3 = 0 .$$

Allora dalla (2.2) si ottiene anche

$$A_1 B_1 - B_1 A_1 = C_1 \qquad\qquad A'' B_4 - B_4 A'' = C'' \;;$$

ma A'' e C'' hanno la stessa forma di A' e C', perciò ripetendo una o più volte il nostro ragionamento, si ottiene che se A' ha la forma (1) B' ha la forma (8.1). E poichè anche C' ha la forma (8.1) la (2.2) dà luogo alle m relazioni

$$A_k B_{kk} - B_{kk} A_k = C_k \qquad (k = 1, \dots, m). \tag{6.2}$$

Suddividendo B_k come A_k e ricordando le ipotesi, le (6.2) si scrivono:

$$\left\|\begin{array}{c|c|c|c}
\alpha_k I_{h_0}^k & a_{01}^k & \cdots & a_{0j_k}^k \\ \hline
0 & \alpha_k I_{h_1}^k & \cdots & a_{1j_k}^k \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & \alpha_k I_{h_{j_k}}^k
\end{array}\right\|
\left\|\begin{array}{c|c|c|c}
b_{00}^k & b_{01}^k & \cdots & b_{0j_k}^k \\ \hline
b_{10}^k & b_{11}^k & \cdots & b_{1j_k}^k \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
b_{j_k 0}^k & b_{j_k 1}^k & \cdots & b_{j_k j_k}^k
\end{array}\right\| -$$

$$-\left\|\begin{array}{c|c|c|c}
b_{00}^k & b_{01}^k & \cdots & b_{0j_k}^k \\ \hline
b_{10}^k & b_{11}^k & \cdots & b_{1j_k}^k \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
b_{j_k 0}^k & b_{j_k 1}^k & \cdots & b_{j_k j_k}^k
\end{array}\right\|
\left\|\begin{array}{c|c|c|c}
\alpha_k I_{h_0}^k & a_{01}^k & \cdots & a_{0j_k}^k \\ \hline
0 & \alpha_k I_{h_1}^k & \cdots & a_{1j_k}^k \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & \alpha_k I_{h_{j_k}}^k
\end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c|c|c}
0 & c_{01}^k & \cdots & c_{0j_k}^k \\ \hline
0 & 0 & \cdots & c_{1j_k}^k \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right\|$$

quindi si ha:

$$\alpha_k I_{h_{j_k}}^k b^k{}_{k1} - b^k_{j_k 0} a^k_{01} - b^k_{j_k 1} \alpha_k I^k_{h_1} = 0 \quad \text{ossia} \quad b^k_{j_k 0} a^k_{01} = 0 \,.$$

Essendo a_{01}^k a righe linearmente indipendenti, risulta

$$b_{j_k 0}^k = 0 \, .$$

Così proseguendo, si ha che:

$$b_{rs}^k = 0 \qquad\qquad \text{per} \quad r > s \, .$$

Allora B_{kk} ha la forma (6.1), quindi esiste una matrice unitaria U_k che lasciando A_k in forma quasi–canonica porta B_{kk} a forma pseudo-canonica. Detta U' la matrice composta mediante le U_k, la matrice $U' U$ è quella che soddisfa il teorema.

Osservazione: notiamo che se, viceversa, esiste una matrice unitaria che porta A a forma quasi–canonica e B a forma pseudo-canonica, C è una matrice pseudonulla e pseudo simile ad A.

Teorema 4: *date p matrici $A_1, \ldots, A_p$ (di ordine n) tali che, posto*

$$A_i A_k - A_k A_i = C_{ik} \tag{7.2}$$

le C_{ik} sono matrici pseudonulle pseudo simili ad A_1 e se inoltre le C_{1k} sono tutte permutabili con A_1, esiste una matrice unitaria che porta a forma quasi-canonica A_1 ed a forma pseudo-canonica $A_2, \ldots, A_p$.

