Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Zwirner

Criteri di unicità per gli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 273-293

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__273_0>

CRITERI DI UNICITÀ PER GLI INTEGRALI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Memoria (*) *di* GIUSEPPE ZWIRNER (*a Ferrara*).

In un ordine d'idee già seguito da BOMPIANI (1) e proseguito da TONELLI (2) e da SATÔ (3), F. CAFIERO (4) ha dato recentemente un interessante teorema di unicità per il problema di valori iniziali per un'equazione differenziale del tipo $y' = f(x, y)$; teorema che comprende, oltre i criteri di unicità di TONELLI (5), di SCORZA DRAGONI (6) ed il primo dei due criteri da me dati (7), anche tutti i teoremi che l'Autore aveva stabilito, sullo stesso argomento, in

(*) Pervenuta in Redazione il 2 aprile 1950.

(1) E. BOMPIANI: *Un teorema di confronto ed un teorema di unicità per l'equazione differenziale* $y' = f(x, y)$ [Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, s. VI, vol. 1 (1925), pp. 298-302].

(2) L. TONELLI: *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria* [Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, s. VI, vol. 1 (1925), pp. 272-277].

(3) T. SATÔ: *Contribution à l'unicité de la solution d'une équation differentielle ordinaire* [Japanese journal of Mathematics, vol. XIII (1936), pp. 1-6].

(4) F. CAFIERO: *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine* [Giornale di Matematiche di Battaglini, s. IV, vol. LXXVIII (1948-49), pp. 193-215].

(5) Cfr. loc. cit. in (2).

(6) G. SCORZA DRAGONI: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equazione differenziale* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. LIV (1930), pp. 430-448].

(7) G. ZWIRNER: *A proposito di un teorema di unicità per gli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine* [Annali di Matematica pura ed applicata, t. XXIV, s. 4 (1945), pp. 153-156].

una Memoria precedente ([8]). Egli formula il suo teorema nel modo seguente:

Data la funzione $f(x, y)$ definita nel campo chiuso:

$$C: \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a \ , \quad y \subset E_x \ ,$$

supponiamo che per ogni punto $P(\xi, \eta)$ $(\xi < x_0 + a)$ di C esistano due numeri positivi K e δ_2 tali che per ogni numero positivo $\varepsilon < K$ si possono determinare due numeri δ_1, ν ed una funzione $F_{P,\varepsilon}(x, u)$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

i_1) *I numeri δ_1, δ_2, ν soddisfano alle limitazioni:*

$$\delta_2 \leq x_0 + a - \xi \ , \quad 0 \leq \delta_1 < \delta_2 \ , \quad 0 < \nu < \varepsilon \ .$$

i_2) *La funzione $F_{P,\varepsilon}(x, u)$ soddisfa alle ipotesi di Carathéodory in ogni campo del tipo:*

$$\xi + \beta \leq x \leq \xi + \delta_2 \ , \quad \beta \leq u < +\infty \qquad (0 < \beta < \delta_2) \ .$$

i_3) *Risulta:*

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leq F_{P,\varepsilon}(x, y_1 - y_2)$$

quasi dappertutto in $(\xi, \xi + \delta_1)$ per y_1 ed y_2 appartenenti all'intorno di η di semidimensioni K e tali che $0 < y_1 - y_2 \leq \nu$ e quasi dappertutto in $(\xi + \delta_1, \xi + \delta_2)$ per y_1 ed y_2 appartenenti al detto intorno di η e tali che $0 < y_1 - y_2 \leq \varepsilon$.

i_4) *Si può determinare un $h > 0$ in modo tale che l'integrale superiore dell'equazione*

$$u = h + \int_{\xi_0}^{x} F_{P,\varepsilon}(t, u)\, dt \qquad \xi < \xi_0 \leq \xi + h$$

([8]) F. Cafiero: *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine* [Giornale di Matematiche di Battaglini, s. 4ª, vol. 78 (1948), pp. 10-41).

risulti minore di ν *in* $(\xi_0, \xi + \delta_1)$ *e a destra di* $\xi + \delta_1$ *minore di* ε *se* $\delta_1 > 0$, *mentre se* $\delta_1 = 0$ *risulti a destra di* ξ_0 *minore di* ε.

Allora le eventuali soluzioni assolutamente continue dell'equazione:

$$y' = f(x, y)$$

sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale (9).

Questo teorema non comprende però il criterio di unicità dato da Okamura (10) nè quello dato da Satô (11) che lo generalizza.

Non mi è stato difficile formulare una proposizione che estendesse i risultati di Cafiero e di Satô.

Questo risultato è esposto nel penultimo numero della presente Memoria (n. 7).

La parte centrale del mio lavoro è dedicata invece a dimostrare altri nuovi criteri di unicità, relativi sempre al problema considerato.

Dai teoremi generali dati nei nn. 1, 2, 3 deduco (n. 4), come caso particolare, una proposizione che contiene, generalizzandoli, il primo criterio di Tonelli, i due di Scorza Dragoni ed il primo da me dato nella Nota citata in (7). Dopo aver enun-

(9) Oltre a questo teorema il Cafiero, nel lavoro citato in (4), enuncia anche un altro criterio di unicità il quale però ha principalmente un valore teorico; esso, come afferma lo stesso Autore, «ha lo scopo di mettere in vista come tutti i criteri di unicità stabiliti e presi in esame in questa Memoria e nella precedente abbiano una comune base di ipotesi che permette di farli discendere da un unico teorema generale». Quest' ultimo teorema contiene il secondo dei criteri di unicità da me dati nella nota citata in (7), nonchè la proposizione generale di Scorza Dragoni (Cfr. loc. cit. in (6), pp. 447-448) dalla quale il mio criterio si deduce.

