RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 1-43

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__1_0>

SU UN CRITERIO DI RIDUZIONE PER UN SISTEMA ALGEBRICO DI VARIETÀ

Memoria (*) *di* MARIO BALDASSARRI (*a Padova*).

Per primo M. NOETHER [1] dimostrò un classico suo teorema sulla razionalità delle superficie con un fascio razionale di curve razionali, costruendo una curva unisecante le curve del fascio. Dopo diversi anni (1898) il procedimento era esteso da F. ENRIQUES [2] alla costruzione della unisecante di un fascio irrazionale di curve razionali.

I procedimenti usati, di pura natura geometrica, sia quelli ben noti basati sulle curve (coniche) degeneri del fascio, sia quelli basati (come per primo fece CLEBSCH sulla F_2^4 del quarto ordine con retta doppia) sulla bisezione di una serie lineare, sono certamente modelli d'intuizione e penetrazione geometrica, ma restano limitati ai casi particolari che ne suggerirono la creazione, e formano un insieme pesante ed alquanto delicato nei dettagli, che tuttavia danno il tono del rigore a simili dimostrazioni.

Qualora poi si tentasse di estenderli a casi più generali, aumentando le dimensioni, ci si troverebbe di fronte a difficoltà quasi insuperabili.

Basti pensare al caso, che fu infatti lasciato irrisolto da F.

(*) Pervenuta in Redazione il 3 Agosto 1949.

[1] M. NOETHER: *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Kurven besitzen*, « Math. Ann. », Bd. 3, 1871.

[2] F. ENRIQUES: *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, « Math. Ann. », Bd. 52, 1899. Un riferimento per tale lavoro, può farsi alle: PAINLEVÈ: *Lectures sur les eq. differentials*, Paris. 1897, pp. 255-341.

Enriques ([3]), e che ha costituito in un certo senso il primo spunto a questa ricerca, di una varietà a tre dimensioni dello S_4 contenente un piano $(n - 3)$ — plo, e quindi un fascio razionale di superficie cubiche.

Cercare di dimostrare in tal caso l'esistenza di una curva unisecante le superficie cubiche del fascio col procedimento di Noether porterebbe ad urtare in gravi difficoltà nell'imporre le condizioni di appartenenza della curva unisecante alla V_3. Infatti manca qui qualcosa di perfettamente analogo alle fortunate coniche degeneri di Noether.

Il procedimento di Clebsch, esteso, porterebbe a lavorare su spazi multipli, disagevole campo di lavoro ancora oggi.

In definitiva chi si metta per tale strada ha la sensazione che quelle dimostrazioni geometriche ricorrano a complesse considerazioni non necessarie al problema, e non aderenti alla sua natura.

La prima volta, a nostra conoscenza, che nella letteratura si presenta la semplice idea che il problema della esistenza della unisecante, adombri soltanto relazioni di dimensione ed ordine, trattabili con un computo di costanti, è in un'opera di H. F. Baker ([4]), che lo osserva in un breve cenno, a proposito del teorema di Noether.

Frattanto l'algebra moderna aveva cominciato a penetrare nella geometria algebrica, ed è infatti del 1939 un importante studio di E. D. Tagg ([5]), il quale riprende il teorema di Noether con puri metodi algebrici, e riduce la questione della esistenza della unisecante di un fascio di coniche alla risoluzione di un sistema di equazioni non omogenee, con più incognite che equazioni.

([3]) F. Enriques: *Sulle irrazionalità da cui etc.*, « Math. Ann. », Bd. 49, 1897.

([4]) H. F. Baker: *Principles of Geometry*, Cambridge (1933), vol. VI, pag. 146. L'autore commette però una svista, scambiando per lineari delle equazioni quadratiche.

([5]) E. D. Tagg: *Surfaces which contain an irrational pencil of rational curves*, « Journal of the London Math. Soc. », vol. 14, 1939.

