RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Sopra un sistema di equazioni differenziali relativo ai moti rigidi delle varietà riemanniane a tre dimensioni a curvatura costante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 250-272

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__250_0>

SOPRA UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI RELATIVO AI MOTI RIGIDI DELLE VARIETÀ RIEMANNIANE A TRE DIMENSIONI A CURVATURA COSTANTE

Nota (*) *di* ANGELO TONOLO (*a Padova*).

È noto che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un moto infinitesimo di una varietà riemanniana V_n sia rigido, sono state stabilite dal KILLING (1) e sono date da $n(n+1):2$ equazioni differenziali alle derivate parziali del prim'ordine ove figurano le componenti del vettore spostamento.

Prendendo le mosse da queste equazioni, e trasformandole con i metodi del Suo Calcolo Assoluto, il RICCI, in una fondamentale Memoria (2), ottenne un gruppo di equazioni differenziali, pure del primo ordine, dal quale Egli ottenne dei rimarchevoli teoremi sui gruppi di movimenti rigidi nelle varietà riemanniane a tre e ad n dimensioni.

In questa Nota ho voluto iniziare lo studio analitico e geometrico del sistema differenziale ottenuto dal RICCI – sistema che si scinde in due gruppi distinti di equazioni, il secondo gruppo esprimendo le condizioni di integrabilità del primo – limitandomi alle varietà riemanniane a tre dimensioni e a curvatura costante. Ho ottenuto alcuni teoremi i quali danno luogo, naturalmente, ad altrettante proprietà dei moti rigidi delle varietà prese in esame che ho esplicitamente formulate.

(*) Pervenuta in Redazione il 6 aprile 1950.

(1) KILLING: *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, [Crelle's Journal, Band CIX, (1892)].

(2) RICCI: *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni*, [Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Serie 3ª, Tomo XII, (1899)].

Nel § 1 ho richiamato, per comodità del lettore, le equazioni stabilite dal Ricci, ottenendole con un procedimento che ha qualche variante formale con quello esposto nella citata Memoria e che valgono in una varietà a tre dimensioni riemanniana qualsiasi. Nel § II, scritte queste equazioni nelle varietà a curvatura costante, ho dedotto da esse i risultati che formano l'oggetto del presente scritto.

§ I. – Le equazioni differenziali del Ricci nelle varietà riemanniane a tre dimensioni.

Sia $(\alpha,\ \beta,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \tau,\ \omega;\ h,\ k,\ j = 1,\ 2,\ 3)$

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \,, \qquad a = \| a_{\alpha\beta} \| , \tag{1}$$

l' espressione del quadrato dell' elemento lineare di una varietà riemanniana V_3 a tre dimensioni, per ora qualunque. Si supponga che ogni punto P di V_3 subisca uno spostamento infinitesimo $\boldsymbol{PQ}$ in virtù del quale esso passi dalla posizione $P(x^\lambda)$ alla posizione $Q(x^\lambda + \xi^\lambda)$ di V_3, ove le ξ^λ sono le componenti contravarianti del vettore $\boldsymbol{PQ}$, le quali andranno pensate funzioni regolari infinitesime delle variabili x^λ. Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il vettore in discorso definisca uno spostamento rigido di V_3, sono state stabilite dal Killing; esse, con le notazioni del Calcolo del Ricci, sono le seguenti:

$$\nabla_\alpha\, \xi_\beta + \nabla_\beta\, \xi_\alpha = 0 ,$$

ove ∇ denota derivazione covariante rispetto alla forma (1) e le ξ_α sono le componenti covarianti del vettore $\boldsymbol{PQ}$.

Consideriamo in V_3 una terna ortogonale di congruenze di linee, comunque scelta, che denoteremo con Λ, i cui parametri e momenti verranno rispettivamente indicati con $\underset{h}{\lambda}{}^{\mu}$, $\underset{h}{\lambda}{}_{\mu}$: valgono le relazioni

$$(2)\qquad \underset{h}{\lambda}^{\mu}\,\underset{k}{\lambda}_{\mu}=\varepsilon_{hk}\quad ,\qquad\qquad (3)\qquad \underset{h}{\lambda}^{\mu}\,\underset{h}{\lambda}_{\nu}=\varepsilon^{\mu}_{\nu}\ ,$$

ciascun gruppo, come è notissimo, essendo conseguenza dell'altro; in esse le ε_{hk} , ε^{μ}_{ν} rappresentano i simboli del KRONECKER.

Siano ρ_{hk} i coefficienti di rotazione del RICCI relativi alla terna Λ; essi sono definiti dalle posizioni (3)

$$(4)\qquad \rho_{hk}=\underset{h+2}{\lambda}^{\mu}\,\underset{k}{\lambda}^{\nu}\,\nabla_{\nu}\,\underset{h+1}{\lambda}_{\mu}\ ,$$

ovvero dalle equivalenti

$$(5)\qquad \nabla_{\mu}\,\underset{h}{\lambda}_{\nu}=\underset{j}{\lambda}_{\mu}\,[\underset{h+1}{\lambda}_{\nu}\,\rho_{h+2j}-\underset{h+2}{\lambda}_{\nu}\,\rho_{h+1j}].$$

Indichiamo infine con $\varepsilon^{\alpha\beta\tau}$ le componenti contravarianti del tensore ternario ε del RICCI; adoperando le notazioni e la nomenclatura usate dal RICCI nella citata Memoria, porremo

$$(6)\qquad 2\,\mu^{\nu}=\varepsilon^{\alpha\beta\nu}\,\nabla_{\beta}\,\xi_{\alpha}\ ,$$

$$(7)\qquad \delta_{h}=\underset{h}{\lambda}^{\nu}\,\mu_{\nu}=\underset{h}{\lambda}_{\nu}\,\mu^{\nu}\ ,$$

$$(8)\qquad \eta_{h}=\underset{h}{\lambda}^{\nu}\,\xi_{\nu}=\underset{h}{\lambda}_{\nu}\,\xi^{\nu}\ ,$$

e chiameremo rispettivamente le ξ_{α} , μ_{α} le *componenti covarianti del vettore traslazione* e *del vettore rotazione* (4).

Dalle (6), (7), (8) si ricava

(3) In tutte le formule che seguono, conveniamo di ritenere equivalenti gli indici che differiscono fra di loro per tre, o per un multiplo di tre.