(10) H. Okamura : *Sur l'unicité de la solution de* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (Mem. Col. Sc. Kyôto Imp. Univ., serie A, vol. XVII (1934), pp. 319-328], pp. 322-323.

(11) Cfr. loc. cit. in (3).

ciato (n. 5) un altro notevole criterio di unicità, che si deduce sempre dai teoremi generali precedentemente stabiliti, dimostro (n. 6) un altro teorema che estende tutti i risultati dati nei numeri precedenti.

1. – Teorema. *Sia* $f(x, y)$ *una funzione reale di variabili reali definita nell'insieme chiuso* D:

$$D: \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a \,, \qquad y \subset E_x \text{ (}^{12}\text{)}$$

e $\varphi(u, v)$ *una funzione definita e continua, assieme alle sue derivate parziali prime, per ogni coppia di punti* (u, v) *di* E_x *con* $u \geq v$, *positiva per* $u > v$ *e nulla per* $u = v$.

Supponiamo inoltre che:

I) *fissato un numero positivo* ε, *minore di un numero* $K > 0$ *prefissato ad arbitrio, si possano determinare i numeri* δ, ν *e quattro funzioni* $F_\varepsilon(x)$, $\omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)$, $\omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)$, $\alpha_\varepsilon(x)$ — *con* $F_\varepsilon(x)$ *non negativa e sommabile in* $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$, $\omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)$, $\omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)$ *funzioni continue per ogni coppia di punti* (u, v) *di* E_x *con* $u > v$ *e* $\alpha_\varepsilon(x)$ *sommabile in ogni intervallo del tipo* $x_0 + \rho \leq x \leq x_0 + a$ $(0 < \rho < a)$ — *in modo che sia*:

$$0 \leq \delta < a \,, \quad 0 < \nu < \varepsilon \,,$$

e che si abbia:

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} F_\varepsilon(x)\, dx < \nu \tag{1}$$

e

$$\int_C \omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)\, du + \omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)\, dv > \int_{a_1}^{a_2} \alpha_\varepsilon(x)\, dx \tag{2}$$

(12) Con E_x indichiamo un insieme numerico chiuso dipendente da x.

per ogni coppia di punti (a_1, a_2) $(a_1 < a_2)$ *dell'intervallo* $x_0 + \delta < x \leq x_0 + a$ *e per ogni arco di curva rettificabile* C *non incontrante la retta* $u = v$ *e che congiunge un punto dell'insieme* $\varphi(u, v) = \nu$ *con un punto dell'insieme* $\varphi(u, v) = \varepsilon$, *con* $u > v$ *e* u, v *variabili in* E_x; *l'arco di curva* C *intendendosi percorso nel verso che dal primo punto conduce al secondo* [13];

II) *risulti*:

$$\varphi'_u(y, z) f(x, y) + \varphi'_v(y, z) f(x, z) \leq F_\varepsilon(x) \tag{3}$$

quasi dappertutto in $(x_0, x_0 + \delta)$ *e per ogni coppia di punti* (y, z) *di* E_x *con* $y > z$ *e tale che sia* $0 < \varphi(y, z) \leq \nu$. *Sia inoltre*:

$$\omega_\varepsilon^{(1)}(y, z)\; f(x, y) + \omega_\varepsilon^{(2)}(y, z)\; f(x, z) \leq \alpha_\varepsilon(x) \tag{4}$$

quasi dappertutto in $(x_0 + \delta, x_0 + a)$ *e per ogni coppia di punti* (y, z) *di* E_x *con* $y > z$ *e tale che sia* $0 < \varphi(y, z) \leq \varepsilon$.

In tali ipotesi le eventuali soluzioni assolutamente continue dell'equazione:

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal punto iniziale.

Supponiamo, per assurdo, che esistano due soluzioni assolutamente continue $y_1(x)$, $y_2(x)$ dell'equazione (5), uscenti dal punto (x_0, y_0) di D.

Esisterà allora almeno un punto ξ_0 interno all'intervallo $(x_0, x_0 + a)$ in cui risulta $y_1(\xi_0) \neq y_2(\xi_0)$. Sia ξ_1 il massimo punto (certamente esistente) dell'intervallo (x_0, ξ_0) in cui è

$$y_1(\xi_1) = y_2(\xi_1). \tag{6}$$

[13] Supporrò sempre in questo numero che l'integrale curvilineo

$$\int_C \omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)\, du + \omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)\, dv\;,$$

esteso ad un arco di curva di equazioni $u = u(x)$, $v = v(x)$ $(x_0 \leq x \leq x_1)$, si intende calcolato nel verso delle x crescenti.

Sarà allora, per esempio,

$$y_1(x) - y_2(x) > 0 \qquad \text{per} \quad \xi_1 < x \leq \xi_0 .$$

Detto ora M il massimo della funzione $w(x) = \varphi(y_1(x), y_2(x))$ nell'intervallo $\xi_1 \leq x \leq \xi_0$ e fissato ε minore di M e di K, determiniamo in corrispondenza i numeri δ, ν e le funzioni $F_\varepsilon(x)$, $\omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)$, $\omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)$, $\alpha_\varepsilon(x)$, dell'ipotesi I).