Per un altro verso, nello stesso anno, U. MORIN [6] procedeva con considerazioni geometriche, base la teoria dei piani doppi, allo studio delle V_{r+1} con ∞^r coniche, e trovava che esiste una varietà unisecante le ∞^r coniche se è soddisfatta una certa condizione necessaria e sufficiente: era il primo incontro con un caso in cui in generale non esiste la varietà unisecante.

F. CONFORTO tornava sull'argomento nel 1941, compiendo la prima estensione di tali ricerche al caso di varietà contenenti opportuni sistemi algebrici di quadriche. Il campo più vasto d'indagine gli consentiva di arrivare, sempre nello spirito di una ricerca algebrica, ad una condizione sufficiente per l'esistenza di una varietà unisecante. Egli richiamava inoltre l'attenzione «sull'importante problema» di assegnare il limite superiore della dimensione del sistema algebrico di quadriche, rispetto la dimensione della varietà che lo contiene affinchè esista la varietà unisecante.

* * *

Ed ora alcune parole sull'argomento delle pagine seguenti.

Argomento di ricerca sono le varietà $V_{\rho+r}$ a $\rho + r$ dimensioni, contenenti un sistema algebrico, d'indice ≥ 1, ∞^ρ di varietà W_r^n ad r dimensioni con $r \geq 1$, e d'ordine n.

Il quesito centrale che ci si propone è d'indicare se e quando una tale varietà possa rappresentarsi razionalmente su una varietà $V'_{\rho+r}$ $(n-1)$ — pla contenente ∞^ρ spazi lineari, per modo che le W_r^n si rappresentino ciascuna su un S_r $(n-1)$ — plo, e quindi, in particolare, di assegnare delle condizioni (nel caso che la W_r^n sia razionale) perchè la $V_{\rho+r}$ risulti linearmente razionale o linearmente unirazionale, cioè sia trasformabile birazionalmente in un $S'_{\rho+r}$, in modo che le W_r^n si rappresentino sugli S_r per uno S_{r-1}, o su una involuzione di $S'_{\rho+r}$ con la stessa modalità.

Volendo assegnare una condizione non solo sufficiente, ma

[6] U. MORIN: *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali.* [Rend. Sem. Mat. della Università di Padova], anno IV, nn. 3-4 (1938).

anche necessaria, è ovvio che occorre obbligare la natura della W_r^n ad una « condizione di generalità ».

Tale condizione viene appunto introdotta, e, ci sembra, nel modo più naturale ed efficiente, associandola alla dimensione della condizione di esistenza di una varietà unisecante le W_r^n del dato sistema algebrico.

Nell'ambito di tale condizione di generalità, tramite alcuni teoremi, si dimostra una semplice condizione necessaria e sufficiente perchè si possano operare le riduzioni indicate, ed è che fra i caratteri n, r, ρ sussista la relazione:

$$A = r + 2 - n^\rho > 0 .$$

Resta così risolto il problema segnalato dal Conforto, ed in un caso ben più generale, anzi nel caso più generale possibile. Tale risultato risolve completamente le ricerche per una $V_{\rho+r}$ di tipo « generale » nel nostro senso.

Rimane invece aperto, nelle linee indicate nelle ultime pagine del lavoro, il problema di assegnare per le $V_{\rho+r}$ generali con $A \leq 0$ eventuali condizioni necessarie e sufficienti perchè si possano ancora effettuare tali riduzioni. Da queste, unite ai nostri risultati, provverrebbe un insieme di conoscenze alquanto notevole sulla geometria di una varietà algebrica. Su tali argomenti contiamo di tornare in ulteriori ricerche.

* * *

A tutta l'indagine soccorrono i mezzi penetranti ed espressivi dell'algebra moderna, che in questioni di questo tipo si presentano inoltre come i più agili e naturali.

Accenniamo brevemente all'ordine degli argomenti trattati

I numeri 1 - 3 sono dedicati ad alcuni richiami sulle estensioni dei corpi e ad alcune definizioni, specie a quella di varietà algebrica su un corpo di funzioni algebriche.

