RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 214-230

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__214_0>

SULLA STABILITÀ DELLE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO DI UNA SUPERFICIE FLESSIBILE ED INESTENDIBILE

Nota (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Padova*).

Premessa. – Nella sua fondamentale Memoria « *Sull'equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile* » (1) il BELTRAMI studiando le tensioni superficiali, nel § 7, finisce per dare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le forze interne abbiano tutto il carattere di tensioni e conclude osservando: « Queste condizioni sono, *in generale*, necessarie perchè le tensioni interne siano contrastate dall'inestendibilità della superficie. Ma se il contorno di queste è fisso, in tutto o in parte, le tensioni interne possono diventare anche negative senza che l'equilibrio ne sia turbato ». Questa frase ha evidentemente bisogno di essere chiarita; d'altra parte non mi risulta sia stata data una spiegazione soddisfacente o almeno tale da riconoscere esatto quanto dice il BELTRAMI. In effetto c'è un lavoro del Prof. LAURA (2) in cui il compianto Maestro cerca di precisare il concetto di stabilità di una configurazione di equilibrio di una superficie studiandone i piccoli moti intorno alla configurazione stessa. Tra l'altro, in questa nota, Egli dimostra che se nella configurazione presa in esame le forze interne hanno tutte il carattere di tensioni, il sistema ammette piccole oscillazioni libere intorno ad essa. Io d'altra parte

(*) Pervenuta in Redazione il 6 marzo 1950.

(1) E. BELTRAMI: *Opere matematiche* – T. III, pp. 420–464.

(2) E. LAURA: *Sulle piccole oscillazioni di una superficie flessibile inestendibile intorno ad una posizione di equilibrio stabile.* [Atti del secondo Congresso dell'Un. Mat., pp. 346–352].

seguitando un altro lavoro dello stesso Autore (3) ho trattato le piccole oscillazioni intorno ad una configurazione conica d' equilibrio (4) e mi sono trovato ancora di fronte alla necessità di dover supporre che le forze interne avessero tutte il carattere di tensioni. Avendo sempre presente l'osservazione di Beltrami e sembrandomi cosa improbabile che questo Autore alludesse a configurazioui intuitivamente non stabili quale quella riportata alla fine della nota 1) del Prof. Laura (5), ho ripreso in questo ultimo mese la ricerca che già da qualche tempo avevo in animo di perseguire e sono giunto al risultato che espongo in questa Nota.

Mi sono soffermato sulle configurazioni di equilibrio cilindriche di veli pesanti che furono già oggetto di studi in un caso particolare di B. Caldonazzo (6) e nel caso generale di E. Laura (7), perchè questi sono appunto i casi più semplici, ed ho ottenuto configurazioni di equilibrio intorno alle quali sono possibili piccole oscillazioni, pur non avendo tutte le forze interne il carattere di tensioni.

Premesso che per brevità chiamerò *assolutamente stabili* le configurazioni di equilibrio per le quali le forze interne hanno tutto il carattere di tensioni, riassumo per sommi capi quello che esporrò nella presente Nota.

Comincerò col riportare brevemente i risultati del Prof. Laura sulle configurazioni cilindriche e con l'osservare come sussistano configurazioni di equilibrio che sembrano intuitivamente stabili pur risultando esse non assolutamente stabili. Nel secondo numero, riprendendo i risultati della Nota 1) osservo che alle condizioni lì date, perchè sussistano piccole oscillazioni intorno alla

(3) E. Laura: *Sul moto di una porzione di superficie conica inestendibile pesante.* [Rend. Sem. Mat. di Padova, vol. XI (1940), pp. 113–131].

(4) G. Colombo: *Sopra le piccole oscillazioni di una superficie conica pesante.* [Atti dell' Ist. Veneto di Scienze Lettere ed Arti, T. CVI, parte II (1947–48), pp. 172–183].

(5) Vedi n. 3 della nota citata in 1) pag. 352 (p. 7 della nota).

(6) *Sull' equilibrio di un velo pesante triangolare.* [Nuovo Cimento, serie IV, vol. XXII, pp. 43–45].

(7) *Una osservazione sopra l' equilibrio delle superficie rigate flessibili ed inestendibili.* [Atti dell' Ist. Veneto di Scienze Lettere ed Arti, T. XCIX, parte II, pp. 339–356].

configurazione di equilibrio, se ne possono sostituire altre meno restrittive che si deducono subito da quelle. Sfrutto questa osservazione nel n. 3 applicandola alle configurazioni cilindriche, e finisco col determinare nel n. 4 le configurazioni cercate.