Se U è la matrice unitaria che porta a forma quasi-canonica A_1, poniamo

$$U A_i \overline{U}_{-1} = B_i \qquad\qquad U C_{ik} \overline{U}_{-1} = D_{ik}$$

onde la (7.2) diventa:

$$B_i B_k - B_k B_i = D_{ik} \, . \tag{8.2}$$

Poichè le D_{1k} sono permutabili con B_1 sappiamo dal Teorema 3 che se B_1 ha la forma (1), B_k ha la forma (8.1), qualunque sia k; perciò hanno la forma (8.1) anche $B_i B_k$ e $B_k B_i$ e quindi, per la (8.2), anche D_{ik}. Dunque la (8.2) ci dà:

$$B_{ss}^i B_{ss}^k - B_{ss}^k B_{ss}^i = D_{ss}^{ik} \, . \tag{9.2}$$

Le D_{1k} sono per ipotesi pseudonulle e pseudo simili ad A_1, quindi sempre per il Teorema 3, le B^k_{ss} hanno la forma (6.1) qualunque sia k; perciò hanno la forma (6.1) anche le D^{ik}_{ss}. Dunque la (9.2) dà a sua volta luogo alle

$$b^{is}_{tt}\, b^{ks}_{tt} - b^{ks}_{tt}\, b^{is}_{tt} = d^{(ik)s}_{tt} .$$

Avendo supposto che le C_{ik} siano pseudonulle e pseudo simili a B_1, si ha:

$$d^{(ik)s}_{tt} = 0$$

quindi, lasciando fermo t, le b^{is}_{tt} sono a due a due permutabili al variare di i. Esiste dunque una matrice unitaria u^s_t che porta a forma pseudo-canonica tutte le b^{is}_{tt} $(i = 2, \ldots, p)$. Perciò esiste una matrice unitaria U_s composta mediante le u^s_t che lascia le B^1_{ss} in forma quasi-canonica e porta a forma pseudo-canonica le B^i_{ss}. Se la matrice U' è composta mediante le U_s, il prodotto $U'\,U$ soddisfa al teorema.

3. - Teorema 5: *se $f(x_1, \ldots, x_p)$ è una funzione razionale intera delle $p > 1$ variabili $x_1, \ldots, x_p$ ed $A_1, \ldots, A_p$ sono matrici pseudo-canonizzabili con la stessa matrice unitaria, le radici caratteristiche della matrice $f(A_1, \ldots, A_p)$ si ottengono sostituendo in $f(x_1, \ldots, x_p)$ le variabili x_i con le radici caratteristiche delle corrispondenti A_i convenientemente ordinate; l'ordine con il quale vanno prese queste radici caratteristiche non dipende dalla funzione f ma soltanto dalle matrici $A_1, \ldots, A_p$.*

Perchè il teorema abbia tutta la sua generalità è opportuno considerare le x_i come puri simboli e quindi tali che $x_i\, x_k\, x_i$ non possa essere sostituito da $x_i^2\, x_k$, ecc.

Il teorema, che contiene quello di Frobenius (per il Teorema 2), si dimostra facilmente osservando (cfr. la nota (3)) che combinazioni lineari e prodotti di forme pseudo-canoniche sono ancora forme pseudo-canoniche. L'ordine con il quale vanno prese le radici caratteristiche è dato dalla matrice che porta a forma quasi-canonica una delle A_i (ad es. A_1) che subordina l'ordine delle radici caratteristiche di tutte le A_i a quello di una di esse.

4. - Sappiamo che la forma quasi-canonica di una matrice antisimmetrica è diagonale e quindi canonica; si dimostra analogamente che è diagonale anche la forma pseudo-canonica. Lo stesso accade per le matrici *quasi antisimmetriche* cioè per quelle matrici A tali che

$$A = \varepsilon \bar{A}_{-1} \tag{1.4}$$

dove ε è uno scalare di modulo necessariamente unitario perchè da (1.4) si ha

$$\bar{A}_{-1} = \bar{\varepsilon} A \qquad \text{e quindi} \qquad A = \varepsilon \bar{\varepsilon} A .$$

Basta osservare che se B è una forma pseudo-canonica di A, si ha ancora

$$B = \varepsilon \bar{B}_{-1} .$$

Tenendo presente il teorema 2, si dimostra immediatamente:

Teorema 6: *p matrici quasi antisimmetriche sono a due a due permutabili allora e solo che siano diagonalizzabili con la stessa matrice unitaria.*

Usando questo teorema nel caso di due matrici, una antisimmetrica ed una antiemisimmetrica, si dimostra che, come è noto (6):

Corollario I°: *una matrice è ortogonalmente diagonalizzabile allora e solo che le sue parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica sono permutabili.*

Se ne deduce:

Corollario II°: *una matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile allora e solo che è normale, cioè che*

$$A \bar{A}_{-1} = \bar{A}_{-1} A . \tag{2.4}$$

(6) S. Cherubino: *Sulle matrici permutabili e diagonalizzabili.* [Atti Acc. Peloritana, v. 37 (Messina 1935)], § 2.