I numeri 4, 6 - 11 alla condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una varietà V_ρ unisecante le W_r^n del sistema algebrico ∞^ρ, e si concludono nel Teor. 1.

Il numero 5 è dedicato alla definizione di « varietà generale » su un corpo di funzioni algebriche, e ad alcuni aspetti della definizione, che nel n. 12 viene prospettata su un esempio concreto.

I numeri 13 15 danno le più importanti conseguenze geometriche del Teor. 1, che si esprimono nei Teor. 2, 3, 4, 5.

Il n. 16 infine raccoglie alcune prospettive e questioni, che sembrano d'interesse per future ricerche.

* * *

1. - Strumento costante della nostra ricerca saranno le proprietà dei corpi numerici e di funzioni, e le loro estensioni finite algebriche e trascendenti. Appare quindi utile ricordare qualche diretta premessa, precisando insieme i simboli ed il linguaggio.

K sia un dato corpo commutativo, di caratteristica zero e di grado di trascendenza [7] infinito sul suo corpo primitivo, isomorfo in tal caso al corpo dei numeri razionali.

K potrà quindi, in particolare, essere il corpo dei numeri complessi.

Gli elementi di K si dicono *costanti*. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ delle indeterminate o quantità affatto generali di una estensione di K, per le quali non sussista alcuna relazione algebrica a coefficienti costanti.

Il corpo delle funzioni razionali di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'indica con $K(x)$.

Per *funzione algebrica* di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'intende allora ogni elemento ω di una estensione di $K(x)$, il quale soddisfi una equazione algebrica $f(\omega) = 0$, non identicamente soddisfatta, con i coefficienti in $K(x)$.

Siano $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ funzioni algebriche: la totalità delle funzioni razionali di $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ e di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formano allora un corpo $K(x_1, \ldots x_n, \omega_1, \ldots \omega_m)$ che si dice un *corpo di funzioni algebriche*, ed i cui elementi sono appunto tutti funzioni algebriche di $x_1, \ldots x_n$ [8].

(7) WAERDEN, B. L. VAN DER: *Moderne Algebra I*, VIII Kap., 2. Aufl., 1937. Questa opera verrà nel seguito citata soltanto con VAN DER WAERDEN.

(8) VAN DER WAERDEN, II, XIII° Kap.

È bene tenere presente che ogni polinomio $f(z)$ con i coefficienti in $K(x)$ possiede *un corpo di riduzione totale*, un corpo cioè in cui esso si scompone in fattori tutti lineari ([9]).

Siano ora $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ elementi di un corpo di funzioni algebriche ([10]) *algebricamente indipendenti* su K: essi possono trattarsi allora come vere e proprie indeterminate.

Se essi non sono invece algebricamente indipendenti su K e non sono tutti algebrici su K, si può sempre trovare alcuni di essi che sono algebricamente indipendenti e tali che le rimanenti ω sono funzioni algebriche di essi. Il numero d di tali elementi algebricamente indipendenti si dice *il grado di trascendenza* (o anche la *dimensione*) del sistema $\{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m\}$ rispetto a K.

Solo se tutte le ω sono algebriche rispetto K, il grado di trascendenza è nullo.

2. - Dopo queste premesse si consideri un corpo K di costanti, quale quello considerato sopra, ed $r+1$ indeterminate $x_1, x_2, \ldots x_{r+1}$ legate da una equazione coi coefficienti in K:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}) = 0,$$

con f polinomio *assolutamente irriducibile* in K ([11]).

La totalità delle funzioni razionali $\varphi(x_1, \ldots, x_{r+1})$ costituisce allora, secondo le nostre premesse, un corpo di funzioni algebriche di grado di trascendenza finito r nel corpo fondamentale K. Un simile corpo, che indicheremo con H, può sempre pensarsi ottenuto mediante prima una estensione trascendente *pura* di dimensione r in $x_1, \ldots x_r$ e poi una successiva esten-

(9) Ricordiamo che se K, come nel nostro caso, contiene il corpo dei numeri razionali, tutte le sue estensioni algebriche, ed anche quelle di $K(x)$, sono separabili.

