Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Guido Stampacchia

Criteri di compattezza per gli insiemi di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 201-213

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__201_0>

CRITERI DI COMPATTEZZA PER GLI INSIEMI DI FUNZIONI CONTINUE RISPETTO ALLE VARIABILI SEPARATAMENTE

Nota (*) *di* Guido Stampacchia (*a Napoli*).

Sia $f(x, y)$ una funzione definita, per semplicità, nel quadrato $\Delta : \{ 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 \}$ continua come funzione di x in $(0, 1)$ per quasi tutti i valori di y in $(0, 1)$ e continua come funzione di y in $(0, 1)$ per quasi tutti i valori di x. Diremo brevemente che la funzione $f(x, y)$ è *continua rispetto alle variabili separatamente in* Δ (¹).

Ho, in una precedente Nota (²), introdotto la seguente definizione: « Una successione di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente in $\Delta : \{ f_n(x, y) \}$ *converge quasi uniformemente in modo regolare in* Δ se, fissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un insieme I del piano (x, y) che si proietta sugli assi coordinati in due insiemi I^x ed I^y di misura minore di ε e tale che la successione converga uniformemente nei punti di Δ che non appartengono ad I ».

Scopo di questa Nota è di dimostrare il seguente

(*) Pervenuta in Redazione il 4 febbraio 1950.

(¹) G. Scorza Dragoni: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un' altra variabile.* [Rend. Sem. Matem. di Padova - vol. XVII (1948), pp. 102-106]. E. Baiada: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili, ecc.* [Ibidem – pp. 201-218].

(²) *Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabile rispetto ad un' altra.* [Rend. Accad. Naz. dei Lincei - s. VIII, vol. VI (1949), pp. 198-201]. A proposito dell' enunciato del teorema III di p. 201, si legga al terzo rigo: « *ad y separatamente ed equilimitate. Se le funzioni, ecc.* » ed al settimo: *mis* $I_y > (d - c) - \varepsilon$.

TEOREMA: *Sia*

$$(1) \qquad f_1(x, y), \ f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y), \ldots.$$

una successione di funzioni definite in Δ *ed ivi equilimitate* ([3]), *assolutamente continue come funzioni di* x *in* $(0, 1)$ *per quasi tutti i valori di* y *in* $(0, 1)$ *ed assolutamente continue come funzioni di* y *in* $(0, 1)$ *per quasi tutti i valori di* x.

Esistano due numeri positivi α *ed* A *tali che, per ogni* n, *si abbia*:

$$(2) \qquad \iint_\Delta \left\{ |p_n|^{1+\alpha} + |q_n|^{1+\alpha} \right\} dx\,dy \leq A \quad \left(p_n = \frac{\partial f_n}{\partial x}, \ q_n = \frac{\partial f_n}{\partial y}\right).$$

Allora è possibile estrarre dalla (1) *una successione che converge quasi uniformemente in modo regolare in* Δ.

Questo risultato è, a mio parere, di una certa importanza in molte questioni di Analisi; in un prossimo lavoro me ne servirò per dimostrare l'esistenza del minimo assoluto di integrali doppi.

A proposito di questo teorema ricorderò che, supponendo le funzioni assolutamente continue secondo TONELLI ed $\alpha > 1$, è possibile assicurare la convergenza uniforme di una successione estratta ([4]). Per $\alpha = 1$, la stessa convergenza uniforme è assicurata nelle ipotesi che le funzioni siano di natura particolare ([5]) ed è noto che, senza queste ulteriori ipotesi sulla natura delle funzioni, la convergenza uniforme può mancare. I risultali fin qui noti per $\alpha < 1$ hanno per scopo di assicurare tipi di convergenza globale della successione estratta ([6]), e, a mio parere, la conver-

([3]) Cfr. quanto è detto a nota ([12]) o nota ([14]).

([4]) L. TONELLI: *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* [Annali Sc. Norm. Sup. di Pisa - vol. II (1933), pp. 89-130, p. 97].

([5]) H. LEBESGUE: *Sur le problème de Dirichlet.* [Rend. Circ. Matem. di Palermo - t. XXIV (1907), pp. 371-402, p. 386; R. CACCIOPPOLI: *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti e sui problemi regolari del calcolo delle variazioni.* [Rend. Accad. Naz. dei Lincei - s. VI, vol. XXII (1935)].