Teorema 7 : *p matrici normali sono a due a due permutabili allora e solo che sono diagonalizzabili con la stessa matrice unitaria.*

La sufficienza è manifesta.

Per la necessità si osservi che le matrici normali hanno forme pseudo-canoniche diagonali. Infatti, per il Teorema 1, dalla (2.4) segue che esiste una matrice unitaria U tale che

$$B = U A \overline{U}_{-1} \qquad\qquad C = U \overline{A}_{-1} \overline{U}_{-1}$$

siano entrambe pseudo-canoniche; poichè si ha manifestamente

$$\overline{B} = C_{-1}$$

B e C sono addirittura diagonali. Applicando il Teorema 2 si ha subito il nostro teorema.

5\. - Lemma 2 : *Se una matrice A è stata portata alla forma quasi-canonica* (1), *trasformando per contragredienza mediante una matrice come*

$$(1.5) \qquad \Lambda = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} I_{\mu_1} & \Lambda_{12} & \cdots\cdots & \Lambda_{1m} \\ \hline 0 & I_{\mu_2} & \cdots\cdots & \Lambda_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & I_{\mu_m} \end{array} \right\|$$

con le Λ_{rs} opportune, si possono annullare in (1) *tutte le C_{rs}.*

Scriviamo per brevità :

$$C = \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & C'' \\ \hline 0 & C' \end{array} \right\|$$

dove C_1 ha la forma (2) e prendiamo

$$(2.5) \qquad \Lambda' = \left\| \begin{array}{c|c} I_{\mu_1} & \Lambda_1 \\ \hline 0 & I_{n-\mu_1} \end{array} \right\| .$$

Si può scegliere Λ_1 in modo che si abbia

$$\Lambda' C (\Lambda')^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C' \end{array} \right\| ;$$

basterà prendere Λ_1 tale che

$$C'' + \Lambda_1 C' - C_1 \Lambda_1 = 0 . \tag{3.5}$$

Basta per questo suddividere Λ_1 e C'' opportunamente in parti, in relazione a quelle di C_1 per trovare che le parti di Λ_1, e quindi Λ_1, si determinano univocamente l'una dopo l'altra mediante questa (3.5). Applicando ancora una o più volte lo stesso procedimento si trova la Λ desiderata.

Osservazione: questo lemma ci assicura che le matrici diagonalizzabili, si possono diagonalizzare mediante il prodotto di una matrice unitaria e di una matrice come la (1.5) (il cui determinante è uno).

Siano A e B due matrici permutabili. Da

$$AB = BA$$

per il Teorema 1, si ha la relazione:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ \hline 0 & A_2 & \cdots & A_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A_m \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ \hline 0 & B_2 & \cdots & B_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_m \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c|c|c} B_1 & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ \hline 0 & B_2 & \cdots & B_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_m \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ \hline 0 & A_2 & \cdots & A_{2m} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A_m \end{array} \right\|$$

tra le forme quasi-canonica di A e pseudo-canonica di B; le A_i hanno quindi la forma (2). Trasformando con una matrice come la (1.5) le A_{rs} si annullano e allora si ha ad es.

$$A_1 B_{12} = B_{12} A_2$$

e quindi per il Lemma 1:

$$B_{12} = 0 .$$

Analogamente si vede che si annullano tutte le B_{rs}. Perciò la permutabilità di A e B equivale alle m relazioni:

$$A_i B_i = B_i A_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4.5}$$

dove A_i ha una sola radice caratteristica. Questo riduce il problema di trovare la più generale matrice permutabile con una matrice data a trovare la più generale matrice permutabile con una matrice che abbia un'unica radice caratteristica. Anzi poichè si può scrivere

$$A_i = \alpha_i I_{\mu_i} + J_i$$

dove J_i è una matrice pseudonulla, la (4.5) equivale alla

$$J_i B_i = B_i J_i ;$$

quindi l'unica radice caratteristica di A si può assumere addirittura nulla.

Per la soluzione effettiva del problema rimandiamo alla Nota di S. Cherubino cit. ([3]).

Quanto siam venuti dicendo può servire anche alla ricerca della forma della più generale matrice permutabile in senso lato con una data, pel qual problema rimandiamo ad un'altra Nota di S. Cherubino ([7]).

([7]) *Sulle omografie permutabili*, [Rend. Sem. Mat. Roma, s. 4ª, v. 2° (1938)], pp. 14–46.