Essendo, per la (6), $w(\xi_1) = 0$, indichiamo con $\xi_1 + \delta_1$ il primo punto, a partire da ξ_1, delll'intervallo $\xi_1 \leq x \leq \xi_0$ in cui risulta:

$$w(\xi_1 + \delta_1) = \nu \tag{7}$$

e con $\xi_1 + \delta_2$ il primo punto, sempre partendo da ξ_1, dello stesso intervallo, in cui risulta:

$$w(\xi_1 + \delta_2) = \varepsilon .$$

Sarà:

$$0 < \delta_1 < \delta_2 < \xi_0 - \xi_1 < a ,$$

$$0 < w(x) < \nu \qquad \text{per} \quad \xi_1 < x < \xi_1 + \delta_1 , \tag{8}$$

$$0 < w(x) < \varepsilon \qquad \text{per} \quad \xi_1 < x < \xi_1 + \delta_2 . \tag{9}$$

Proviamo che è:

$$\xi_1 + \delta_1 > x_0 + \delta . \tag{10}$$

La cosa è evidente se è $\delta = 0$. Supposto perciò $\delta > 0$, osserviamo che se non valesse la (10) allora nell'intervallo $\bar{\xi}_1 \leq x \leq \xi_1 + \delta_1$ $(\xi_1 < \bar{\xi}_1 < \xi_1 + \delta_1)$, per le (3), (8) si avrebbe, quasi ovunque:

$$w'(x) \leq F_\varepsilon(x)$$

e quindi

$$w(\xi_1+\delta_1) \leq w(\bar{\xi}_1) + \int_{\bar{\xi}_1}^{\xi_1+\delta_1} F_\varepsilon(x)\,dx .$$

Ora dal fatto che è $w(\xi_1) = 0$, $F_\varepsilon(x)$ non negativa e per la (1), si potrà scegliere il punto $\bar{\xi}_1$, dell'intervallo $\xi_1 < x \leq \xi_1 + \delta_1$, in modo che risulti

$$w(\bar{\xi}_1) + \int_{\bar{\xi}_1}^{\xi_1+\delta_1} F_\varepsilon(x)\,dx < \nu$$

e quindi

$$w(\xi_1+\delta_1) < \nu$$

il che, per la (7), è assurdo.

Premesso ciò, nell'intervallo $\xi_1 + \delta_1 \leq x \leq \xi_1 + \delta_2$, per la (4) e la (9), si avrebbe quasi ovunque,

$$\omega_\varepsilon^{(1)}(y_1(x),\, y_2(x))\; y_1'(x) + \omega_\varepsilon^{(2)}(y_1(x), y_2(x))\; y_2'(x) \leq \alpha_\varepsilon(x) \tag{11}$$

da cui:

$$\int_{\xi_1+\delta_1}^{\xi_1+\delta_2} [\omega_\varepsilon^{(1)}(y_1(x),\, y_2(x))\, y_1'(x) + \omega_\varepsilon^{(2)}(y_1(x),\, y_2(x))\; y_2'(x)]\,dx \leq$$

$$\leq \int_{\xi_1+\delta_1}^{\xi_1+\delta_2} \alpha_\varepsilon(x)\,dx .$$

Dato che in $\xi_1 + \delta_1 \leq x \leq \xi_1 + \delta_2$ le $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono assolutamente continue, si vede che l'integrale a primo membro della soprascritta disuguaglianza non è altro che l'integrale curvilineo dell'espressione differenziale $\omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)\,du + \omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)\,dv$

esteso all'arco di curva rettificabile di equazioni $u = y_1(x)$, $v = y_2(x)$ $(\xi_1 + \delta_1 \leq x \leq \xi_1 + \delta_2)$ e soddisfacente alle ipotesi del teorema.

Detto C tale arco, si avrebbe quindi:

$$\int_C \omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)\, du + \omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)\, dv \leq \int_{\xi_1+\delta_1}^{\xi_1+\delta_2} \alpha_\varepsilon(x)\, dx$$

$$(x_0 + \delta < \xi_1 + \delta_1 < \xi_1 + \delta_2 \leq x_0 + a)$$

il che, per la (2), è assurdo.

Resta con ciò completamente dimostrato il teorema enunciato.

2. - Proviamo ora che nelle ipotesi del teorema precedente, se $y(x)$ e $Y(x)$ sono due soluzioni assolutamente continue dell'equazione (5) appartenenti a D e soddisfacenti, per esempio, alla condizione $y(x_0) > Y(x_0)$, allora in corrispondenza ad un numero arbitrario $\tau > 0$ si può determinare un numero $\eta > 0$ tale che da

$$0 < \varphi(y(x_0), Y(x_0)) < \eta$$

segue

$$0 < \varphi(y(x), Y(x)) < \tau, \tag{12}$$

in tutto il campo a destra di x_0 in cui si possono definire tanto $y(x)$ quanto $Y(x)$.

Osserviamo, innanzi tutto, che in base al teorema di unicità dimostrato o risulta $y(x) > Y(x)$ in tutto il campo, a destra di x_0, in cui si possono definire ambedue queste funzioni, oppure se in un punto x_1, a destra di x_0, risulta $y(x_1) = Y(x_1)$, allora si ha $y(x) = Y(x)$ per ogni x, a destra di x_1, in cui si può definire $y(x)$ e quindi anche $Y(x)$.

Perciò la funzione $\varphi(y(x), Y(x))$ esiste ed è continua in tutto il campo $(x \geq x_0)$ in cui si possono definire ambedue le funzioni $y(x)$, $Y(x)$.

Fissato $\varepsilon < \tau$ e di K, diciamo δ e ν i numeri corrispondenti, per l'ipotesi I), al numero ε e prendiamo $\eta < \nu - \int_{x_0}^{x_0+\delta} F_\varepsilon(x)\,dx$.