1. - Richiami ed osservazioni sulle configurazioni di equilibrio cilindriche.

Tra le più semplici configurazioni di equilibrio sono le cilindriche studiate dal Prof. Laura nella nota [7]) (§ 5). Si tratta di un velo pesante omogeneo sviluppabile su un piano, di forma tale da ricoprire una regione delimitata da due segmenti paralleli e simmetrica in direzione ortogonale alla congiungente i punti medi dei due segmenti stessi. Di questo velo si fissano i segmenti sudetti facendoli coincidere con due segmenti orizzontali e rispettivamente uguali ai lati del velo, in maniera che la congiungente i punti medi sia normale alla direzione dei segmenti stessi, inoltre si lasciano liberi gli altri due bordi simmetrici. In queste condizioni, sotto la sollecitazione del peso, è ovviamente ammissibile una configurazione di equilibrio cilindrica a generatrici parallele ai segmenti fissi. L'equazione di questa superficie di equilibrio si può scrivere nella forma:

$$1) \qquad P = O + \boldsymbol{a} u + \boldsymbol{b} \,,$$

ove $\boldsymbol{a}$ è un versore orizzontale e $\boldsymbol{b}$ è un vettore funzione delle variabili v tale che

$$2) \qquad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0 \,, \qquad \boldsymbol{b}'^2 = 1 \,,$$

onde v risulta la lunghezza dell'arco della sezione normale del cilindro. Si è così fissato un sistema di coordinate ortogonali sul cilindro; infatti si ha $E = G = 1$, $F = 0$. Se poi O è il punto medio di uno dei due segmenti sarà $\boldsymbol{b}(o) = 0$; le equazioni dei due bordi liberi siano poi $u = \pm f(v)$ $(f(v) > 0$ per $0 \leq v_1 \leq v \leq v_2)$.

Il problema della determinazione delle configurazioni di equilibrio si riduce al problema del filo pesante di densità variabile con legge nota $f(v)$.

A noi qui interessa studiare la distribuzione delle forze interne. Introdotte le componenti di tensione λ, μ, ν il cui significato è espresso, in questo caso, dalle formule:

3) $$-\lambda = T_{vu} \ , \quad -\mu = T_{uu} = T_{vv} \ , \quad -\nu = T_{\mu v} \ ;$$

e ponendo

4) $$\eta = \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}'' \wedge \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{b}''} \ , \quad \zeta = \frac{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}'}{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{b}''} \ ,$$

si ottiene, pensando per semplicità, che la densità del velo sia $\frac{1}{g}$,

5) $$\nu = \zeta \ , \quad \mu = u \frac{\zeta f'}{f} \ , \quad \lambda = \frac{1}{2} (f^2 - u^2) \left(\frac{\zeta f'}{f} \right)' + f'^2 \zeta \, .$$

Affinchè le forze interne abbiano tutte il carattere di tensioni occorre e basta, secondo Beltrami, che sia

7) $$\nu \leq 0 \ , \quad \lambda \leq 0 \ , \quad \lambda \nu - \mu^2 \geq 0 \, .$$

La prima delle 7) ricordando la prima delle 5) comporta

8) $$\zeta \leq 0 \, .$$

Questa condizione esige che la concavità della superficie cilindrica sia rivolta verso l'alto.

Perchè sia $\lambda \leq 0$ occorre e basta che sia:

9) $$\frac{1}{2} f' \left(\frac{\zeta f'}{f} \right)' + f'^2 \zeta \leq 0 \ ;$$

infatti si ha tenendo presente la terza delle 5) e la 8)

$$\lambda (f, v) = f'^2 \zeta \leq 0 \, ,$$

inoltre, ancora, è

$$\lambda (0 \, , v) = \frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\zeta f'}{f} \right)' + f'^2 \zeta \ ,$$

e quindi tenendo presente che λ è funzione di secondo grado delle u, la 9) assicura che $\lambda(u, v) \leq 0$ su tutta la superficie.