([6]) C. B. MORREY: *Functions of several variables and absolute continuity.* [Duke Mathem. Journal - vol. 6 (1940), pp. 187-215.

genza puntuale considerata qui è più proficua in molte applicazioni.

Ricorderò infine che si estendono due teoremi dati rispettivamente da G. Fubini (7) e da L. Tonelli (8) per le loro ricerche di calcolo delle variazioni.

Nel paragrafo 2 dimostro anzitutto un criterio necessario e sufficiente affinchè da un insieme di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente si possa estrarre una successione che converga quasi uniformemente in modo regolare. Questo criterio è analogo ad un criterio di M. Fréchet per le successioni di funzioni misurabili (9). Detto criterio si ottiene facilmente con ragionamenti analoghi a quelli del Fréchet quando si sostituisca la considerazione della misura piana con la misura delle proiezioni degl' insiemi.

Analoghi risultati sono conseguiti per gli insiemi di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad un' altra (10).

Ringrazio il Prof. Caccioppoli per le indicazioni che mi ha fornito circa la linea della dimostrazione del teorema enunciato.

1. - Indicheremo brevemente con S la classe delle funzioni $f(x, y)$ definite in Δ, ivi continue rispetto ad x per quasi tutti i valori di y e misurabile rispetto ad y per quasi tutti i valori di x. Ricordiamo che una funzione di S è *quasi continua in modo semiregolare rispetto ad* x (11) : cioè, fissato $\varepsilon < 0$, è possibile determinare un insieme I_ε che si proietta sull' asse x in

(7) G. Fubini: *Sul principio di minimo, ecc.* [Rend. Circolo Matem. di Palermo - t. XXIII (1907) pp. 58-84].

(8) L. Tonelli: loc. cit., p. 126.

(9) M. Fréchet: *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables.* [Fund. Math. - t. IX (1927), pp. 25-32]; B. Pettineo: *Sulla convergenza puntuale delle successioni, ecc.* [Rend. di Matem. Univ. di Roma - s. V, vol. VI (1947), pp. 478-503].

(10) G. Scorza Dragoni, loc. cit.

(11) G. Scorza Dragoni, loc. cit.

un insieme I_ε^x di misura minore di ε, e tale che fuori di I_ε la funzione è continua.

Ciò posto daremo la seguente:

Definizione: Diremo che le funzioni della successione (1), definite in un insieme E ed appartenenti ad S, sono *egualmente quasi continue in modo semiregolare rispetto ad x in E* se, fissati due numeri positivi ε ed ω, è possibile decomporre E in N insiemi η_i in modo che l'oscillazione di ogni funzione $f_n(x, y)$ della (1) risulti minore di ω in ogni insieme η_i quando si prescinda dai punti di un insieme e_n che si proietta sull'asse x in un insieme e_n^x di misura minore di ε.

E dimostreremo il seguente:

Teorema: *Sia* $\{f_n(x, y)\}$ *una successione di funzioni di S, ivi equilimitate* (12) *ed egualmente quasi continue in modo semiregolare rispetto ad x. Allora è possibile estrarre dalla* (1) *una successione parziale che converge in E quasi uniformemente in modo semiregolare rispetto ad x.*

Indichiamo con $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ gli insiemi in cui viene diviso E e con e_n l'insieme dei punti di E tale che in $E - e_n$ la funzione $f_n(x, y)$ ha un'oscillazione inferiore ad $\frac{\omega}{3}$ in ogni η_i $(i = 1, 2, \ldots N)$, la misura di e_n^x essendo inferiore ad $\frac{\varepsilon}{2}$; sia poi $e_n^{(i)}$ l'insieme dei punti di e_n che cadono in η_i $(e_n^{(i)} = e_n \cdot \eta_i)$. Con $l_n^{(i)}$ indichiamo l'estremo superiore (finito) della funzione $f_n(x, y)$ in $\eta_i - e_n$.