Se la (12) non valesse in tutto il campo comune di esistenza di $y(x)$ e $Y(x)$ allora esisterebbe un punto a_1 in cui si avrebbe, posto

$$w_1(x) = \varphi(y(x), Y(x)),$$

$$w_1(a_1) \geq \tau .$$

Essendo $\eta < \nu < \varepsilon < \tau$, diciamo $x_0 + \bar{\delta}_1$ e $x_0 + \bar{\delta}_2$ rispettivamente i primi punti, a partire da x_0, dell'intervallo $x_0 \leq x \leq a_1$, in cui risulta:

$$w_1(x_0 + \bar{\delta}_1) = \nu, \qquad w_1(x_0 + \bar{\delta}_2) = \varepsilon .$$

Sarà:

$$\begin{aligned} &0 < w_1(x) < \nu \qquad &&\text{per } x_0 \leq x < x_0 + \bar{\delta}_1, \\ (13) \qquad &0 < w_1(x) < \varepsilon \qquad &&\text{per } x_0 \leq x < x_0 + \bar{\delta}_2 \end{aligned}$$

e con lo stesso ragionamento svolto nel numero precedente si prova inoltre che risulta

$$0 \leq \delta < \bar{\delta}_1 < \bar{\delta}_2 < a_1 - x_0 .$$

Ma per la (4) e la (13) in $(x_0 + \bar{\delta}_1,\ x_0 + \bar{\delta}_2)$ si avrebbe, quasi ovunque,

$$\omega_\varepsilon^{(1)}(y(x), Y(x))\, y'(x) + \omega_\varepsilon^{(2)}(y(x), Y(x))\, Y'(x) \leq \alpha_\varepsilon(x)$$

e quindi

$$\int_C \omega_\varepsilon^{(1)}(u, v)\,du + \omega_\varepsilon^{(2)}(u, v)\,dv \leq \int_{x_0+\bar{\delta}_1}^{x_0+\bar{\delta}_2} \alpha_\varepsilon(x)\,dx ,$$

ove C indica un arco di curva rettificabile soddisfacente alle ipotesi del teorema.

Ma ciò, in base alla (2), è assurdo e così resta provata l'affermazione fatta.

3. - Si può evidentemente enunciare un criterio di unicità analogo a quello del n. 1 e relativo alle soluzioni assolutamente continue dell'equazione (5) definite nell'intervallo $x \;\; - a \leq x \leq x_0$ e uscenti dal punto (x_0, y_0). Precisamente si dimostra il seguente:

TEOREMA. *Sia $f(x, y)$ una funzione reale di variabili reali definita nell'insieme chiuso*:

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 \;, \qquad y \subset E_x$$

e $\overline{\varphi}(u, v)$ una funzione definita e continua, assieme alle sue derivate parziali prime, per ogni coppia di punti (u, v) di E_x con $u \geq v$, positiva per $u > v$ e nulla per $u = v$.

Supponiamo inoltre che:

I') *fissato un numero $\varepsilon > 0$, minore di un numero $k > 0$ prefissato ad arbitrio, si possano determinare i numeri positivi δ, ν e quattro funzioni $\overline{F}_\varepsilon(x)$, $\overline{\omega}_\varepsilon^{(1)}(u, v)$, $\overline{\omega}_\varepsilon^{(2)}(u, v)$, $\overline{\alpha}_\varepsilon(x)$ — con $\overline{F}_\varepsilon(x)$ non positiva e sommabile in $x_0 - \delta \leq x \leq x_0$, $\overline{\omega}_\varepsilon^{(1)}(u, v)$, $\overline{\omega}_\varepsilon^{(2)}(u, v)$ funzioni continue per ogni coppia di punti (u, v) di E_x con $u > v$ e $\overline{\alpha}_\varepsilon(x)$ sommabile in ogni intervallo del tipo $x_0 - a \leq x < x_0 - \rho$ $(0 < \rho < a)$ — in modo che sia*:

$$0 \leq \delta < a \;, \qquad 0 < \nu < \varepsilon$$

e che si abbia:

$$\int_{x_0}^{x_0 - \delta} \overline{F}_\varepsilon(x)\, dx < \nu$$

e

$$\int_C \overline{\omega}_\varepsilon^{(1)}(u, v)\, du + \overline{\omega}_\varepsilon^{(2)}(u, v)\, dv > \int_{a_1}^{a_2} \overline{\alpha}_\varepsilon(x)\, dx$$

per ogni coppia di punti a_1, a_2 $(a_1 > a_2)$ *dell'intervallo* $x_0 - a \leq x < x_0 - \delta$ *e per ogni arco di curva rettificabile* C *non incontrante la retta* $u = v$ *e che congiunge un punto dell'insieme* $\overline{\varphi}(u, v) = \nu$ *con un punto dell'insieme* $\overline{\varphi}(u, v) = \varepsilon$, *con* $u > v$ *e* u, v *appartenenti a* E_x: *l'arco di curva* C *intendendosi percorso nel verso che dal primo punto conduce al secondo*;

II') *risulti*:

$$\overline{\varphi}'_u(y, z)\, f(x, y) + \overline{\varphi}'_v(y, z)\, f(x, z) \geq \overline{F}_\varepsilon(x)$$

quasi dappertutto in $(x_0 - \delta, x_0)$ *e per ogni coppia di punti* (y, z) *di* E_x *con* $y > z$ *e tale che sia* $0 < \overline{\varphi}(y, z) \leq \nu$. *Sia inoltre*:

$$\overline{\omega}_\varepsilon^{(1)}(y, z)\, f(x, y) + \overline{\omega}_\varepsilon^{(2)}(y, z)\, f(x, z) \geq \overline{\alpha}_\varepsilon(x)$$

quasi dappertutto in $(x_0 - a, x_0 - \delta)$ *e per ogni coppia di punti* (y, z) *di* E_x *con* $y > z$ *e tale che sia* $0 < \overline{\varphi}(y, z) \leq \varepsilon$.