Resta infine la terza condizione delle 7) la quale comporta che sia:

$$\lambda\nu - \mu^2 = \frac{1}{2}(f^2 - u^2)\left(\frac{\zeta f'}{f}\right)'\zeta + f'^2\zeta^2 - u^2\left(\frac{\zeta^2}{f}\right)f'^2 \geq 0 .$$

Ora siccome è

$$(\lambda\nu - \mu^2)_{u=f(v)} = 0 , \quad (\lambda\nu - \mu^2)_{u=0} = \zeta\left[\frac{1}{2} f^2 \left(\frac{\zeta f'}{f}\right)' + f'^2 \zeta\right] ,$$

le 8) e 9) bastano ad assicurare che siano soddisfatte le 7). Tenendo presente la 6), la 9) diventa:

$$9') \qquad \zeta f'' + \eta f' \leq 0 .$$

A questa condizione 9') si può pure dare una forma più espressiva, se si denota con x la componente orizzontale di $\boldsymbol{b}$; precisamente si ha:

$$9'') \qquad -f''x' + f'x'' \leq 0 ,$$

oppure

$$9''') \qquad \frac{d}{dv}\left(\frac{x'}{f'}\right) \leq 0 .$$

Se si considera il caso limite

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{x'}{f'}\right) = 0 ,$$

si ha senz'altro

$$f = Kx + C ,$$

e questa esprime che il bordo libero è nel piano verticale passante per gli estremi fissi del bordo stesso.

Se il bordo ha invece equazione

$$10) \qquad f(v) = Kv + c \qquad (k > 0 \,,\, c \geq 0)$$

la 9′) ci dà

$$11) \qquad K\eta \leq 0$$

onde risulta che le forze interne hanno il carattere di tensioni solamente nella porzione ascendente (rispetto al verso delle v crescenti) della superficie, mentre nella porzione discendente della stessa ci sono anche sforzi interni che hanno il carattere di pressioni. Nel seguito stabiliremo che una di queste ultime configurazioni è pur tuttavia stabile nel senso che intorno ad esse sono possibili piccole oscillazioni.

2. - Osservazioni sulla nota [2]).

Richiamo dapprima brevemente per maggior comprensione del seguito quanto è esposto nella nota [2]).

Si consideri una porzione di superficie limitata da linee l_i fisse e da linee m_k, contorni liberi. Sia $P_0(u, v)$ il punto che descrive la superficie nella configurazione di equilibrio, λ_0, μ_0, ν_0 le relative componenti di tensione, $\boldsymbol{F}$ la forza agente per unità di superficie. L'equazione indefinita nell'equilibrio è allora:

$$12) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda_0 \frac{\partial P_0}{\partial u} + \mu_0 \frac{\partial P_0}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu_0 \frac{\partial P_0}{\partial u} + \nu_0 \frac{\partial P_0}{\partial v}\right) = \boldsymbol{F} .$$

A questa equazione vanno aggiunte le condizioni cinematiche che assicurano che le linee l_i sono fisse e le condizioni

$$13) \qquad \begin{cases} \lambda_0 \left(E \dfrac{\partial u}{\partial n} + F \dfrac{\partial v}{\partial n}\right) + \mu_0 \left(F \dfrac{\partial u}{\partial n} + G \dfrac{\partial v}{\partial n}\right) = 0 \\ \mu_0 \left(E \dfrac{\partial u}{\partial n} + F \dfrac{\partial v}{\partial n}\right) + \nu_0 \left(F \dfrac{\partial u}{\partial n} + G \dfrac{\partial v}{\partial n}\right) = 0 \end{cases}$$

che devono essere verificate sulle linee m_h di normale n affinchè la tensione uscente da queste linee sia nulla.

Al fine di studiare i piccoli moti di questa superficie sia ora $P = P_0 + \boldsymbol{s}\,(u, v, t)$ l'equazione del punto P che descrive la superficie spostata all'istante generico t e $\lambda = \lambda_0 + \lambda'$, $\mu = \mu_0 + \mu'$, $\nu = \nu_0 + \nu'$, $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{F} + \delta \boldsymbol{F}$, rispettivamente le componenti di tensione e la forza agente sull'unità di superficie relativamente alla configurazione assunta all'istante generico.

Intanto, affinchè la superficie resti applicabile su quella di equilibrio, se $\delta\,(u, v, t)$ è assunto come infinitesimo principale e si trascurano infinitesimi di ordine superiore al primo, si deve avere:

$$14)\quad \frac{\partial P_0}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} = 0\,, \frac{\partial P_0}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} = 0\,, \frac{\partial P_0}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v} + \frac{\partial P_0}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} = 0\,.$$