(4) La giustificazione di questa nomenclatura si ha subito supponendo che la V_3 sia l'ordinario spazio euclideo e le x^{λ} siano coordinate cartesiane ortogonali. Allora le componenti contravarianti ξ^{α} si identificano con le com-

$$(9) \qquad \nabla_\beta \xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\nu} \mu^\nu ,$$

$$(10) \qquad \xi^\nu = \lambda_h^\nu \eta_h , \qquad (10_1) \qquad \xi_\nu = \lambda_{\nu h} \eta_h ,$$

$$(11) \qquad \mu^\nu = \lambda_h^\nu \delta_h , \qquad (11_1) \qquad \mu_\nu = \lambda_{\nu h} \delta_h .$$

Deriviamo la (8) covariantemente rispetto alla forma (1): si ha

$$(12) \qquad \nabla_\tau \eta_h = \xi^\nu \nabla_\tau \lambda_{\nu h} + \lambda_h^\nu \nabla_\tau \xi_\nu .$$

Moltiplichiamo la (9), dopo di aver sostituito β, α, ν con τ, ν, ω, per λ_h^ν e poi sommiamo rispetto a ν, otteniamo

$$\lambda_h^\nu \nabla_\tau \xi_\nu = \lambda_h^\nu \varepsilon_{\nu\tau\omega} \mu^\omega ,$$

od anche, per la (11),

$$\lambda_h^\nu \nabla_\tau \xi_\nu = \lambda_h^\nu \lambda_k^\omega \varepsilon_{\nu\tau\omega} \delta_k .$$

Teniamo presente che le componenti $\varepsilon_{\nu\tau\omega}$ sono nulle tutte le volte che la permutazione $\nu\tau\omega$ ha almeno due indici eguali, mentre hanno per valore $\pm \sqrt{a}$, secondochè la permutazione soprascritta, essendo formata con indici tutti distinti, essa è di classe pari, o di classe dispari, rispetto alla permutazione 123.

Possiamo allora scrivere

ponenti covarianti ξ_α del vettore $\boldsymbol{PQ}$ e le componenti $\mu_\alpha = \mu^\alpha$ sono date da

$$\mu_\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_{\alpha+1}}{\partial x^{\alpha+2}} - \frac{\partial \xi_{\alpha+2}}{\partial x^{\alpha+1}} \right] .$$

Si consideri ora un mezzo continuo dello spazio ordinario e in esso una particella σ: è noto che la deformazione più generale di σ consta di un moto rigido e di tre dilatazioni semplici secondo le rette principali della deformazione relative ad un punto interno di σ. Nel moto rigido della particella, le ξ_α rappresentano le componenti del vettore traslazione e le μ_α quelle del vettore rotazione.

$$\lambda_h^{\nu} \nabla_\tau \xi_\nu = \varepsilon_{\tau+2\,\tau\,\tau+1} \left[\lambda_h^{\tau+2} \lambda_k^{\tau+1} - \lambda_h^{\tau+1} \lambda_k^{\tau+2}\right] \delta_k =$$

$$= \sqrt{a} \left[\lambda_h^{\tau+2} \lambda_{h+1}^{\tau+1} - \lambda_h^{\tau+1} \lambda_{h+1}^{\tau+2}\right] \delta_{h+1} +$$

$$+ \sqrt{a} \left[\lambda_h^{\tau+2} \lambda_{h+2}^{\tau+1} - \lambda_h^{\tau+1} \lambda_{h+2}^{\tau+2}\right] \delta_{h+2} \,.$$

Se ora ricordiamo che i due determinanti $\|\lambda_{h\nu}\| = \sqrt{a}$ e $\|\lambda_h^{\nu}\| = 1 : \sqrt{a}$ sono reciproci in senso algebrico, si trae

$$(13) \qquad \lambda_h^{\nu} \nabla_\tau \xi_\nu = \lambda_{h+1\,\tau}\, \delta_{h+2} - \lambda_{h+2\,\tau}\, \delta_{h+1} \,.$$

Sostituendo la (13) nella (12), in virtù della (8), si ha in definitiva

$$(14) \qquad \nabla_\tau \eta_h = \lambda_{h+1\,\tau}\, \delta_{h+2} - \lambda_{h+2\,\tau}\, \delta_{h+1} + \lambda_{j\,\tau} \left[\rho_{h+2\,j}\, \eta_{h+1} - \rho_{h+1\,j}\, \eta_{h+2}\right] .$$

Col simbolo ∂_k intendiamo derivazione ordinaria rispetto all'arco s_k della linea k appartenente alla congruenza $[k]$ della terna Λ: si ha, per un generico scalare $f(x^\lambda)$,

$$(15) \qquad \partial_k f(x^\lambda) = \lambda_k^{\tau} \nabla_\tau f(x^\lambda) \,.$$

Moltiplicando allora la (14) per λ_k^{τ}, sommando rispetto a τ, tenendo conto della (2) e facendo successivamente $k = h, h+1, h+2$, si ricava il *primo sistema di equazioni differenziali del* Ricci

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \partial_h \eta_h = \rho_{h+2\,h}\, \eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\, \eta_{h+2} \,, \\ \partial_{h+1} \eta_h = \rho_{h+2\,h+1}\, \eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+1}\, \eta_{h+2} + \delta_{h+2} \,, \\ \partial_{h+2} \eta_h = \rho_{h+2\,h+2}\, \eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+2}\, \eta_{h+2} - \delta_{h+1} \,. \end{cases}$$

Scriviamo ora le condizioni di integrabilità del sistema differenziale (A). A questo scopo cominciamo a derivare la seconda e la terza equazione del gruppo (A) rispettivamente per s_{h+2} e per s_{h+1}, poi sottraghiamo le due equazioni ottenute. La differenza delle derivate seconde di η_h rispetto a tali archi si può esprimere per le derivate prime di η_h mediante la nota formula

$$(16)\quad (\partial^2_{h+2\,h+1} - \partial^2_{h+1\,h+2})\,\eta_h = -[\rho_{h+1\,h+1} + \rho_{h+2\,h+2}]\,\partial_h\,\eta_h + \\ + \rho_{h\,h+1}\,\partial_{h+1}\,\eta_h + \rho_{h\,h+2}\,\partial_{h+2}\,\eta_h\,.$$

L'equazione differenza, in tal modo ottenuta, contiene allora solo derivate prime rispetto agli archi s_k delle funzioni η_h le quali si possono eliminare in virtù delle equazioni del gruppo (A). Eseguendo i calcoli indicati, si ricavano le equazioni

$$(17)\qquad \partial_{h+2}\,\delta_{h+2} + \partial_{h+1}\,\delta_{h+1} = \rho_{h\,h+1}\,\delta_{h+2} - \rho_{h\,h+2}\,\delta_{h+1} + \\ + [\rho_{h+1\,h+2} - \rho_{h+2\,h+1}]\,\delta_h + \gamma_{h+1\,h}\,\eta_{h+2} - \gamma_{h+2\,h}\,\eta_{h+1}\,,$$

nelle quali le γ_{hk} rappresentano i noti invarianti del Ricci, definiti dalle posizioni

$$(18)\qquad \gamma_{hk} = \partial_{k+2}\,\rho_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\,\rho_{h\,k+2} + \sigma\,\rho_{hk} - P_{hk} - \rho_{hj}\,\rho_{kj}\,,$$

$\sigma = \Sigma_j\,\rho_{jj}$, P_{hk} = complemento algebrico dell'elemento ρ_{hk} nel determinante $\|\rho_{hk}\|$.