In tali ipotesi le eventuali soluzioni assolutamente continue dell'equazione (5) *sono, a sinistra del punto iniziale, univocamente determinante dal punto iniziale.*

4. - Se si cerca di soddisfare alle ipotesi del teorema del n. 1 con funzioni del tipo:

$$\omega_\varepsilon^{(1)}(u, v) = \frac{\varphi'_u(u, v)}{\omega_\varepsilon[\,|\varphi(u, v)|^\alpha]}, \quad \omega_\varepsilon^{(2)}(u, v) = \frac{\varphi'_v(u, v)}{\omega_\varepsilon[\,|\varphi(u, v)|^\alpha]},$$

con ω_ε positiva per valori positivi dell'argomento e α numero reale positivo, allora la condizione (2) si trasforma nella

$$14)\quad \int_\nu^\varepsilon \frac{dt}{\omega_\varepsilon(t^\alpha)} > \int_{a_1}^{a_2} \alpha_\varepsilon(x)\, dx \quad (x_0 + \delta < a_1 < a_2 \leq x_0 + a).$$

Si può anzi vedere che in questo caso il teorema del n. 1 continua ancora a sussistere anche quando si sostituisce la (14) con la:

$$\int_{\nu}^{\varepsilon} \frac{dt}{\omega_\varepsilon(t^\alpha)} \geq \int_{a_1}^{a_2} \alpha_\varepsilon(x)\, dx \,. \tag{15}$$

Infatti, se si riprende il ragionamento svolto nel n. 1 si vede che la (11) diventa, nelle nostre ipotesi,

$$\frac{\varphi'_u[y_1(x), y_2(x)]}{\omega_\varepsilon[\{\varphi(y_1(x), y_2(x))\}^\alpha]} y'_1(x) + \frac{\varphi'_v[y_1(x), y_2(x)]}{\omega_\varepsilon[\{\varphi(y_1(x), y_2(x))\}^\alpha]} y'_2(x) \leq \alpha_\varepsilon(x$$

valida, quasi ovunque, nella parte comune ai due intervalli $(x_0 + \delta, \xi_1 + \delta_2)$, $(\xi_1, \xi_1 + \delta_2)$. Detto allora ξ_2 un punto maggiore di $x_0 + \delta$ e di ξ_1 e minore di $\xi_1 + \delta_1$, si avrà:

$$0 < w(\xi_2) < \nu$$

e

$$\int_{w(\xi_2)}^{\varepsilon} \frac{dt}{\omega_\varepsilon(t^\alpha)} \leq \int_{\xi_2}^{\xi_1+\delta_2} \alpha_\varepsilon(x)\, dx \,.$$

Essendo $\omega_\varepsilon(t^\alpha)$ funzione positiva dell'argomento, sarà:

$$\int_{\nu}^{\varepsilon} \frac{dt}{\omega_\varepsilon(t^\alpha)} < \int_{\xi_2}^{\xi_1+\delta_2} \alpha_\varepsilon(x)\, dx \,.$$

il che, per la (15), è assurdo.

Siamo così venuti ad enunciare un teorema di unicità per gli integrali dell'equazione (5) che contiene, come caso particolare, un criterio di unicità dato da F. Cafiero (14), criterio che

(14) Cfr. loc. cit. in (4), pp. 209-210. Nell'enunciato di questo criterio leggasi:

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} |F_\varepsilon(x, h_1)|\, dx < \nu \quad \text{anzichè} \quad \int_{x_0}^{x_0+\delta} F_\varepsilon(x, h_1)\, dx < \nu \,.$$

comprende, come ha dimostrato lo stesso Autore, il primo criterio di unicità di TONELLI, i due di SCORZA DRAGONI ed il primo da me dato nel lavoro citato in ([7]).

Resta così provato che i criteri dati da quest' ultimi Autori rientrano, come casi particolari, nel teorema da noi enunciato nel n. 1.

5. – Crediamo non sia privo d' interesse enunciare esplicitamente il seguente criterio d' unicità, che segue ovviamente dalle cose dette nel numero precedente.

Sia $f(x, y)$ una funzione reale di variabili reali definita nel rettangolo R:

$$R: \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a \,, \quad b_1 \leq y \leq b_2 \,, \quad b_1 > 0 \,.$$

Supponiamo inoltre che:

I) *fissato un numero $\varepsilon > 0$, minore di un numero K prefissato a piacere, si possano determinare due numeri δ, ν e tre funzioni $F_\varepsilon(x)$, $\alpha_\varepsilon(x)$, $\psi_\varepsilon(u)$ — dove $F_\varepsilon(x)$, $\alpha_\varepsilon(x)$ hanno il significato chiarito al n. 1 e $\psi_\varepsilon(u)$ è continua e positiva per $u > 0$ — in modo che sia:*

$$0 \leq \delta < a \,, \quad 0 < \nu < \varepsilon$$

e che si abbia:

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} F_\varepsilon(x)\, dx < \nu$$

e

$$\int_{\nu}^{\varepsilon} \frac{du}{\psi_\varepsilon(u^\alpha)} \geq \int_{a_1}^{a_2} \alpha_\varepsilon(x)\, dx$$

con α numero reale positivo e per tutte le coppie di punti a_1, a_2 $(a_1 < a_2)$ dell' intervallo $x_0 + \delta < x \leq x_0 + a$;

II) *risulti*:

$$(n+1)\,[y^n f(x, y) - z^n f(x, z)] \leq F_\varepsilon(x)$$

— *con* n *numero reale* > -1 — *quasi dappertutto in* $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ *e per ogni coppia di punti* (y, z) *con* $b_1 \leq z < y \leq b_2$ *e tale che sia* $0 < y^{n+1} - z^{n+1} \leq \nu$.