Dall'equazione indefinita del moto

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial P}{\partial u} + \mu \frac{\partial P}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial P}{\partial u} + \nu \frac{\partial P}{\partial v}\right) = \left(\boldsymbol{\Phi} - \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) H$$

se si suppone $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{F} = cost.$, come nel caso della forza peso e si considerano λ', μ', ν' come infinitesimi del primo ordine si ottiene la seguente:

$$15)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda' \frac{\partial P_0}{\partial u} + \lambda_0 \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} + \mu' \frac{\partial P_0}{\partial v} + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu' \frac{\partial P_0}{\partial u} + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial u} + \nu' \frac{\partial P_0}{\partial v} + \nu_0 \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial v}\right) = - H \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2}\,. \end{aligned}$$

A questa vanno associate le condizioni che si devono verificare sui bordi l_i fissi

$$16)\quad \boldsymbol{s} = 0\,,$$

e quelle che devono essere verificate sui bordi liberi m_k

$$17)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda'\left(E \frac{\partial u}{\partial n} + F \frac{\partial v}{\partial n}\right) + \mu'\left(F \frac{\partial u}{\partial n} + G \frac{\partial v}{\partial n}\right) = 0\,, \\ &\mu'\left(E \frac{\partial u}{\partial n} + F \frac{\partial v}{\partial n}\right) + \nu'\left(F \frac{\partial u}{\partial n} + G \frac{\partial v}{\partial n}\right) = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Se ora si pone, separando le variabili, $s = \alpha e^{ht}$, $\lambda' = \lambda'' e^{ht}$, $\mu' = \mu'' e^{ht}$, $\nu' = \nu'' e^{ht}$, le nuove funzioni dovranno soddisfare alla

$$18)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda'' \frac{\partial P_0}{\partial u} + \lambda_0 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \mu'' \frac{\partial P_0}{\partial v} + \mu_0 \frac{\partial \alpha}{\partial v}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu'' \frac{\partial P_0}{\partial u} + \mu_0 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \nu'' \frac{\partial P_0}{\partial v} + \nu_0 \frac{\partial \alpha}{\partial v}\right) = - h^2 H \alpha ,$$

con le condizioni che si ottengono dalle 16) e 17) facendo le stesse sostituzioni, e dove α deve verificare la 14), ove si ponga α al posto di a. Denoteremo con 14′), 16′), 17′) le relazioni che si ottengono dalle 14), 16), 17), con queste sostituzioni.

Lo studio delle vibrazioni libere è ricondotto ad un sistema del tipo di Sturm-Liouville costituito dalle 18) e dalle 14′) con con le condizioni 16′) e 17′).

Il Prof. Laura a questo punto, sfruttando una formula dovuta a Beltrami riesce a stabilire che gli autovalori del problema sono tutti o reali o immaginari puri. Per dirimere le due possibilità, di autovalori reali o immaginari puri, Egli sfrutta la seguente formula che si deduce con facili calcoli che omettiamo

$$19)\qquad h^2 \int_\sigma \alpha^2 d\sigma = \int_\sigma \left[\alpha_0 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + 2\mu_0 \frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \nu_0 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2\right] d\sigma ,$$

ove con σ si intenda la superficie equilibrata. È qui che riesce in generale più agevole supporre che siano verificate le condizioni

$$20)\qquad \lambda_0 \leq 0 \ , \quad \nu_0 \leq 0 \ , \quad \lambda_0 \nu_0 - \mu_0^2 \geq 0 \ ,$$

affinchè la forma quadratica che compare sotto il segno di integrale nel secondo membro della 19) sia definita negativa, e gli autovalori non possano essere che immaginari puri. Se però si tiene presente che il vettore α che compare nella 19) non è arbitrario, ma deve soddisfare alle equazioni 14′) ed alle condizioni 16″), si riconosce che non è necessario che siano verificate le 20), ma basteranno altre condizioni, da determinarsi caso per caso, atte ad assicurare che l'integrale a secondo membro della 19) sia negativo per ogni vettore $\boldsymbol{\alpha}$ (u, v) soddisfacente alle equazioni 14') su tutta σ, ed alle condizioni 16') negli archi fissi del contorno. Faremo vedere nel prossimo numero, come nel caso di una configurazione cilindrica, questo metodo conduca a determinare configurazioni di equilibrio stabili ma non soddisfacenti alle condizioni 20) e quindi non assolutamente stabili.

3. - Applicazione delle superfici cilindriche.

Applichiamo il criterio esposto alla fine del numero precedente per studiare la stabilità delle configurazioni cilindriche richiamate nel n. 2.