Estraiamo dall'insieme di punti dello spazio ad N dimensioni $\{l_n^{(1)}, l_n^{(2)}, \ldots l_n^{(N)}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una successione convergente che per semplicità indicheremo ancora con $\{l_n^{(s)}\}$ $(s = 1, 2, \ldots, N;\ n = 1, 2, \ldots)$ e, tralasciando eventualmente un numero finito di termini, potremo supporre che per due indici

(12) L'ipotesi che le funzioni siano equilimitate si può attenuare richiedendo che le funzioni siano tali che, fissato un numero positivo $\varepsilon > 0$, sia possibile determinare un numero positivo H in modo che si abbia $|f_n(x, y)| \leq H$ in tutti i punti di E, eccettuati quelli di un insieme e_n che si proietta sull'asse x in un insieme di misura minore di ε. Il ragionamento rimane in tale ipotesi inalterato.

qualsiasi n ed n' si abbia:

$$| l_n^{(s)} - l_{n'}^{(s)} | < \frac{\omega}{3} \qquad (s = 1, 2, \ldots, N).$$

Sia $\{ f_n(x, y) \}$ la corrispondente successione estratta dalla (1). Evidentemente si avrà in $\eta_i - e_n^{(i)} - e_{n'}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$

$$(3) \qquad | f_n(x, y) - f_{n'}(x, y) | < \omega$$

e quindi la (3) vale in tutti i punti di E che non appartengono nè a e_n nè a $e^{n'}$. I punti di E in cui:

$$| f_n(x, y) - f_{n'}(x, y) | \geq \omega$$

cadono dunque nell'insieme $e_n + e_{n'}$ che si proietta sull'asse x in un insieme di misura minore di ε; scriveremo brevemente:

$$I^x [| f_n - f_{n'} | \geq \omega] < \varepsilon .$$

Sia ora $\{ \sigma_n \}$ una successione di numeri positivi decrescenti ed infinitesima. Il procedimento precedente, ponendo $\omega = \varepsilon = \sigma_1$, ci permette di estrarre dalla (1) una successione:

$$(4_1) \qquad f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}, \ldots$$

in modo che

$$I^x [| f_{1n} - f_{1n'} | \geq \sigma_1] < \sigma_1 .$$

Con lo stesso procedimento estraiamo dalla (4_1) una successione

$$(4_2) \qquad f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n}, \ldots$$

in modo che

$$I^x [| f_{2n} - f_{2n'} | \geq \sigma_2] < \sigma_2$$

e così via di seguito.

Consideriamo poi la successione

(5) $$f_{11}\,,\ f_{22}\,,\ldots,\ f_{nn}\,,\ldots.$$

che indicheremo ancora con $\{ f_n(x, y) \}$; essa è tale che comunque si fissi un numero $\sigma > 0$ è possibile determinare un indice ν in modo che, se n ed n' sono due indici maggiori di ν, si abbia:

$$I^x \left[| f_n - f_{n'} | \geq \sigma \right] < \sigma\,.$$

Fissato σ, sia n_r un indice tale che

$$I^x \left[| f_n - f_{n'} | \geq \frac{\sigma}{2^r} \right] < \frac{\sigma}{2^r}$$

per $n \geq n_r$ ed $n' \geq n_r$. Determiniamo n_r in modo che $n_{r+1} > n_r$ e consideriamo la successione

(6) $$f_{n_1}\,,\ f_{n_2}\,,\ldots,\ f_{n_r}\,,\ldots.$$

Essa è tale che

$$I^x \left[| f_{n_r} - f_{n_{r+1}} | \geq \frac{\sigma}{2^r} \right] < \frac{\sigma}{2^r}\,.$$

Poniamo ora:

$$I = \sum_{r=1}^{\infty} I \left[| f_{n_r} - f_{\ \ +1} | \geq \frac{\sigma}{2^r} \right]$$

ed osserviamo che la misura della proiezione di I sull'asse x risulta minore di $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sigma}{2^r} = \sigma$.

Sia ora θ un numero positivo e $\bar{r}$ un indice tale che $\frac{\sigma}{2^{\bar{r}}} < \theta$; se (x, y) non appartiene ad I, ed h e k $(h < k)$ sono due indici maggiori di $\bar{r}$, si ha:

$$| f_h - f_k | \leq | f_h - f_{h+1} | + | f_{h+1} - f_{k+1} | + \dots + | f_{k+1} - f_k | <$$
$$< \sum_{r=h}^{k} \frac{\sigma}{2^r} < \frac{\sigma}{2^-} < \theta$$

e con ciò abbiamo dimostrato che la (6) converge uniformemente in $E - I$.

Per terminare, fissiamo una successione di numeri positivi decrescente ed infinitesima: $\{ \varepsilon_r \}$. Estraiamo con il procedimento precedente dalla (5) una successione

$$(7_1) \qquad f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n}, \dots$$

che converga uniformemente in $E - I_1$, con $mis\, I_1^x < \varepsilon_1$.