(10) Più generalmente: di una qualsiasi estensione di K.

(11) Ciò notoriamente significa che f è irriducibile in ogni estensione del corpo fondamentale.

sione algebrica semplice di un certo grado [12] eguale all'ordine del polinomio f [13] in x_{r+1}.

Volendo indicare la struttura del corpo H, conviene scrivere:

$$H \equiv K(x_1, \ldots, x_{r+1}) \; mod \; f(x_1, \ldots, x_{r+1}).$$

Diremo allora *varietà algebrica di dimensione* r, la totalità dei punti di un fissato spazio lineare ad $s > r$ dimensioni, le cui coordinate y_i sono date dalle equazioni:

$$\rho y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, s),$$

dove ρ e le φ_i sono elementi di H, e le φ_i sono scelte in modo da formare in H una base omogenea, cioè tali che se ad esempio $\varphi_0 \neq 0$, si abbia che:

$$K\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \frac{\varphi_2}{\varphi_0}, \ldots, \frac{\varphi_s}{\varphi_0}\right) \equiv H.$$

Tale varietà V_r risulta irriducibile e razionalmente equivalente alla ipersuperficie algebrica di un certo spazio S_{r+1}:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}) = 0 \text{ [14]}.$$

Da tale definizione, che abbiamo esposta per comodità di riferimenti successivi, si può ora passare a quella di *varietà algebrica su un corpo di funzioni.*

(12) Ciò del resto, per un famoso teorema di STEINITZ, è quanto si può dire di ogni estensione di un corpo arbitrariamente data. Cfr. VAN DER WAERDEN, I, X Kap.

(13) Grado di una estensione algebrica semplice $K(x)$ su K è il grado della equazione di grado minimo irriducibile che l'elemento x verifica in K.

(14) Questa definizione, a parte il più generale campo d'immersione, coincide evidentemente con l'usuale definizione di varietà algebrica, come trasformata razionale di una ipersuperficie, della geometria algebrica. Per l'equivalenza di questa definizione, e sotto quali condizioni, con quella di varietà come ideale primo cfr. VAN DER WAERDEN: II, V Kap.

Si parta perciò ancora dal corpo fondamentale K. Si premetta una estensione di K tramite aggiunzione di $\rho + 1$ indeterminate $u_1, u_2, \ldots, u_{\rho+1}$ vincolate dalla equazione algebrica con i coefficienti in K ed assolutamente irriducibile in K:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{\rho+1}) = 0 ;$$

si ottiene così un corpo K' di funzioni algebriche di dimensione ρ su K:

$$K' \equiv K(u) .$$

Se $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ sono ulteriori indeterminate che soddisfano l'equazione algebrica coi coefficienti in $K' \equiv K(u)$ ed assolutamente irriducibile in $K(u)$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}) = 0 ,$$

le funzioni $\varphi_i(x_1, \ldots . x_{r+1})$ coi coefficienti in $K' \equiv K(u)$ formano un corpo di funzioni algebriche su K', che indicheremo con $H' \equiv K'(x)$.

In tali ipotesi diremo *varietà algebrica ad r dimensioni sul corpo di funzioni algebriche $K(u)$*, la totalità dei punti di un fissato spazio lineare ad $s > r$ dimensioni, le cui coordinate y_i sono date dalle equazioni:

$$\rho y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{r+1}) , \qquad (i = 0, 1, \ldots, s)$$

essendo ρ e φ_i elementi di $K'(x)$, e le φ_i sono sempre tali da formare in $K'(u)$ una base omogenea.

Più generalmente si può supporre che K' sia una estensione finita di K, soddisfacendo le indeterminate u_j a certe relazioni polinomiali:

$$\psi_i(u_1, u_2, \ldots .) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots .)$$

coi coefficienti in K e tali da generare un ideale primo (15).