Determiniamo dapprima lo spostamento infinitesimo più generale, a partire dalla configurazione cilindrica. Si tratta quindi di determinare l'espressione di $\boldsymbol{\alpha}$ (u, v) soddisfacente alle 14') ove si ponga per P_0 l'espressione data da 1) cioè $P_0 = O + \boldsymbol{a}\, u + \boldsymbol{b}$, ed alle condizioni 16'). Questo vettore $\boldsymbol{\alpha}$ (u, v) dovrà soddisfare quindi alle equazioni:

$$14'')\qquad \boldsymbol{a} \times \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u} = 0, \quad \boldsymbol{b}' \times \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial v} = 0, \quad \boldsymbol{a} \times \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial v} + \boldsymbol{b}' \times \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u} = 0 .$$

Se ora si pone

$$21)\qquad \boldsymbol{\alpha} = l\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b}' + n\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}'$$

le 14'') danno:

$$\frac{\partial l}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial v} + n\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}'' \wedge \boldsymbol{b}' = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial v} + \frac{\partial m}{\partial u} = 0$$

dalle quali si ha integrando:

$$22)\qquad l = \varphi_1(v),\ m = -u\varphi_1'(v) + \varphi_2(v),\ n = \rho\left(-u\varphi_1''(v) + \varphi_1'(v)\right),$$

dove abbiamo denotato con ρ la curvatura della sezione retta del cilindro. Si ha quindi:

$$23)\qquad \boldsymbol{\alpha} = \varphi_1(v)\,\boldsymbol{a} + (\varphi_2(v) - u\varphi_2'(v))\,\boldsymbol{b}' + \rho(\varphi_2'(v) - u\varphi_1''(v))\,\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}'.$$

La 23) ci dà quindi l'espressione dello spostamento infinitesimo regolare più generale della superficie a partire dalla configurazione cilindrica, ove si osservi però che $\varphi_1(v)$ e $\varphi_2(v)$ devono soddisfare alle condizioni agli estremi espresse dalle 16'). Se infatti $v = v_1$ e $v = v_2$ sono le generatrici fisse dovrà essere qualunque sia u:

$$16'') \qquad \boldsymbol{\alpha}(u, v_1) = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\alpha}(u, v_2) = 0 \,,$$

e da queste si traggono immediatamente, data l'indipendenza dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ le condizioni:

$$24) \quad \varphi_1(v_1) = \varphi_1'(v_1) = \varphi_1''(v_1) = 0 \,, \quad \varphi_1(v_2) = \varphi_1'(v_2) = \varphi_1''(v_2) = 0 \,,$$

ed inoltre

$$24') \qquad \varphi_2(v_1) = \varphi_2'(v_1) = 0 \,, \qquad \varphi_2(v_2) = \varphi_2'(v_2) = 0 \,.$$

Per calcolare l'integrale che compare a secondo membro della 19) si determinano dapprima agevolmente le espressioni:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u} = -\varphi_1'(v)\, \boldsymbol{b} - \rho\, \varphi_1''(v)\, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}' \,,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial v} = \varphi_1'(v)\, \boldsymbol{a} + [(\varphi_2(v) - u\varphi_1'(v)) + \rho\rho'\,(\varphi_2'(v) - u\varphi_1''(v)) +\\ + \rho^2\,(\varphi_2''(v) - u\varphi_1'''(v))]\, \boldsymbol{b}''.\end{aligned}$$

Queste con le posizioni semplificative:

$$25) \qquad \begin{aligned}\psi_1(v) &= \varphi_1'(v) + \rho\rho'\varphi_1''(v) + \rho^2\varphi_1'''(v) \,,\\ \psi_2(v) &= \varphi_2(v) + \rho\rho'\,\varphi_2'(v) + \rho^2\,\varphi_2''(v) \,,\end{aligned}$$

assumono la forma più semplice:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u} = -\varphi_1'(v)\, \boldsymbol{b}' - \rho\,\varphi_1''(v)\, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}'$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial v} = \varphi_1'(v)\, \boldsymbol{a} + (\psi_2(v) - u\,\psi_1(v))\, \boldsymbol{b}''.$$

Si hanno infine le seguenti espressioni:

$$
26)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 = \varphi_1'^2 + \rho^2 \varphi_1''^2 ,\\
&\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 = \varphi_1'^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\psi_2(v) - u\,\psi_1(v)\right]^2 ,\\
&\frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -\,\varphi_1''(v)\left[\psi_2(v) - u\,\psi_1(v)\right] .
\end{aligned}
\right.
$$

Ci possiamo ora calcolare esplicitamente l'integrale a secondo membro della 19) nel caso concreto della configurazione cilindrica più generale, considerata nel n. 2. Esso vale:

$$
27)\qquad \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{-f(v)}^{f(v)} \Big\{ \lambda_0 (\varphi_1'^2 + \rho^2 \varphi_1''^2) - 2\,\mu_0\, \varphi_1''(v)\left[\psi_2(v) - u\,\psi_1(v)\right] +
+ \nu_0 \left[\varphi_1'^2 + \frac{1}{\rho^2}\Big(\psi_2(v) - u\,\psi_1(v)\Big)^2\right] \Big\}\, du
$$

ove λ_0, μ_0, ν_0 sono date dalle formule 5).