Sia inoltre:

$$(n+1)\,[y^n f(x, y) - z^n f(x, y)] \leq \alpha_\varepsilon(x)\, \psi_\varepsilon\,[(y^{n+1} - z^{n+1})^\alpha]$$

quasi dappertutto in $x_0 + \delta \leq x \leq x_0 + a$ *e per ogni coppia di punti* (y, z) *con* $b_1 \leq z < y \leq b_2$ *e tale che sia* $0 < y^{n+1} - z^{n+1} \leq \varepsilon$.

In tali ipotesi le eventuali soluzioni assolutamente continue dell'equazione (5) *sono univocamente determinate dal punto iniziale e ne dipendono con continuità.*

6. - Stabiliamo ora un criterio di unicità, sempre relativo allo stesso problema, che estende i criteri precedentemente dati.

TEOREMA. *Sia* $f(x, y)$ *una funzione reale di variabili reali definita nell'insieme chiuso* D:

$$D:\quad x_0 \leq x \leq x_0 + a\,, \quad y \subset E_x$$

e $\Phi(x, u, v)$ *una funzione definita e continua, assieme alle sue derivate parziali prime, per* $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ *e per ogni coppia di punti* (u, v) *di* E_x *con* $u \geq v$, *positiva per* $u > v$ *e nulla per* $u = v$.

Supponiamo che per ogni punto $P(\xi, \eta)$ $(\xi < x_0 + a)$ *di* D *esistano due numeri positivi* K *e* δ_2 *tali che per ogni numero positivo* $\varepsilon < K$ *si possano determinare i numeri* δ_1, ν *e le funzioni* $\beta_{P,\varepsilon}(x)$, $F_{P,\varepsilon}(x, u)$, $\psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$ *in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni*:

a$_1$) *i numeri* δ_1, δ_2, ν *soddisfano alle limitazioni*:

$$\delta_2 \leq x_0 + a - \xi\,, \quad 0 \leq \delta_1 < \delta_2\,, \quad 0 < \nu < \varepsilon\,;$$

a$_2$) *la funzione* $F_{P,\varepsilon}(x, u)$ *soddisfa alle ipotesi di Carathéodory* [15] *in ogni campo del tipo*:

$$\xi + \beta \leq x \leq \xi + \delta_2\,, \quad \beta \leq u < +\infty \qquad (0 < \beta < \delta_2)\,;$$

a$_3$) *le funzioni* $\psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$ *sono continue per* $\xi + \delta_1 < x \leq x_0 + \delta_2$ *e per ogni coppia di punti* (u, v) *di* E_x *con* $u > v$ *e la* $\beta_{P,\varepsilon}(x)$ *è sommabile in ogni intervallo del tipo* $(\xi + \delta, \xi + \delta_2)$ $(0 < \delta < \delta_2)$, *avendosi inoltre*:

$$(16) \qquad \int_C \psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)\, dx + \psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)\, du + \psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)\, dv >$$
$$> \int_{a_1}^{a_2} \beta_{P,\varepsilon}(x)\, dx$$

per ogni coppia di punti a_1, a_2 *tali che sia* $\xi + \delta_1 < a_1 < a_2 \leq \leq \xi + \delta_2$ *e per ogni arco di curva rettificabile* C *non incontrante il piano* $u - v = 0$ *e congiungente un punto dell'insieme* $\Phi(x, u, v) = \nu$ *con un punto dell'insieme* $\Phi(x, u, v) = \varepsilon$, *con* $\xi + \delta_1 < x \leq \xi + \delta_2$ *e* u, v *variabili nell'intorno di* η *di semi-dimensione* K, *con* $u > v$: *l'arco di curva* C *intendendosi percorso nel verso che dal primo punto conduce al secondo*;

a$_4$) *risulta*:

$$\Phi'_x(x, y, z) + \Phi'_u(x, y, z)\, f(x, y) + \Phi'_v(x, y, z)\, f(x, z) \leq$$
$$\leq F_{P,\varepsilon}[x, \Phi(x, y, z)]$$

[15] Supponiamo cioè che la $F_{P,\varepsilon}(x, u)$ sia misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad u in $\xi \leq x \leq \xi + \delta_2$, $u > 0$ e che per ogni numero $\beta > 0$ e minore di δ_2 si possa determinare una funzione $q_\beta(x)$ sommabile in $\xi + \beta \leq x \leq \xi + \delta_2$ in modo da aversi:

$$|F_{P,\varepsilon}(x, u)| \leq q_\beta(x)$$

per $\xi + \beta \leq x \leq \xi + \delta_2$, $\beta \leq u < +\infty$.

quasi dappertutto in $(\xi, \xi + \delta_1)$ *e per* y, z *appartenenti all'intorno di* η *di semidimensione* K *e tali che sia* $y > z$ *e* $0 < \Phi(x, y, z) \leq \nu$. *Sia inoltre:*

$$(17)\quad \psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, y, z) + \psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, y, z)\, f(x, y) + \psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, y, z)\, f(x, z) \leq \\ \leq \beta_{P,\varepsilon}(x)$$

quasi dappertutto in $(\xi + \delta_1, \xi + \delta_2)$ *e per ogni coppia di punti* (y, z) *appartenenti al detto intorno di* η *e tali che sia* $y > z$ *e* $0 < \Phi(x, y, z) \leq \varepsilon$;

a_5) *si può determinare un numero* $h > 0$ *in modo che l'integrale superiore* (16) *dell'equazione:*

$$u = h + \int_{\xi_0}^{x} F_{P,\varepsilon}(t, u)\, dt \qquad (\xi < \xi_0 \leq \xi + h)$$

risulti minore di ν *in* $(\xi_0, \xi + \delta_1)$ (17).