(15) Ciò è necessario perchè $K' \equiv K(u)$ sia un corpo. Cfr. VAN DER WAERDEN, II, III Kap.

3. – Si supponga ora di specializzare le u_j in certe u'_j, in modo che:

$$\psi_i(u'_1, u'_2, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Sia allora f' il polinomio specializzato di f per $u_j \to u'_j$. La varietà V'_r data dalle:

$$\rho' y_i = \varphi'_i(x_1, \ldots, x_{r+1}),$$

sul corpo specializzato di $K'(x)$ per $u_j \to u'_j$, cioè sul corpo:

$$K'(x) \equiv K(u')(x) \ mod \ f'(x_1, \ldots, x_{r+1}),$$

si dice allora *una specializzazione* della V_r.

L' insieme di tali specializzazioni si dirà un sistema algebrico di varietà algebriche V_r e la V_r si dirà la varietà *generica* del sistema.

Diremo *dimensione* ρ del sistema algebrico, che indicheremo con Σ_ρ, il grado di trascendenza di $K' \equiv K(u)$ su K.

Siamo ora in grado, dopo queste definizioni di limpido significato geometrico, di studiare i sistemi algebrici di varietà che c' interessano, nella maniera più semplice e di più ampia portata.

4 – Supporremo d' ora in poi che K sia un corpo *algebricamente chiuso.*

Sussiste allora per un sistema algebrico Σ_ρ di dimensione ρ formato dalle specializzazioni di una V_r data su un corpo $K'(x_1, \ldots, x_{r+1})$ *mod* $f(x_1 \ldots x_{r+1})$, con $K' \equiv K(u_1, \ldots, u_{\rho+1})$ *mod* $\varphi(u_1, \ldots, u_{\rho+1})$, ed $f(x_1, \ldots, x_{r+1})$ polinomio che supponiamo di ordine n rispetto ogni x_i, il teorema seguente, nel cui enunciato compare l' espressione «*varietà generale*» che verrà precisata nel corso della dimostrazione.

Teorema I. – «*Condizione necessaria e sufficiente perchè una varietà generale V_r di dimensione r data su $K'(x)$ mod $f(x_1, \ldots, x_{r+1})$, con f polinomio di grado n in tutte le x_i sia* *razionale su un corpo* $K'(t)$ *mod* $g(t_1, t_2, \ldots, t_{r+1})$ *con* $g(t)$ *di grado* $n-1$ *in* t_{r+1}, *è che fra la dimensione* r *della* V_r, *l'ordine* n *e la dimensione* ρ *del sistema algebrico* Σ_ρ *associato valga la relazione:*

$$r > n^\rho - 2 \text{»}.$$

Ciò si può enunciare in puri termini algebrici affermando che:

« *Se* $K' \equiv K(u)$ *ha dimensione* ρ *nelle* u_j *e se* $H \equiv K'(x)$ *mod* $f(x)$ *ha dimensione* r *nelle* x_j *ed* $f(x)$ *è generale e d'ordine* n *in tutte le* x_j (16), *si possono trovare certi elementi* $t_1, t_2, \ldots, t_{r+1}$ *di* K', *tali che:*

$$H \equiv K'(t_1, t_2, \ldots, t_{r+1}) \ \textit{mod} \ g(t_1, \ldots, t_{r+1}),$$

con $g(t_1, t_2, \ldots, t_{r+1})$ *di ordine* $n-1$ *in* t_{r+1}, *se e solo se:*

$$r > n^\rho - 2 \text{»}.$$

Dimostriamo dapprima la sufficienza della condizione.

Conviene perciò passare ad una rappresentazione omogenea nelle due serie di variabili $(x_1, \ldots, x_{r+1})$ e $(u_1, \ldots, u_{\rho+1})$. Siano ξ_i e rispettivamente v_j le nuove variabili omogenee con $i = 0, 1, \ldots, r+1$ e $j = 0, 1, \ldots, \rho+1$.