Sostituendo a λ_0, μ_0, ν_0 le espressioni che loro competono per le 5) ed integrando rispetto ad u, l'integrale doppio 27) diventa:

$$
28)\qquad \int_{v_1}^{v_2} \Big\{ 2f\left[\frac{f^2}{3}\left(\frac{\zeta f'}{f}\right)' + f'^2\zeta + \zeta\right]\varphi_1'^2 + 2f\rho^2\left[\frac{f^2}{3}\left(\frac{\zeta f'}{f}\right)' +
+ f'^2\zeta\right]\varphi_1''^2 + \frac{4}{3} f^2 \zeta f' \varphi_1'' \psi_1 + \frac{\zeta}{\rho_2}\frac{2f^3}{3}\psi_1^2 + \frac{2\zeta f}{\rho^2}\psi_2^2 \Big\}\, dv .
$$

Affinchè questo sia negativo è intanto necessario che sia $\zeta < 0$ data l'arbitrarietà di ψ_2. Tenuta inoltre presente l'indipendenza delle ψ_2 dalle ψ_1 e la dipendenza espressa dalla prima delle 24) di ψ_1 da φ_1, si deduce quale condizione di stabilità della configurazione rigata, oltre alla $\zeta < 0$ già detta, una condizione del tipo:

$$29)\qquad \int_{v_1}^{v_2} \sum_{0}^{2}{}_{ik}\, a_{ik}\, \varphi_i \varphi_k\, d v \leq 0 \qquad \begin{cases} \varphi_i = \varphi_1^{(i)} \\ \varphi_0 = \varphi_1 \end{cases} \qquad i = 1\,,\,2$$

per tutte le φ_1 che soddisfano alle condizioni 24) ove le a_{ik} sono funzioni note della v. Le espressioni di a_{ik} si ottengono subito dalla 28) tenute beninteso presenti le posizioni 24). Si ha precisamente:

$$30)\quad \begin{cases} a_{00} = 2f\left[\dfrac{f^2}{3}\left(\dfrac{\zeta f'}{f}\right)' + f'^2\zeta + \zeta\right] + \dfrac{2\zeta f^3}{3\rho^2}\,, \\[2ex] a_{01} + a_{10} = \dfrac{4}{3} f^2 \zeta f' + \dfrac{4}{3} f^3 \dfrac{\rho'}{\rho}\,,\quad a_{02} + a_{20} = \dfrac{4}{3}\zeta f^3\,, \\[2ex] a_{11} = 2f\rho^2\left[\dfrac{f^2}{3}\left(\dfrac{\zeta f'}{f}\right)' + f'^2\zeta\right] + \dfrac{4}{3} f^2\zeta f'\rho\rho' + \dfrac{2}{3}\zeta f^3\rho^2, \\[2ex] a_{12} + a_{21} = \dfrac{4}{3}\rho^2 f^2 \zeta f' + \dfrac{4}{3}\zeta f^3 \rho\rho'\,,\quad a_{22} = \dfrac{2}{3}\zeta f^3 \rho^2\,. \end{cases}$$

La condizione espressa dalla 29) che deve essere verificata per ogni φ_1 soddisfacente alle condizioni 25) si potrebbe studiare riguardando il funzionale a primo membro della 29) come una variazione seconda in un problema di estremo, a limiti vincolati, per un integrale del tipo

$$\int_{v_1}^{v_2} F(v\,,\,\varphi\,,\,\varphi',\,\varphi'')\, d v\,.$$

Ricorrendo quindi alla teoria classica del calcolo delle variazioni si avrebbero condizioni sufficienti perchè il funzionale 29) risulti negativo per ogni φ_1 soddisfacente alle 25). Noi però qui avendo sempre per scopo di dare soltanto un esempio di una configurazione non assolutamente stabile ci accontenteremo, come faremo nel prossimo numero, di verificare che, per una certa configurazione cilindrica, la condizione espressa più sopra è verificata.