Nella (17) scambiamo h in $h+1$, poi nella stessa equazione scambiamo h in $h+2$, indi sommiamo queste due equazioni ottenute e da questa sottraghiamo la (17); si perviene così alle equazioni definitive

$$(19)\qquad \partial_h\,\delta_h = \gamma_{h+2\,h}\,\eta_{h+1} - \gamma_{h+1\,h}\,\eta_{h+2} + \rho_{h+2\,h}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\,\delta_{h+2}\,.$$

Deriviamo la prima equazione del gruppo (A) per s_{h+2} e la terza per s_h, poi applichiamo, nella eliminazione delle derivate prime e seconde delle funzioni η_h, lo stesso procedimento usato in precedenza, si arriva così alle equazioni

$$(20)\qquad \partial_h\,\delta_{h+1} = \gamma_{h+2\,h+1}\,\eta_{h+1} - \gamma_{h+1\,h+1}\,\eta_{h+2} + \rho_{hh}\,\delta_{h+2} - \rho_{h+2\,h}\,\delta_h\,.$$

Infine, derivando la prima equazione del gruppo (A) per s_{h+1} e la seconda per s_h e poi eliminando le derivate prime e seconde delle η_h, si ottengono le equazioni

$$(21)\qquad \partial_h \delta_{h+2} = \gamma_{h+2\,h+2}\,\eta_{h+1} - \gamma_{h+1\,h+2}\,\eta_{h+2} + \rho_{h+1\,h}\,\delta_h - \rho_{hh}\,\delta_{h+1}\,.$$

Con uno scambio di indici eseguiti nelle equazioni (19), (20), (21), abbiamo il *secondo sistema di equazioni differenziali del* Ricci

$$(\mathrm{B})\qquad \begin{cases} \partial_h \delta_h = \gamma_{h+2\,h}\,\eta_{h+1} - \gamma_{h+1\,h}\,\eta_{h+2} + \rho_{h+2\,h}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\,\delta_{h+2}\,, \\ \partial_{h+1} \delta_h = \gamma_{hh}\,\eta_{h+2} - \gamma_{h+2\,h}\,\eta_h + \rho_{h+2\,h+1}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+1}\,\delta_{h+2}\,, \\ \partial_{h+2} \delta_h = \gamma_{h+1\,h}\,\eta_h - \gamma_{hh}\,\eta_{h+1} + \rho_{h+2\,h+2}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+2}\,\delta_{h+2}\,. \end{cases}$$

§ II. - Le equazioni (A), (B) per le varietà V_3 a curvatura costante.

Si supponga ora che la varietà V_3 sia a curvatura costante K; in tal caso gli invarianti γ_{hk} sono nulli per $h \neq k$ e sono eguali a K quando $h = k$. Noi supporremo in seguito $K \gtrless 0$. I due sistemi di equazioni (A), (B) diventano allora i seguenti:

$$(\mathrm{A}_1)\qquad \begin{cases} \partial_h \eta_h = \rho_{h+2\,h}\,\eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\,\eta_{h+2}\,, \\ \partial_{h+1} \eta_h = \rho_{h+2\,h+1}\,\eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+1}\,\eta_{h+2} + \delta_{h+2}\,, \\ \partial_{h+2} \eta_h = \rho_{h+2\,h+2}\,\eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+2}\,\eta_{h+2} - \delta_{h+1}\,. \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}_1)\qquad \begin{cases} \partial_h \delta_h = \rho_{h+2\,h}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\,\delta_{h+2}\,, \\ \partial_{h+1} \delta_h = \rho_{h+2\,h+1}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+1}\,\delta_{h+2} + K\eta_{h+2}\,, \\ \partial_{h+2} \delta_h = \rho_{h+2\,h+2}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h+2}\,\delta_{h+2} - K\eta_{h+1}\,. \end{cases}$$

Sarà conveniente, per il seguito, scrivere i due gruppi di equazioni (A_1) e (B_1) nel modo seguente:

$$(A_2) \qquad \partial_k \eta_h = \rho_{h+2\,k}\, \eta_{h+1} - \rho_{h+1\,k}\, \eta_{h+2} + \varepsilon^*_{hk}\, \delta_l \,,$$

$$(B_2) \qquad \partial_k \delta_h = \rho_{h+2\,k}\, \delta_{h+1} - \rho_{h+1\,k}\, \delta_{h+2} + \varepsilon^*_{kh}\, K\eta_l \,,$$

convenendo che

$$\varepsilon^*_{hk} = \begin{cases} 0 & \text{per } k = h \\ 1 & \text{»} \;\; k = h+1 \\ -1 & \text{»} \;\; k = h+2 \end{cases} \qquad l \neq h \neq k .$$

Dalla (11_1) ricaviamo

$$(22) \qquad \nabla_\tau \mu_\nu = \delta_h \nabla_\tau \underset{h}{\lambda}_\nu + \underset{h}{\lambda}_\nu \nabla_\tau \delta_h \,.$$

Per un generico scalare $f(x^\lambda)$ si trae dalla (15), in virtù della (3),

$$(23) \qquad \nabla_\tau f(x^\lambda) = \underset{k}{\lambda}_\tau\, \partial_k f(x^\lambda) \,.$$

Ne consegue, in forza della (B_2),

$$(24) \qquad \nabla_\tau \delta_h = \underset{j}{\lambda}_\tau \left[\rho_{h+2\,j}\, \delta_{h+1} - \rho_{h+1\,j}\, \delta_{h+2}\right] + K\left[\underset{h+1}{\lambda}_\tau\, \eta_{h+2} - \right.$$
$$\left. - \underset{h+2}{\lambda}_\tau\, \eta_{h+1}\right] .$$

Sostituendo nella (22), e facendo uso della (5), si ottiene

$$(25) \qquad \nabla_\tau \mu_\nu = K \underset{h}{\lambda}_\nu \left[\underset{h+1}{\lambda}_\tau\, \eta_{h+2} - \underset{h+2}{\lambda}_\tau\, \eta_{h+1}\right] ,$$

alla quale si può dare la forma seguente:

$$(26) \qquad \nabla_\tau \mu_\nu = K \eta_{h+2} \left[\underset{h}{\lambda}_\nu \underset{h+1}{\lambda}_\tau - \underset{h+1}{\lambda}_\nu \underset{h}{\lambda}_\tau \right] .$$

Per $\tau = \nu$, risulta nullo il secondo membro della (26), quindi

$$(27) \qquad \nabla_\nu \mu_\nu = 0 .$$

Per $\tau = \nu + 1$ ricaviamo

$$(28) \qquad \nabla_{\nu+1} \mu_\nu = K \eta_{h+2} \left[\underset{h}{\lambda_\nu} \underset{h+1}{\lambda_{\nu+1}} - \underset{h+1}{\lambda_\nu} \underset{h}{\lambda_{\nu+1}} \right] .$$

Come già abbiamo ricordato, i due determinanti $\| \underset{h}{\lambda_\nu} \| = \sqrt{a}$ e $\| \underset{h}{\lambda^\nu} \| = 1 : \sqrt{a}$ sono reciproci l'uno dell'altro, perciò la differenza fra parentesi del secondo membro della (28) vale $\sqrt{a}\, \underset{h+2}{\lambda^{\nu+2}}$.