In tali ipotesi le eventuali soluzioni assolutamente continue dell'equazione (5) *sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.*

Ragionando come al n. 1, diciamo $y_1(x), y_2(x)$ due soluzioni assolutamente continue dell'equazione (5) uscenti dal punto (x_0, y_0) di D.

Esiste allora un intervallo $(\xi, \bar{\xi})$ contenuto in $(x_0, x_0 + a)$ in cui risulta, per esempio:

$$y_1(x) - y_2(x) > 0 \qquad \text{per} \quad \xi < x \leq \bar{\xi}$$

e

$$y_1(\xi) - y_2(\xi) = 0\,.$$

(16) Per le considerazioni svolte da F. Cafiero nel lavoro citato in (8) § 1, tale integrale esiste in un intorno del punto ξ_0.

(17) Precisamente risulti minore di ν nei punti del suo intervallo di esistenza contenuti in $(\xi_0, \xi + \delta_1)$.

Posto

$$\eta = y_1(\xi) = y_2(\xi)$$

determiniamo i numeri K e δ_2 corrispondenti al punto $P(\xi, \eta)$ di D e indichiamo con δ un numero positivo, minore del più piccolo dei due numeri δ_2, $\bar{\xi} - \xi$, in modo che risulti:

$$|\eta - y_1(x)| \leq K, \quad |\eta - y_2(x)| \leq K \qquad \text{per} \quad \xi \leq x \leq \xi + \delta .$$

Posto

$$\bar{w}(x) = \Phi(x, y_1(x), y_2(x))$$

diciamo M il massimo della funzione $\bar{w}(x)$ in $\xi \leq x \leq \xi + \delta$. Fissato poi il numero positivo ε minore di K e di M, determiniamo i numeri δ_1, ν e le funzioni $F_{P,\varepsilon}(x, u)$, $\beta_{P,\varepsilon}(x)$, $\psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$ corrispondenti al punto $P(\xi, \eta)$ e al numero ε.

Essendo $\bar{w}(\xi) = 0$, diciamo $\xi + \bar{\delta}_1$, $\xi + \bar{\delta}_2$ rispettivamente i primi punti, a partire da ξ, dell'intervallo $(\xi, \xi + \delta)$ in cui risulta

$$(18) \qquad \bar{w}(\xi + \bar{\delta}_1) = \nu, \quad \bar{w}(\xi + \bar{\delta}_2) = \varepsilon .$$

Si ha, evidentemente,

$$0 < \bar{\delta}_1 < \bar{\delta}_2 < \delta < \delta_2$$

e

$$(19) \qquad 0 < \bar{w}(x) < \nu \qquad \text{per} \quad \xi < x < \xi + \bar{\delta}_1 ,$$

$$(20) \qquad 0 < \bar{w}(x < \varepsilon \qquad \text{per} \quad \xi < x < \xi + \bar{\delta}_2 .$$

Proviamo che risulta $\bar{\delta}_1 > \delta_1$. La cosa è banale se è $\delta_1 = 0$. Supposto perciò $\delta_1 > 0$ supponiamo per assurdo che sia $\bar{\delta}_1 \leq \delta_1$. In tali ipotesi per la (19) e la a_4), quasi ovunque in $\xi \leq x \leq \xi + \bar{\delta}_1$, si avrebbe:

$$\bar{w}'(x) \leq F_{P,\varepsilon}(x, \bar{w}(x)) .$$

Determinato allora il numero $h > 0$ della condizione $a_5)$, diciamo ξ_0 un punto, certamente esistente, interno ad ambedue gli intervalli $\xi \leq x \leq \xi + \bar{\delta}_1$, $\xi \leq x \leq \xi + h$, in cui risulta:

$$\bar{w}(\xi_0) \leq h .$$

Da un noto teorema di confronto [18], si dedurrebbe allora che l'integrale superiore $u(x)$ dell'equazione:

$$u = h + \int_{\xi_0}^{x} F_{P,\varepsilon}(t, u)\, dt$$

sarebbe definito in tutto $(\xi_0, \xi + \bar{\delta}_1)$ e ivi risulterebbe:

$$\bar{w}(x) \leq u(x) .$$

Ma ciò è assurdo perchè in particolare, per la prima delle (18) e la $a_5)$, si dovrebbe avere:

$$w(\xi + \bar{\delta}_1) = \nu \leq u(\xi + \bar{\delta}_1) < \nu .$$

[18] Cfr. loc. in [8], pp. 19-20.

Per comodità del lettore trascriviamo l'enunciato di questo teorema di confronto.

Sia $F(x, y)$ definita nel campo:

$$C_1:\ x_0 - a \leq x \leq x_0 + a\,,\ b < y < +\infty$$

ed ivi soddisfi alle ipotesi di CARATHÉODORY. *Detta $\omega(x)$ una funzione assolutamente continua in $(x_0, x_0 + a)$ $[(x_0 - a, x_0)]$ ed ivi soddisfacente alla limitazione $b < \omega(x)$, se risulta*

$$\omega'(x) \leq F(x, \omega(x)) \qquad [\omega'(x) \geq F(x, \omega(x))]$$

quasi ovunque in $(x_0, x_0 + a)$ $[(x_0 - a, x_0)]$, l'integrale superiore $G_0(x)$ dell'equazione

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y)\, dt \qquad\qquad y_0 \geq \omega(x_0)$$

è definito in tutto $(x_0, x_0 + a)$ $[x_0 - a, x_0)]$ ed ivi soddisfa alla limitazione $G_0(x) \geq \omega(x)$.

Nel nostro caso questo teorema è applicabile in forza della condizione $a_2)$.