Dalla (7_1) estraiamo una successione

$$(7_2) \qquad f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n}, \dots$$

che converga uniformemente in $E - I_2$ con $mis\, I_2^x < \varepsilon_2$. La (7_1) converge uniformemente in $E - I_1$ ed in $E - I_2$ e quindi in $E - I_1 I_2$ ove $mis\, (I_1 I_2)^x < \varepsilon_2$.

E così via di seguito.

Consideriamo infine la successione

$$(8) \qquad f_{11}, f_{22}, \dots, f_{nn}, \dots$$

Essa converge in E quasi uniformemente in modo semiregolare rispetto ad x. Infatti, fissato un numero ε positivo, prendiamo r in modo che $\varepsilon_r < \varepsilon$; la successione (8) ha i suoi termini a partire dal r^{mo} contenuti nella successione

$$(7_r) \qquad f_{r1}, f_{r2}, \dots, f_{rn}, \dots$$

che converge uniformemente in $E - (I_1 I_2 \dots I_r)$ con $mis\, (I_1 \cdot I_2 \dots$ $\dots I_r)^x < \varepsilon_r < \varepsilon$ [13].

[13] Osserviamo che dalla dimostrazione precedente risulta anche che dalla (1) è possibile estrarre una successione che *converge in misura in modo semiregolare rispetto ad x*, essendo evidente il senso che a ciò deve attribuirsi.

2 – Definizione: Diremo che le funzioni della successione (1), definite in un insieme E ed ivi continue rispetto alle variabili separatamente, sono *egualmente quasi continue in modo regolare in E* se, fissati due numeri positivi ε ed ω, è possibile decomporre E in N insiemi η_i in modo che l'oscillazione di ogni funzione $f_n(x, y)$ della (1) risulti minore di ω in ogni insieme η_i, quando si prescinde dai punti di un insieme e_n, che si proietta sugli assi in due insiemi e_n^x, e_n^y di misura minore di ε.

Dal teorema dimostrato al paragrafo precedente discende immediatamente l'altro

Teorema: *Sia $\{ f_n(x, y) \}$ una successione di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente in E, ivi egualmente quasi continue in modo regolare ed equilimitate* ([14]). *Allora è possibile estrarre dalla* (1) *una successione parziale che converge in E quasi uniformemente in modo regolare.*

3. – Ci proponiamo ora di dimostrare che *se le funzioni* (*appartenenti ad S*) *della successione* (1), *definite nel quadrato Δ, sono assolutamente continue come funzioni di y per quasi tutti i valori di x in* $(0, 1)$ *ed esistono due numeri positivi α ed A tali che, per ogni n, si abbia*:

$$(2'') \qquad \iint_{\Delta} | q_n |^{1+\alpha} \, dx \, dy \leq A$$

le funzioni della (1) *godono della seguente proprietà: fissati due numeri positivi ε ed ω, è possibile determinare un numero $\delta > 0$ tale che, per tutti i valori di x di* $(0, 1)$, *eccettuati quelli di un insieme e_n^x di misura minore di ε, si abbia, per ogni n*: $| f_n(x, y') - f_n(x, y'') | < \omega$ *per ogni coppia* (y', y'') *tale che* $| y' - y'' | < \delta$.

Dividiamo l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse x in m parti uguali mediante i punti $0 \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_m \equiv 1$ e

([14]) Cfr. nota ([12]). In questo caso si richiederà che l'insieme e_n abbia le proiezioni sugli assi di misura minore di ε.

l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse y in m parti uguali mediante i punti $0 \equiv y_0 < y_1 < \ldots . < y_j < \ldots . < y_m \equiv 1$; il quadrato Δ resta diviso così in m^2 quadrati $q_{ij} \equiv \{ x_{i-1} \leq x \leq x_i ;\ y_{j-1} \leq y \leq y_j \}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$.

Supponiamo, per assurdo, che non si verifichi la proprietà suddetta. Allora è possibile fissare due numeri ε ed ω tali che, per ogni m, esiste almeno una funzione della (1) : $f_n(x, y)$ che, come funzione di y, ha un'oscillazione non inferiore ad $\frac{\omega}{2}$ in qualche intervallo (y_{j-1}, y_j) finchè non si prescinda dai valori di x che costituiscano un insieme di misura non inferiore ad ε.