Si ha perciò

$$(29) \qquad \nabla_{\nu+1} \mu_\nu = K \sqrt{a}\, \eta_{h+2} \underset{h+2}{\lambda^{\nu+2}} = K \sqrt{a}\, \underset{h}{\lambda^{\nu+2}} \eta_h ,$$

od anche, ricordando i valori delle componenti $\varepsilon_{\alpha\beta\nu}$ del tensore ternario ε del Ricci, e la (10)

$$(30) \qquad \nabla_{\nu+1} \mu_\nu = K \varepsilon_{\nu\,\nu+1\,\nu+2} \xi^{\nu+2} .$$

Un analogo calcolo proverebbe che

$$(31) \qquad \nabla_{\nu+2} \mu_\nu = K \varepsilon_{\nu\,\nu+2\,\nu+1} \xi^{\nu+1} .$$

In definitiva, le (27), (30), (31) si possono compendiare nell'unica formula

$$(32) \qquad \nabla_\beta \mu_\alpha = K \varepsilon_{\alpha\beta\nu} \xi^\nu .$$

Se ora confrontiamo la (32) con la (9), vediamo che queste equazioni sono simmetriche rispetto ai due sistemi di componenti ξ_ν e $\mu_\nu : \sqrt{K}$. Risultano ancora dalla (32) le identità

$$\nabla_\alpha \mu_\beta + \nabla_\beta \mu_\alpha = 0 , \tag{33}$$

cioè le componenti μ_α soddisfano alle equazioni del KILLING. Riassumendo, abbiamo il teorema seguente, già citato dal RICCI nella citata Memoria:

Nella V_3 a curvatura costante, le componenti covarianti del vettore rotazione, per un dato movimento rigido della V_3, sono anche componenti covarianti del vettore traslazione per un altro movimento rigido della varietà.

2. - Siano λ^ν i parametri della congruenza di linee formata dalle traiettorie dei punti descritte dal moto rigido di V_3; tale congruenza verrà denotata con λ. Possiamo scrivere

$$\xi^\nu = \sigma \lambda^\nu , \tag{34}$$

ove

$$\sigma^2 = \xi_\nu \xi^\nu \tag{35}$$

è il quadrato del modulo del vettore traslazione.

Dalla (8) si trae

$$\eta_h = \sigma \lambda^\nu \underset{h}{\lambda_\nu} = \sigma \alpha_h , \tag{36}$$

ove con α_h denotiamo il coseno dell'angolo che la linea h della congruenza $[h]$ della terna Λ, passante per un fissato punto di V_3, forma con la traiettoria del moto passante per lo stesso punto, avendo scelto naturalmente sulle due linee un verso come positivo.

Scriviamo le equazioni del gruppo (A_1) nella forma seguente:

$$(\mathrm{A}_3)\quad \left\{ \begin{aligned} \partial_h \eta_h &= \rho_{h+2\,h}\, \eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\, \eta_{h+2} , \\ \partial_h \eta_{h+1} &= \rho_{h\,h}\, \eta_{h+2} - \rho_{h+2\,h}\, \eta_h - \delta_{h+2} , \\ \partial_h \eta_{h+2} &= \rho_{h+1\,h}\, \eta_h - \rho_{h\,h}\, \eta_{h+1} + \delta_{h+1} . \end{aligned} \right.$$

Associamo alla (36) le due seguenti

(37) $\eta_{h+1} = \sigma\, \alpha_{h+1}$, (38) $\eta_{h+2} = \sigma\, \alpha_{h+2}$,

poi deriviamo tutte e tre rispetto all' arco s_h, ponendo al posto delle derivate delle η le loro espressioni (A_3) e teniamo conto delle (36), (37), (38); si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \sigma\, \partial_h \alpha_h + \alpha_h\, \partial_h \sigma = \sigma\,[\rho_{h+2\,h}\, \alpha_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\, \alpha_{h+2}], \\ \sigma\, \partial_h \alpha_{h+1} + \alpha_{h+1}\, \partial_h \sigma = \sigma\,[\rho_{h\,h}\, \alpha_{h+2} - \rho_{h+2\,h}\, \alpha_h] - \delta_{h+2}\,, \\ \sigma\, \partial_h \alpha_{h+2} + \alpha_{h+2}\, \partial_h \sigma = \sigma\,[\rho_{h+1\,h}\, \alpha_h - \rho_{h\,h}\, \alpha_{h+1}] + \delta_{h+1}\,. \end{cases}$$

Se ora moltiplichiamo la prima di queste equazioni per α_h, la seconda per α_{h+1}, la terza per α_{h+2} e poi sommiamo, tenendo presente che

$$\alpha_h^2 + \alpha_{h+1}^2 + \alpha_{h+2}^2 = 1\,, \quad \alpha_h\, \partial_h\, \alpha_h + \alpha_{h+1}\, \partial_h\, \alpha_{h+1} + \alpha_{h+2}\, \partial_h\, \alpha_{h+2} = 0,$$

si ottengono le identità

(39) $$\sigma\, \partial_h\, \sigma = \delta_{h+1}\, \eta_{h+2} - \delta_{h+2}\, \eta_{h+1}\,.$$

Sia ∂ simbolo di derivazione rispetto all' arco s di una generica traiettoria del moto rigido di V_3; avendosi, per un generico scalare $f(x^\lambda)$,

$$\partial\, f(x^\lambda) = \lambda^\tau\ \nabla_\tau\, f(x^\lambda) = \alpha_h \underset{h}{\lambda^\tau}\ \nabla_\tau\, f(x^\lambda) = \alpha_h\, \partial_h\, f(x^\lambda)\,,$$

si ricava dalla precedente (39) moltiplicando per α_h e sommando rispetto ad h

(40) $$\sigma^2\, \partial\, \sigma = \eta_h\, [\eta_{h+2}\, \delta_{h+1} - \eta_{h+1}\, \delta_{h+2}]\,.$$

La sommatoria che figura nel secondo membro della (40) è nulla; sussiste perciò l'identità

$$(41) \qquad \partial \sigma = 0 ,$$

cioè: *Fissata una qualsiasi traiettoria del moto rigido della varietà* V_3, *il modulo del vettore traslazione resta ivi costante.*

3. - Particolare interesse ha il caso nel quale la congruenza λ considerata nel numero precedente è formata di linee geodetiche della varietà V_3.