Essendo $\bar{\delta}_1 > \delta_1$, allora nell'intervallo $(\xi + \bar{\delta}_1, \xi + \bar{\delta}_2)$ in base alla (20) e alla (17) si dovrebbe, quasi ovunque, avere:

$$\psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, y_1(x), y_2(x)) + \psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, y_1(x), y_2(x))\, y_1'(x) +$$
$$+ \psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, y_1(x), y_2(x))\, y_2'(x) \leq \beta_{P,\varepsilon}(x)$$

e quindi, posto $u = y_1(x)$, $v = y_2(x)$,

$$(21) \quad \int_C \psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)\, dx + \psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)\, du + \psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)\, dv \leq$$
$$\leq \int_{\xi+\bar{\delta}_1}^{\xi+\bar{\delta}_2} \beta_{P,\varepsilon}(x)\, dx,$$

dove C indica un arco di curva rettificabile soddisfacente alle ipotesi del teorema.

Ma ciò è assurdo perchè la (21) contraddice la (16).

Resta con ciò completamente dimostrato il teorema enunciato.

7. – Il teorema del numero precedente continua ancora a sussistere *se, ferme restando tutte le altre ipotesi, si elimina la condizione* $a_3)$ [19] *e si sostituiscano le* $a_4)$ *e* $a_5)$ *con le*:

$a'_4)$ *risulta*:

$$(22) \quad \Phi'_x(x, y, z) + \Phi'_u(x, y, z)\, f(x, y) + \Phi'_v(x, y, z)\, f(x, z) \leq$$
$$\leq F_{P,\varepsilon}[x, \Phi(x, y, z)]$$

quasi dappertutto in $(\xi, \xi + \delta_1)$ *per* y, z *appartenenti all'intorno di* η *di semidimensione* K *e tali che sia* $y > z$ *e*

[19] E si devono eliminare, s'intende, anche le funzioni $\beta_{P,\varepsilon}(x)$, $\psi^{(1)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(2)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$, $\psi^{(3)}_{P,\varepsilon}(x, u, v)$.

$0 < \Phi(x, y, z) \leq \nu$ *e quasi dappertutto in* $(\xi + \delta_1, \xi + \delta_2)$ *per* y, z *appartenenti al detto intorno di* η *e tali che sia* $y > z$ *e* $0 < \Phi(x, y, z) \leq \varepsilon$;

a'_5) *si può determinare un numero* $h > 0$ *in modo che l'integrale superiore dell'equazione*:

$$u = h + \int_{\xi_0}^{x} F_{P, \varepsilon}(t, u)\, dt \qquad (\xi < \xi_0 \leq \xi + h) \tag{23}$$

risulti minore di ν *in* $(\xi_0, \xi + \delta_1)$ [20] *e a destra di* $\xi + \delta_1$ *minore di* ε *se* $\delta_1 > 0$, *mentre se* $\delta_1 = 0$ *risulti a destra di* ξ_0 *minore di* ε.

Riprendendo infatti il ragionamento svolto nel numero precedente si vede che nell'intervallo $(\xi, \xi + \bar{\delta}_2)$, in base alle (19), (20) e alla a'_4) si dovrebbe, quasi ovunque, avere:

$$\bar{w}'(x) \leq F_{P, \varepsilon}[x, \bar{w}(x)]$$

e quindi l'integrale superiore $u(x)$ dell'equazione (23) si potrebbe definire in tutto $(\xi_0, \xi_0 + \bar{\delta}_2)$ e ivi risulterebbe

$$\bar{w}(x) \leq u(x).$$

Ma ciò è assurdo perchè in particolare, per la seconda delle (18) e la a'_5), si dovrebbe avere:

$$\bar{w}(\xi + \bar{\delta}_2) = \varepsilon \leq u(\xi + \bar{\delta}_2) < \varepsilon.$$

(20) Cfr. nota (17).

Siamo così venuti ad enunciare un teorema che estende sia il criterio di CAFIERO che quello di SATÔ.

OSSERVAZIONE. – Se nel teorema del numero precedente si ammette anche che $f(x, y)$, $F_{P, \varepsilon}(x, u)$ *siano funzioni continue rispetto al complesso delle variabili da cui dipendono e la* (22) *verificata per ogni* x *di* $(\xi, \xi + \delta_2)$, *allora l'ipotesi fatta della continuità delle derivate parziali prime della funzione* $\Phi(x, u, v)$ *si può sostituire con l'ipotesi più generale della totale differenziabilità della* $\Phi(x, u, v)$.

Infatti, se si riprende il ragionamento precedentemente svolto, si vede che dalla

$$\bar{w}'(x) \leq F_{P, \varepsilon}(x, \bar{w}(x)),$$

valida in $\xi_0 \leq x \leq \xi + \bar{\delta}_1$, segue che la funzione

$$\bar{w}(x) - \int_{\xi_0}^{x} F_{P, \varepsilon}(t, \bar{w}(t))\, dt$$

è, in $\xi_0 \leq x \leq \xi + \bar{\delta}_1$, non crescente e perciò in virtù di un noto criterio di confronto (21) si dedurebbe allora

$$\bar{w}(x) \leq u(x) \qquad \xi_0 \leq \xi \leq \xi + \bar{\delta}_1$$

e quindi ecc. ecc.

8. – Si può evidentemente enunciare dei teoremi di unicità analoghi a quelli dei n. 6 e 7 e relativi alle soluzioni assolutamente continue dell'equazione (5) definite nell'intervallo $x_0 - a \leq \leq x \leq x_0$ e uscenti dal punto (x_0, y_0), ma dopo quanto abbiamo detto nessuna difficoltà si presenta a formulare tali criteri.

(21) Cfr. F. CAFIERO: *Su due teoremi di confronto relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine* [Boll. Unione Matematica Italiana, s. III, Anno III (1948), pp. 124–128].