Sia ora e_i^x [15] l'insieme dei valori x di (x_{i-1}, x_i) tali che la $f_n(x, y)$ ha, come funzione di y, un'oscillazione non inferiore ad $\frac{\omega}{2}$ in qualche (y_{j-1}, y_j). Quando si prescinde dai valori x di $\sum_{i=1}^{m} e_i^x$ si ha: $| f_n(x, y') - f_n(x, y'') | < \frac{\omega}{2}$ per ogni y' ed y'' tali che $| y' - y'' | < \frac{1}{m}$.

Ed allora, per quanto abbiamo supposto, deve essere:

$$mis \sum_{i=1}^{m} e_i^x \geq \varepsilon . \tag{9}$$

Dividiamo gli intervalli (x_{i-1}, x_i) in due categorie:

I) quelli per cui $m \cdot mis\, e_i^x < \frac{\varepsilon}{2}$;

II) i rimanenti.

Potremo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{m} e_i^x = \sum_i{}' e_i^x + \sum_i{}'' e_i^x$$

intendendo che la sommatoria Σ' va estesa a quegli indici che

(15) Per la misurabilità di e_i^x cfr. loc. cit. in (1).

corrispondono ad intervalli della prima categoria, e che la sommatoria Σ'' va estesa agli indici corrispondenti ad intervalli della seconda categoria.

Si ha allora:

$$mis \sum_i{}' e_i^x = \sum_i{}' \; mis\, e_i^x \leq \sum_i{}' \frac{\varepsilon}{2m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e si deduce per la (9) che $mis \sum_i{}'' e_i^x$ deve risultare maggiore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Ciò comporta che il numero degli intervallini (x_{i-1}, x_i) della seconda categoria deve superare $\frac{\varepsilon}{2} m$.

D'altra parte, detto e_{ij}^x l'insieme dei valori x tali che l'oscillazione di $f_n(x, y)$ risulta maggiore di $\frac{\omega}{2}$ in (y_{j-1}, y_j), avremo: $e_i^x = \sum_{j=1}^{m} e_{ij}^x$ e potremo scrivere:

$$\iint_\Delta |q_m|^{1+\alpha} dx\,dy \geq \sum_i{}'' \sum_{j=1}^{m} \int_{e_{ij}^x} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} |q_n|^{1+\alpha} dy \geq$$

$$\geq \sum{}'' \sum_{j=1}^{m} \int_{e_{ij}^x} \frac{\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} |q_n|\, dy\right)^{1+\alpha}}{(y_j - y_{j-1})^\alpha} dx \geq \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1+\alpha} m^\alpha \sum_i{}'' \sum_{=1}^{m} mis\, e_{ij}^x \geq$$

$$\geq \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1+\alpha} m^\alpha \sum_i{}'' mis\, e_i^x \geq \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1+\alpha} m^\alpha \sum_i{}'' \frac{\varepsilon}{2m} \geq$$

$$\geq \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1+\alpha} m^\alpha \frac{\varepsilon}{2} m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1+\alpha} m^\alpha \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

E questa contraddice la (2''), potendo m assumere valori grandi a piacere.

4. - Con le stesse notazioni del paragrafo precedente, fissato $\varepsilon = \dfrac{1}{r}$ ed $\omega > 0$, posto $\overline{e}_1 = min.\ lim.\ e_n^x$, si ha: $mis\ \overline{e}_1 < \dfrac{1}{r}$. Allora è possibile scegliere un valore x di $\left(0, \dfrac{1}{r}\right)$, sia $\overline{x}_1$, non appartenente a $\overline{e}_1$ e quindi ad infiniti insiemi e_n^x (siano quelli di indici: $n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{1s}, \ldots$). Poniamo poi $\overline{e}_2 = min.\ lim.\ e_{n_{1s}}^x$; analogamente, poichè $mis\ \overline{e}_2 < \dfrac{1}{r}$, è possibile fissare un valore x di $\left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{2}{r}\right)$, sia $\overline{x}_2$, che non appartiene ad infiniti insiemi $e_{n_{1s}}^x$. Così procedendo si trovano infiniti indici ai quali corrispondono infinite funzioni della (1) per le quali i punti $\overline{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ non appartengono ai corrispondenti insiemi e_n^x, e quindi, per il teorema del paragrafo precedente, è possibile determinare un numero $\sigma > 0$ in modo che

$$|f_n(\overline{x}_i, y') - f_n(\overline{x}_i, y'')| < \omega \tag{10}$$

per ogni y' e y'' tali che $|y' - y''| < \sigma$.