Sappiamo che le condizioni necessarie e sufficienti affinchè ciò si verifichi, è che abbiano luogo le identità

$$(42) \qquad \lambda^\tau \nabla_\tau \lambda_\nu = 0 ,$$

Dalle

$$\sigma \lambda_\nu = \xi_\nu = \underset{h}{\lambda_\nu} \eta_h$$

si ricava, per derivazione covariante rispetto alla forma (1),

$$(43) \qquad \sigma \nabla_\tau \lambda_\nu = \eta_h \nabla_\tau \underset{h}{\lambda_\nu} + \underset{h}{\lambda_\nu} \nabla_\tau \eta_h - \lambda_\nu \nabla_\tau \sigma .$$

Moltiplicando per λ^τ e sommando rispetto a τ otteniamo

$$(44) \quad \sigma \lambda^\tau \nabla_\tau \lambda_\nu = \eta_h \lambda^\tau \nabla_\tau \underset{h}{\lambda_\nu} + \underset{h}{\lambda_\nu} \lambda^\tau \nabla_\tau \eta_h - \lambda^\tau \lambda_\nu \nabla_\tau \sigma .$$

Ma si ha per la (41)

$$\lambda^\tau \nabla_\tau \sigma = \partial \sigma = 0 .$$

Inoltre

$$\sigma \lambda^\nu = \underset{h}{\lambda^\nu} \eta_h .$$

Si deduce pertanto dalla (44)

$$\sigma^2 \lambda^\tau \nabla_\tau \lambda_\nu = \eta_h \eta_k \underset{k}{\lambda^\tau} \nabla_\tau \underset{h}{\lambda_\nu} + \eta_k \underset{h}{\lambda_\nu} \underset{k}{\lambda^\tau} \nabla_\tau \eta_h ,$$

cioè

$$\sigma^2 \lambda^\tau \nabla_\tau \lambda_\nu = \eta_h \eta_k \underset{k}{\lambda^\tau} \nabla_\tau \underset{h}{\lambda_\nu} + \eta_k \underset{h}{\lambda_\nu} \partial_k \eta_h , \tag{45}$$

donde, sostituendo al posto delle derivate covarianti del secondo membro la (5),

$$\sigma^2 \lambda^\tau \nabla_\tau \lambda_\nu = \eta_h \eta_k \underset{k}{\lambda^\tau} \underset{j}{\lambda_\tau} \left| \underset{h+1}{\lambda_\nu} \rho_{h+2\,j} - \underset{h+2}{\lambda_\nu} \rho_{h+1\,j} \right| + \tag{46}$$
$$+ \underset{h}{\lambda_\nu} \eta_k \partial_k \eta_h .$$

Tenendo conto della (2) e delle espressioni delle $\partial_k \eta_h$ date dal gruppo (A_2), si vede che la prima sommatoria del secondo membro nella (46) è eguale a

$$\eta_h \eta_k \left[\underset{h+1}{\lambda_\nu} \rho_{h+2\,k} - \underset{h+2}{\lambda_\nu} \rho_{h+1\,k} \right] = \underset{h}{\lambda_\nu} \eta_k \left[\eta_{h+2} \rho_{h+1\,k} - \eta_{h+1} \rho_{h+2\,k} \right] ,$$

mentre la seconda sommatoria è eguale a

$$\underset{h}{\lambda_\nu} \eta_k \left[\eta_{h+1} \rho_{h+2\,k} - \eta_{h+2} \rho_{h+1\,k} \right] + \underset{h}{\lambda_\nu} \left[\eta_{h+1} \delta_{h+2} - \eta_{h+2} \delta_{h+1} \right] .$$

Possiamo quindi scrivere

$$\sigma^2 \lambda^\tau \nabla_\tau \lambda_\nu = \underset{h}{\lambda_\nu} \left[\eta_{h+1} \delta_{h+2} - \eta_{h+2} \delta_{h+1} \right] . \tag{47}$$

Poichè, per ipotesi, la congruenza λ è costituita da linee geodetiche di V_3, è nullo il primo membro della (47); devono pertanto sussistere le identità

$$\underset{h}{\lambda_\nu} \begin{vmatrix} \eta_{h+1} & \eta_{h+2} \\ \delta_{h+1} & \delta_{h+2} \end{vmatrix} = 0 ,$$

le quali, moltiplicate per λ_{h}^{ν} e sommate rispetto a ν, tenendo conto della (2), danno luogo alle

$$\begin{vmatrix} \eta_{k+1} & \eta_{k+2} \\ \delta_{k+1} & \delta_{k+2} \end{vmatrix} = 0 \, , \quad (k = 1, 2, 3) \, .$$

Gli invarianti η_h devono quindi essere proporzionali agli invarianti δ_h; denotiamo con ω il coefficiente di proporzionalità. Avendosi

$$\eta_h = \omega \, \delta_h \, , \tag{48}$$

segue dalle (7), (8),

$$(\xi_\nu - \omega \, \mu_\nu) \, \lambda_{h}^{\nu} = 0 \, ,$$

donde, per essere non nullo il determinante $\| \lambda_{h}^{\nu} \|$,

$$\xi_\nu = \omega \, \mu_\nu \, , \qquad (\nu = 1, 2, 3) \, . \tag{49}$$

Dunque: *Se la congruenza delle traiettorie di un moto rigido della V_3 è geodetica, le componenti del vettore traslazione sono proporzionali a quelle del vettore rotazione.*

Vale manifestamente anche la reciproca; infatti, se ha luogo la (49), sussiste anche la (48); il secondo membro della (47) è allora nullo e quindi ha luogo la (42).