4. - Esempio di una superficie cilindrica equilibrata stabile ma non completamente stabile.

Consideriamo il caso di un velo della forma di un triangolo rettangolo isoscele sospeso, per l'ipotenusa e il vertice opposto, nelle condizioni che abbiamo già visto al n. 1, in maniera che la configurazione di equilibrio cilindrica sia possibile.

Ricordando quanto abbiamo esposto al n. 1, dovremo porre $f(v) = v$. Denotiamo con x e y le componenti di $\boldsymbol{b}$ rispettivamente secondo l'asse orizzontale orientato nel senso delle v crescenti e secondo la verticale diretto verso l'alto. Ricordate le espressioni di ξ ed η date dalle formule 4) si perviene, con facili integrazioni, dalle equazioni di equilibrio, alle espressioni seguenti:

$$\text{31)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + \left(\frac{1}{2}v^2 + c_2\right)^2}} , \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{\frac{1}{2}v^2 + c_2}{\sqrt{c_1^2 + \left(\frac{1}{2}v^2 + c_2\right)^2}} . \end{aligned} \right.$$

Si supponga, come è naturale, che la concavità della direttrice di simmetria sia rivolta verso l'alto, ed inoltre, come è sempre lecito, che tale direttrice sia inizialmente decrescente; allora sarà senz'altro:

$$\text{32)} \qquad c_1 > 0 \quad , \qquad c_2 < 0$$

Si hanno allora senza difficoltà le seguenti espressioni per ξ, η, ρ espresse in termini di v e delle costanti c_1 e c_2 soddisfacenti alle condizioni 32):

$$33)\quad \begin{cases} \xi = -\dot{x}\rho = -\dfrac{1}{v}\sqrt{c_1^2 + \left(\dfrac{1}{2}v^2 + c^2\right)^2}\,, \\[2ex] \eta = \ddot{x}\rho = \dfrac{\dfrac{1}{2}v^2 + c_2}{\sqrt{c_1^2 + \left(\dfrac{1}{2}v^2 + c_1^2\right)^2}}\,, \\[2ex] \rho = \dfrac{c_1^2 + \left(\dfrac{1}{2}v^2 + c_2\right)^2}{c_1 v}\,. \end{cases}$$

Le 30) per $f(v) = v$ diventano:

$$30')\quad \begin{cases} a_{00} = \dfrac{2}{2}v(\xi v + 5\xi) + \dfrac{2}{3}\dfrac{\xi v^3}{\rho^2}\,, \\[2ex] a_{01} + a_{10} = \dfrac{4}{3}v^3\xi + \dfrac{4}{3}v^3\dfrac{\rho}{\rho}\,,\quad a_{02} + a_{20} = \dfrac{4}{3}\xi v^3\,, \\[2ex] a_{11} = \dfrac{2}{3}v\rho^2(\xi' v + 2\xi) + \dfrac{4}{3}v^2\xi\rho\rho' + \dfrac{2}{3}\xi v^3\rho^2\,, \\[2ex] a_{12} + a_{21} = \dfrac{4}{3}\rho^2 v^2\xi + \dfrac{4}{3}\xi v^3\rho\rho'\,,\quad a_{22} = \dfrac{2}{3}\xi v^3\rho^2\,, \end{cases}$$

e l'integrale 28) assume la forma:

$$28')\quad \int_{v_1}^{v_2}\left\{\frac{2v}{3}\left[(\xi v + 5\xi) + \frac{\xi v^2}{\rho^2}\right]\varphi_1' + \frac{4}{3}v^2\left(\xi + \frac{v\rho'}{\rho}\right)\varphi_1'\rho_2'' + \right.$$
$$+ \frac{4}{3}\xi v^3\varphi_1'\varphi_1'' + \left[\frac{2}{3}v\rho^2(\xi v + 2\xi) + \frac{4}{3}v^2\xi\rho\rho' + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}v^2\rho'^2\right]\varphi_2'^2 + \frac{4}{3}\xi v^2\rho\,(\rho + v\rho')\,\varphi_1''\varphi''' +$$
$$\left. + \frac{2}{3}\xi v^2\rho^2\varphi^{2'''}\right\}dv\,.$$