Applicando il solito procedimento diagonale, ponendo $\omega = \omega_n$ con $\{\omega_n\}$ successione di numeri decrescenti ed infinitesima, si dimostra che è possibile scegliere infinite funzioni della (1) tali che, fissato r ed ω (r intero e $\omega > 0$), esistono r valori $x : \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_i < \ldots \overline{x}_r$ con $\dfrac{i-1}{r} \leq \overline{x}_i \leq \dfrac{i}{r}$ ed un $\sigma > 0$ in modo che valga la (10) per ogni y', y'' tali che $|y' - y''| < \sigma$, $(i = 1, 2, 3 \ldots r)$ [16].

5. - Da quanto abbiamo detto ai paragrafi precedenti segue il teorema enunciato al principio. Basta osservare che i risultati dei §§ 4 e 5 valgono rispetto alle due variabili.

Fissati infatti due numeri positivi ε ed ω, dividiamo l'intervallo (0, 1) dell'asse y in parti uguali di ampiezza minore di

[16] Cfr. anche L. Tonelli: loc. cit., p. 126.

δ (determinato al § 4) mediante i punti $y_0 \equiv 0 < y_1 < \dots$ $\dots < y_j < \dots < y_m \equiv 1$; $y_{j-1} - y_j \equiv \frac{1}{m} < \delta$.

Si avrà allora che, per ogni x non appartenente all'insieme e_n^x di misura minore di ε:

$$(11) \qquad | f_n(x, y') - f_n(x, y'') | < \omega$$

se y' e y'' sono punti di uno qualunque degli intervalli (y_j, y_{j+1}).

Dividiamo poi l'intervallo $(0, 1)$ dell'asse x in parti uguali di ampiezza minore di σ mediante i punti $0 \equiv x_0 < x_1 < \dots$ $\dots < x_i < \dots < x_h \equiv 1$ e siano $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \dots, \overline{y}_m$ m valori di y, per cui $y_{i-1} \leq \overline{y}_i \leq y_i$, tali che si abbia, per infiniti valori di n:

$$(12) \qquad | f_n(x', \overline{y}_i) - f_n(x'', \overline{y}_i) | < \omega$$

se x' ed x'' sono due punti di uno degli intervalli (x_i, x_{i+1}). Ciò è possibile in base al ragionamento del § 5.

Il quadrato Δ viene così ad esser diviso in mh rettangoli $q_{ij} \equiv \{ x_{i+1} \leq x \leq x_i ; \; y_{j-1} \leq y \leq y_j \}$ $(i = 1, 2, \dots, h; \; j = 1, 2, \dots, m)$.

Siano (x', y') ed (x'', y'') due punti di uno dei rettangoli, ad esempio di q_{ij}, tali che nè x' nè x'' appartengano ad e_n^x; si avrà allora:

$$| f_n(x', y') - f_n(x'', y'') | \leq | f_n(x', y') - f_n(x', \overline{y}_i) | +$$
$$+ | f_n(x', \overline{y}_i) - f_n(x'', \overline{y}_i) | + | f_n(x'', \overline{y}_i) - f_n(x'', y'') | .$$

E per la (11) e per la (12), in ogni rettangolo q_{ij}, quando si prescinde dai valori di x appartenenti ad un insieme e_n^x di misura minore di ε, si ha:

$$| f_n(x', y') - f_n(x'', y'') | < 3\,\omega .$$

Con ciò resta dimostrato che è possibile scegliere infinite funzioni della (1) che risultano egualmente quasi continue in modo semiregolare rispetto ad x, e quindi per il teorema del § 1 è possibile estrarre una successione che converge quasi uniformemente in modo semiregolare in Δ.

Ripetendo gli stessi ragionamenti su questa successione dopo aver scambiato l'ufficio delle variabili, se ne deduce che si può estrarre dalla (1) una successione che converge quasi uniformemente in modo regolare in Δ ([17]).

([17]) I criteri di compattezza dati si estendono facilmente agli insiemi di funzioni. Ciò è ovvio, ammettendo il postulato di Zermelo. Non ammettendo detto postulato, basterà rifarsi ai noti procedimenti di Tonelli.