Supponiamo verificata la (48); si ricava, per derivazione ordinaria rispetto all'arco s_h,

$$\omega \, \partial_h \, \delta_h + \delta_h \, \partial_h \, \omega = \partial_h \, \eta_h \, ,$$

cioè, per $(\dot{A}_1)$, (B_1),

$$\omega \, [\rho_{k+2\,h} \, \delta_{k+1} - \rho_{k+1\,h} \, \delta_{k+2}] + \delta_h \, \partial_h \, \omega = \rho_{k+2\,h} \, \eta_{k+1} - \rho_{k+1\,h} \, \eta_{k+2} \, ,$$

donde, in virtù della (48),

$$\delta_h \, \partial_h \, \omega = 0 \, . \tag{50}$$

Similmente, se deriviamo la (48) rispetto all'arco s_{h+1} e rispetto all'arco s^{h+2}, si trovano le relazioni

$$(1 - \omega^2 K)\, \delta_{h+2} = \delta_h\, \partial_{h+1}\, \omega \ , \tag{51}$$

$$(\omega^2 K - 1)\, \delta_{h+1} = \delta_h\, \partial_{h+2}\, \omega \ . \tag{52}$$

Se nessuna delle δ_h è nulla, si deduce dalla (50) che deve essere $\partial_h\, \omega = 0$; donde per la (51), o (52),

$$K = \frac{1}{\omega^2} \ .$$

Se qualcuna delle δ_h è nulla, ad esempio, la sola δ_1, si trae dalla (50) $\partial_2\, \omega = 0$, $\partial_3\, \omega = 0$, e quindi per la (51), o (52), si vede che anche in questo caso deve aversi

$$K = \frac{1}{\omega^2} \ .$$

Abbiamo pertanto: *Tra le varietà V_3 a curvatura costante non nulla, solo quelle a curvatura positiva sono dotate di moti rigidi aventi per traiettorie delle geodetiche della varietà.*

Osserviamo ancora, che avendo luogo la (48), in virtù della (39), deve aversi

$$\partial_h\, \sigma = 0 \ ,$$

cioè: *lo scalare σ è indipendente dalle x^λ*. Ne consegue, che rappresentando esso la grandezza del vettore traslazione, tale grandezza sarà costante in ogni punto di V_3. Abbiamo quindi

$$\sigma^2 = \xi_\alpha\, \xi^\alpha = a_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha\, \xi^\beta = cost.$$

Alterando, come è lecito, i coefficienti ξ^α per un fattore costante, possiamo, senza alterare la generalità, supporre che la costante che figura nel secondo membro sia eguale a 1. Risulta allora [5]

$$a_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\,\xi^\beta = 1\,. \tag{53}$$

Dunque: *I moti rigidi che nelle varietà V_3 a curvatura costante positiva hanno per traiettorie delle geodetiche di V_3 sono scorrimenti,* e reciprocamente; *gli scorrimenti che avvengono in una varietà V_3 a curvatura costante non nulla hanno sempre per traiettorie delle geodetiche della varietà, e perciò non possono aver luogo che in quelle V_3 nelle quali la curvatura è positiva.*

4. - Scriviamo i due sistemi (A_1, B_1) nella forma seguente:

$$(A_3)\qquad \begin{cases} \partial_h\,\eta_h = \rho_{h+2\,h}\,\eta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\,\eta_{h+2}\,, \\ \partial_h\,\eta_{h+1} = \rho_{hh}\,\eta_{h+2} - \rho_{h+2\,h}\,\eta_h - \delta_{h+2}\,, \\ \partial_h\,\eta_{h+2} = \rho_{h+1\,h}\,\eta_h - \rho_{hh}\,\eta_{h+1} + \delta_{h+1}\,. \end{cases}$$

$$(B_3)\qquad \begin{cases} \partial_h\,\delta_h = \rho_{h+2\,h}\,\delta_{h+1} - \rho_{h+1\,h}\,\delta_{h+2}\,, \\ \partial_h\,\delta_{h+1} = \rho_{hh}\,\delta_{h+2} - \rho_{h+2\,h}\,\delta_h - K\eta_{h+2}\,, \\ \partial_h\,\delta_{h+2} = \rho_{h+1\,h}\,\delta_h - \rho_{hh}\,\delta_{h+1} + K\eta_{h+1}\,. \end{cases}$$

Moltiplichiamo nel gruppo (A_3) la prima equazione per δ_h, la seconda per δ_{h+1}, la terza per δ_{h+2} e nel gruppo (B_3) moltiplichiamo la prima equazione per η_h, la seconda per η_{h+1}, la terza per η_{h+2}, indi sommiamo le sei equazioni ottenute. Il secondo membro della somma in discorso è nullo, mentre il primo membro è la derivata rispetto all' arco s_h di

$$\Sigma_h\,\eta_h\,\delta_h\,.$$

[5] È quasi superfluo osservare che le ξ_α, oltre che alla (53), devono anche soddisfare alle equazioni del Killing.

Concludiamo che deve aversi in ogni punto di V_3

$$\Sigma_h \, \eta_h \, \delta_h = cost. \,, \tag{54}$$

tutte le volte che le funzioni η_h, δ_h soddisfano al sistema differenziale costituito dalle (A_3), (B_3).

Dunque: *Il sistema differenziale di equazioni del* Ricci (A_3), (B_3) *nelle varietà a curvatura costante ammette l'integrale primo* (54).

Particolare interesse offre il caso nel quale la costante che figura nel secondo membro della (54) è nulla, come ora vedremo.

Associamo alla terna di congruenze Λ, finora considerata, una seconda terna ortogonale di congruenze Λ' i cui parametri e momenti saranno denotati con $\underset{h}{\lambda'}{}^{\nu}$, $\underset{h}{\lambda'}{}_{\nu}$. Supporremo che la congruenza $\underset{3}{\lambda'}{}^{\nu}$ si identifichi con la congruenza λ del numero precedente, cioè sia costituita dalle traiettorie di un moto rigido di V_3. Denotiamo con [1'], [2'], le due congruenze di parametri $\underset{1}{\lambda'}{}^{\nu}$, $\underset{2}{\lambda'}{}^{\nu}$ e le rispettive linee con 1', 2'; infine con ρ'_{hk} indichiamo i coefficienti di rotazione del Ricci della terna Λ'. Dalle

$$\xi_\alpha = \sigma \, \lambda_\alpha$$

si trae, per derivazione covariante rispetto alla forma (1),

$$\nabla_\beta \; \xi_\alpha = \sigma \, \nabla_\beta \, \lambda_\alpha + \lambda_\alpha \, \nabla_\beta \, \sigma \,.$$

Scambiamo α con β, otteniamo

$$\nabla_\alpha \, \xi_\beta = \sigma \, \nabla_\alpha \, \lambda_\beta + \lambda_\beta \, \nabla_\alpha \, \sigma \,,$$

donde sommando si ha, in virtù delle equazioni del Killing,

$$\sigma \, [\nabla_\beta \, \lambda_\alpha + \nabla_\alpha \, \lambda_\beta] + \lambda_\alpha \, \nabla_\beta \, \sigma + \lambda_\beta \, \nabla_\alpha \, \sigma = 0 \,,$$

od, anche per la (5),

$$(55) \qquad \sigma\, \rho'_{2j} \left[\underset{j}{\lambda'_{\beta}}\, \underset{1}{\lambda'_{\alpha}} + \underset{j}{\lambda'_{\alpha}}\, \underset{1}{\lambda'_{\beta}} \right] - \sigma\, \rho'_{1j} \left[\underset{j}{\lambda'_{\beta}}\, \underset{2}{\lambda'_{\alpha}} + \underset{j}{\lambda'_{\alpha}}\, \underset{2}{\lambda'_{\beta}} \right] + \\ + \lambda_{\alpha}\, \nabla_{\beta}\, \sigma + \lambda_{\beta}\, \nabla_{\alpha}\, \sigma = 0\,.$$