Se si integrano ora per parti i termini che contengono le derivate di φ_1 di ordine diverso, e si tengono presenti le relazioni 24) si può dare all'integrale 28') la forma canonica

$$28'')\qquad \int_{v_1}^{v_2} (\alpha\,\varphi_1' + \beta\,\varphi_1''^2 + \gamma\,\varphi_1'''^2)\,dv\,,$$

ove α, β, γ hanno le espressioni seguenti:

$$30'')\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 4\,\xi'\,v^2 + 6\,\xi\,v + \frac{2}{3}\,\xi\,\frac{v^3}{\rho^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{3\,v^3\,\rho'}{\rho}\right)' + \frac{2}{3}\,\xi''\,v^3\,, \\ \beta &= -\frac{2}{3}\,\rho\,(\xi\,v^3\,\rho')' - \frac{4}{3}\,\xi\,v^3\,, \\ \gamma &= \frac{2}{3}\,\xi\,v^2\,\rho^2\,. \end{aligned} \right.$$

Tenuto ora conto delle 33) le 30'') diventano:

$$34)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= -\frac{v^8 + 13v^6 + 24v^4\left(\frac{5}{3}c_2^2 + 4c_1^2\right) + 80v^2 c_2(c_1^2 + c_2^2) + 96(c_1^2 + c_2^2) + 16c_1^2}{24\left(c_1^2 + \left(\frac{1}{2}v^2 + c_1^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\,, \\ \beta &= \frac{2}{3\,c_1^2}\left(c_1^2 + \left(\frac{1}{2}v^2 + c_2\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{v^4}{4}\left(\frac{9}{2}\,v^2 + 19\,c_2\right) + \left(\frac{11\,v^2}{2} + c_2\right)(c_1^2 + c_2^2)\right), \\ \gamma &= -\frac{2}{3\,c_1^3}\left(c_1^2 + \left(\frac{1}{2}\,v^2 + c_2\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}\,. \end{aligned} \right.$$

Si nota ora subito che si ha:

$$35)\qquad \begin{cases} \alpha(0) = -\left(4\,(c_1^2 + c_2^2) + \dfrac{2}{3}c_1^2\right)(c_1^2 + c_2^2)^{-\frac{3}{2}}\,, \\[2ex] \beta(0) = \dfrac{2\,c_2}{3\,c_1^2}\,(c_1^2 + c_2^2)^{\frac{3}{2}}\,, \\[2ex] \gamma(0) = -\dfrac{2}{3\,c_1^2}\,(c_1^2 + c_2^2)^{\frac{5}{2}}\,, \end{cases}$$

e da queste risultano evidenti le disugualianze:

$$36)\qquad \alpha(0) < 0\;, \qquad \beta(0) < 0\;, \qquad \gamma(0) < 0\;,$$

dato che è $c_2 < 0$ per le 32).

Le considerazioni qui fatte ci permettono di concludere con rapidità come avevamo asserito. Infatti osservato che le funzioni $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$ sono funzioni continue della v, come appare dalle 34), e tenute presenti le 36) si consideri un numero $\delta > 0$, che certamente esiste, tale che per $0 \leq v \leq \delta$ siano $\alpha(v)$, $\beta(v)$ e $\gamma(v)$ tutte e tre negative.

Siano ora v_1, e v_2 due qualunque valori di v soddisfacenti alla

$$0 < v_1 < v_2 < \delta$$

e si consideri la porzione trapezioidale del velo triangolare, compresa tra le generatrici $v = v_1$ e $v = v_2$.

Sul triangolo equilibrato si irrigidiscano e si fissino, nella posizione che occupano, le due generatrici $v = v_1$, $v = v_2$; la configurazione di equilibrio della porzione di velo compresa tra le due generatrici ora dette non viene turbata in conseguenza di ciò, onde le espressioni di ζ, η e ρ ed i valori delle costanti c_1 e c_2 restano tali e quali.

Sulla porzione così fissata del velo, i coefficienti α, β, γ che compaiono nelle 28″) si mantengono negative per ogni valore di v. Risulta allora negativo l'integrale 28'') per ogni funzione φ_1 soddisfacente alle 25) e quindi risulta negativo l'integrale a secondo membro della 19). Tale configurazione è quindi stabile.

Osserviamo ora che, per $v < \sqrt{-2c_2}$, dalla seconda delle 33) risulta $\eta < 0$. Poichè si può sempre scegliere v_1 così piccolo che risulti $v_1 < \sqrt{-2c_2}$, sulla porzione di velo considerata *non risulta dappertutto* $\eta < 0$, cioè non è verificata la condizione 11) del n. 1. In questa configurazione di equilibrio, pur essendo essa stabile per quanto abbiamo visto, le forze interne non hanno quindi tutte il carattere di tensioni.