Moltiplichiamo la (55) per $\underset{h}{\lambda'^{\alpha}}\, \underset{k}{\lambda'^{\beta}}$ $(h, k = 1, 2)$ e teniamo conto della (2), si ricava

$$\varepsilon_{1h}\, \rho'_{2k} + \varepsilon_{1k}\, \rho'_{2h} - \varepsilon_{2h}\, \rho'_{1k} - \varepsilon_{2k}\, \rho'_{1h} = 0\,,$$

dalla quale, ponendo $h = 1$, $k = 2$, si trae

$$\rho'_{11} = \rho'_{22}\,.$$

Questa relazione ci assicura che le due congruenze [1'], [2'] costituiscono, rispetto alla congruenza λ, un sistema ortogonale canonico ([6]).

Supponiamo che la congruenza λ sia normale: allora sappiamo che sussiste la identità

$$\rho'_{11} + \rho'_{22} = 0\,.$$

Concludiamo intanto che deve aversi

$$\rho'_{11} = \rho'_{22} = 0\,,$$

cioè

$$(56) \qquad \lambda^{\mu}\, \underset{1}{\lambda'^{\nu}}\, \nabla_{\nu}\, \underset{2}{\lambda'_{\mu}} = 0\,,$$

$$(57) \qquad \underset{1}{\lambda'^{\mu}}\, \underset{2}{\lambda'^{\nu}}\, \nabla_{\nu}\, \lambda_{\mu} = 0\,.$$

Abbiamo trovato al n. 3, formula (43), con lo scambio di τ in μ,

$$\sigma\, \nabla_{\mu}\, \lambda_{\nu} = \eta_h\, \nabla_{\mu}\, \underset{h}{\lambda_{\nu}} + \underset{h}{\lambda_{\nu}}\, \nabla_{\mu}\, \eta_h - \lambda_{\nu}\, \nabla_{\mu}\, \sigma\,.$$

([6]) Questo risultato è contenuto in uno più generale dato dal Ricci nella citata Memoria.

Moltiplicando per $\lambda^{\mu}_{i}\,\lambda^{\nu}_{j}$ e sommando rispetto a μ e ν, si ottiene, tenendo conto delle (2), (5),

$$\sigma\,\lambda^{\mu}_{i}\,\lambda^{\nu}_{j}\,\nabla_{\mu}\,\lambda_{\nu} = \eta_{j+2}\,\rho_{j+1\,i} - \eta_{j+1}\,\rho_{j+2\,i} + \partial_i\,\eta_j - \lambda_{\nu}\,\lambda^{\nu}_{j}\,\partial_i\,\sigma\,. \tag{58}$$

Ma essendo

$$\xi_{\nu} = \sigma\,\lambda_{\nu}\,,$$

si ricava, sostituendo nella precedente,

$$\begin{aligned}\sigma^2\,\lambda^{\mu}_{i}\,\lambda^{\nu}_{j}\,\nabla_{\mu}\,\lambda_{\nu} = \sigma\,[\eta_{j+2}\,\rho_{j+1\,i} - \eta_{j+1}\,\rho_{j+2\,i}] +\\ + \sigma\,\partial_i\,\eta_j - \eta_j\,\partial_i\,\sigma\,.\end{aligned} \tag{59}$$

Indichiamo con α_{ik} il coseno dell'angolo che la linea i' della congruenza $[i']$ della terna A' $(i = i' = 1, 2)$ forma con la linea k della congruenza $[k]$ della terna Λ $(k = 1, 2, 3)$ passanti per uno stesso punto di V_3; si ha

$$\alpha_{ik} = \lambda'^{\mu}_{i}\,\lambda_{\mu}{}_{k}\,, \tag{60}$$

$$\lambda'^{\mu}_{i} = \alpha_{ik}\,\lambda^{\mu}_{k}\,, \tag{61}$$

donde $(i = 1, 2)$,

$$\alpha_{ik}\,\eta_k = \alpha_{ik}\,\lambda_{\nu}{}_{k}\,\xi^{\nu} = \lambda'_{\nu}{}_{i}\,\xi^{\nu} = \sigma\,\lambda'_{\nu}{}_{i}\,\lambda^{\nu}\,. \tag{62}$$

Ma le linee della congruenza Λ' sono mutuamente ortogonali, perciò il secondo membro della (62) è nullo; possiamo quindi scrivere

$$\alpha_{ik}\,\eta_k = 0\,, \qquad (i = 1, 2)\,. \tag{63}$$

Moltiplichiamo la (59) per $\alpha_{1j}\,\alpha_{2i}$ e poi sommiamo rispetto agli indici i, j; tenendo presente la (61) si trae

$$\begin{aligned}\sigma^2\,\lambda'^{\nu}_{1}\,\lambda'^{\mu}_{2}\,\nabla_{\mu}\,\lambda_{\nu} = \sigma\,[\eta_{j+2}\,\rho_{j+1\,i} - \eta_{j+1}\,\rho_{j+2\,i}]\,\alpha_{1j}\,\alpha_{2i} +\\ + \sigma\,\alpha_{1j}\,\alpha_{2i}\,\partial_i\,\eta_j - \alpha_{1j}\,\alpha_{2i}\,\eta_j\,\partial_i\,\sigma\,.\end{aligned} \tag{64}$$

Il primo membro è nullo per la (57), come pure è nulla la terza sommatoria che figura nel secondo membro, e ciò in forza della (63). Concludiamo che deve essere

$$(65) \qquad \sigma\,[\eta_{j+2}\,\rho_{j+1\,i} - \eta_{j+1}\,\rho_{j+2\,i}]\,\alpha_{1j}\,\alpha_{2i} + \sigma\,\alpha_{1j}\,\alpha_{2i}\,\partial_i\,\eta_j = 0$$

Sostituendo in questa al posto delle derivate $\partial_i\,\eta_j$ le loro espressioni (A_2), si ha

$$(66) \qquad \varepsilon^*_{ij}\,\delta_l\,\alpha_{1j}\,\alpha_{2i} = 0\,,$$

cioè, tenendo conto dei valori delle ε^*_{ij} e dell'indice l,

$$(67) \qquad \alpha_{1i+1}\,\alpha_{2i}\,\partial_{i+2} - \alpha_{2i}\,\alpha_{1i+2}\,\delta_{i+1} = 0\,,$$

ovvero, con ovvio scambio di indici,

$$(68) \qquad [\alpha_{1i+2}\,\alpha_{2i+1} - \alpha_{1i+1}\,\alpha_{2i-2}]\,\delta_i = 0\,.$$

Nel determinante $\|\alpha_{ij}\| = 1$ ogni elemento è eguale al proprio complemento algebrico. Si ha pertanto dalla (68) l'identità

$$(69) \qquad \Sigma_i\,\alpha_{3i}\,\delta_i = 0\,.$$

La (63) ci dice che le η_i sono proporzionali ai minori

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1i+1} & \alpha_{1i+2} \\ \alpha_{2i+1} & \alpha_{2i+2} \end{vmatrix}$$

della matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{Vmatrix},$$

cioè ai coseni α_{3i}. La (69) dà allora

$$(70) \qquad \Sigma_i\,\eta_i\,\delta_i = 0\,.$$

Da questa, in virtù delle (2), (7), (8), si trae anche

$$\Sigma_\nu \, \xi^\nu \, \eta_\nu = 0 , \tag{71}$$

dalla quale si conclude che il vettore traslazione è perpendicolare al vettore rotazione.

Riprendiamo la (55), moltiplichiamola per λ^α e sommiamo rispetto ad α; tenendo conto della (2) e della (41), si ottiene

$$\sigma \left[\lambda'_{1\alpha} \rho'_{23} - \lambda'_{2\alpha} \rho'_{13} \right] + \nabla_\alpha \sigma = 0 ,$$

donde

$$\nabla \quad log \; \sigma = \lambda'_{2\alpha} \rho'_{13} - \lambda'_{1\alpha} \rho'_{23} .$$

Poichè le due congruenze [1′], [2′] costituiscono, come vedemmo, un sistema ortogonale canonico rispetto alla congruenza λ, le precedenti identità ci dicono che la famiglia $f(x^1 x^2 x^3) = cost.$ di superficie di V_3 la quale taglia ortogonalmente le linee della congruenza λ, è isoterma (7).

Supponiamo, inversamente, che sia nulla la costante che figura nel secondo membro della (54). Allora ha luogo la (70); poichè vale la (63), possiamo affermare che sussiste la (69), cioè la (68), ovvero la (66). Nella (64), come dicemmo, è nulla la terza sommatoria del secondo membro; se quindi poniamo al posto delle derivate $\partial_i \, \eta_j$ le loro espressioni (A_2), tenendo presente la (66), concludiamo che è nullo il primo membro della (64), cioè si ha $\rho'_{22} = 0$. Poichè le congruenze λ'_1, λ'^α_2 costituiscono un sistema ortogonale canonico rispetto alla congruenza λ, si ha $\rho'_{11} = \rho'_{22}$. Deduciamo che anche $\rho'_{11} = 0$. La congruenza λ è quindi normale. Riassumendo, abbiamo il teorema: *Se la congruenza di linee formata dalle traiettorie di un moto rigido*

(7) Ricci e Levi-Civita: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.* [Math. Annalen, Band. LIV, (1901). Chap. II, § 3].

di V_3 è normale, il vettore traslazione è perpendicolare al vettore rotazione in ogni punto della varietà. In tal caso è nulla la costante che figura nell' integrale primo (54) *e la famiglia di superficie di V_3, la quale taglia ortogonalmente le linee della congruenza, è isoterma. E inversamente, se i due vettori traslazione e rotazione sono perpendicolari in ogni di V_3, cioè se è nulla la costante in discorso, la congruenza costituita dalle traiettorie di un moto rigido di V_3 è normale ed è formata da linee che sono ortogonali ad un sistema isotermo di superficie di V_3.*

5. - Poniamo [8]

$$\tau^2 = \mu_\nu \, \mu^\nu \,, \tag{72}$$

dove, derivando covariantemente rispetto alla forma (1), si ottiene

$$\tau \, \nabla_\alpha \, \tau = \mu^\nu \, \nabla_\alpha \, \mu_\nu \,.$$

Moltiplicando per λ_h^α e sommando rispetto ad α si ricava

$$\tau \, \partial_h \, \tau = \lambda_h^\alpha \, \mu^\nu \, \nabla_\alpha \, \mu_\nu \,,$$

od anche, per le posizioni (11_1),

$$\tau \, \partial_h \, \tau = \lambda_h^\alpha \, \mu^\nu \, [\delta_s \, \nabla_\alpha \, \lambda_{s\,\nu} + \lambda_{s\,\nu} \, \nabla_\alpha \, \delta_s] \,,$$

cioè, sostituendo la (5),

$$\tau \, \partial_h \, \tau = \lambda_h^\alpha \, \mu^\nu \, \delta_s \, [\lambda_{j\,\alpha} \, \{ \lambda_{s+1\,\nu} \, \rho_{s+2\,j} - \lambda_{s+2\,\nu} \, \rho_{s+1\,j} \}] + \mu^\nu \, \lambda_{s\,\nu} \, \partial_h \, \delta_s \,.$$

od anche, per la (2),

$$\tau \, \partial_h \, \tau = \mu^\nu \, \delta_s \, [\lambda_{s+1\,\nu} \, \rho_{s+2\,h} - \lambda_{s+2\,\nu} \, \rho_{s+1\,h}] + \mu^\nu \, \lambda_{s\,\nu} \, \partial_h \, \delta_s \,. \tag{73}$$

[8] La forma (1) è definita positiva, quindi è positiva l' espressione $a_{\alpha\beta} \, \mu^\alpha \, \mu^\beta = \mu_\beta \, \mu^\beta$, cioè la (72).

Sostituendo al posto delle derivate $\partial_h\, \delta_s$ le espressioni date dalle (B_2), si ricava dalla (73)

$$\tau\, \partial_h\, \tau = \varepsilon^*_{sh}\, K\, \eta_l\, \underset{s}{\mu^\nu\, \lambda_\nu} \;,$$

donde, per il significato assegnato alle ε^*_{sh} e all'indice l,

$$\tau\, \partial_h\, \tau = K\, [\eta_{h+1}\, \delta_{h+2} - \eta_{h+2}\, \delta_{h+1}] \;,$$

ovvero, per la (39),

$$\tau\, \partial_h\, \tau = -\, K\, \sigma\, \partial_h\, \sigma \;,$$

cioè

$$\partial_h\, (\tau^2 + K\, \sigma^2) = 0 \;.$$

In definitiva, si conclude che deve essere in ogni punto di V_3

$$\tau^2 + K\, \sigma^2 = cost. \tag{74}$$

Sostituendo al posto delle σ^2, τ^2 le loro espressioni (35), (72) e poi le (10), (10_1), (11), (11_1), in forza della (2), si ottiene

$$\Sigma_h\, (\delta_h^2 + K\, \eta_h^2) = cost. \tag{75}$$

Dunque: *Il sistema di equazioni differenziali* (A_3), (B_3), *del* Ricci, *oltre che l'integrale primo* (54), *ammette anche l'integrale primo* (75).