La $f(x_1, \ldots, x_{r+1})$ diviene di conseguenza una certa:

$$f'(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{r+1}) \equiv \sum \alpha_{i_0 i_1 \ldots i_{r+1}} \xi_0^{i_0} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_{r+1}^{i_{r+1}} \cdot$$

dove:

$$i_0 + i_1 + \ldots + i_{r+1} = n;$$

(16) Se $f(x)$ avesse ordine $< n$ in una variabile, ad es. x_{r+1}, il teorema è, come si può vedere dalla dimostrazione seguente, quasi immediato. Il corpo $K'(x)$ si potrebbe infatti in tal caso pensare formato da una prima estensione trascendente $K'(x_1, \ldots, x_r)$ pura e di dimensione r, e poi dall'aggiunzione dell'elemento x_{r+1} algebrico di grado $< n$ rispetto $K'(x_1, \ldots, x_r)$.

le $\alpha_{i_0\, i_1 \ldots i_{r+1}}$ sono forme di un certo grado ν nelle $v_0, \ldots, v_{\rho+1}$ con i coefficenti in K.

Le $v_0, v_1, v_{\rho+1}$ risultano a loro volta vincolate da una certa equazione:

$$\varphi'(v_0, v_1 \ldots, v_{\rho+1}) = 0,$$

dove ora anche φ' è una forma che supponiamo di grado μ nelle v_j.

Possiamo ora definire le $r+1$ quantità η_i con le posizioni:

$$\eta_0 = \sum \beta^0_{j_0 j_1 \cdots j_{\rho+1}} v_0^{j_0} v_1^{j_1} \ldots . v_{\rho+1}^{j_{\rho+1}}$$

$$\eta_1 = \sum \beta^1_{j_0 j_1 \cdots j_{\rho+1}} v_0^{j_0} v_1^{j_1} \ldots . v_{\rho+1}^{j_{\rho+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdot$$

$$\eta_{r+1} = \sum \beta^{r+1}_{j_0 j_1 \cdots j_{\rho+1}} v_0^{j_0} v_1^{j_1} \ldots . v_{\rho+1}^{j_{\rho+1}},$$

dove le sommatorie sono estese a tutte le $j_0, j_1, \ldots, j_{\rho+1}$ tali che se t è un certo numero naturale maggiore di μ, si abbia:

$$j_0 + j_1 + \ldots . + j_{\rho+1} = t,$$

e le $\beta^l_{j_0 j_1 \cdots j_{\rho+1}}$ sono quantità di K per ora del tutto indeterminate in esso.

In una qualsiasi η_i compaiono:

$$\binom{t+\rho+1}{\rho+1}$$

inderminate β.

Ma le v_j sono legate dalla:

$$\varphi'(v_0, v_1, \ldots, v_{\rho+1}) = 0,$$

e pertanto, se si vuole riferirsi ad una base per le η_i linearmente minima, ci si può ridurre ad esprimere ciascuna η_i come combinazione lineare di un numero N, dato da:

$$N = \binom{t+\rho+1}{\rho+1} - \binom{t-\mu+\rho+1}{\rho+1},$$

di forme ψ_i nelle v_j linearmente indipendenti e di grado t [17].

Le η_i possono di conseguenza esprimersi nella forma:

$$\eta_0 = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i^0 \, \psi_i(v_0, \ldots, v_{\rho+1})$$

$$\eta_1 = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i^1 \, \psi_i(v_0, \ldots, v_{\rho+1})$$

. . . .

$$\eta_{r+1} = \sum_{i=0}^{N} \gamma_i^{r+1} \, \psi_i(v_0, \ldots, v_{\rho+1}),$$

naturalmente essendo $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N\}$ la base determinata e le γ_i delle indeterminate in K.

Si sostituiscano ora le η_i nella $f'(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{r+1})$ al posto delle ξ_i, e si cerchi di determinare le v_j in maniera che la $f'(\eta_0, \ldots, \eta_{r+1})$ risulti identicamente nulla per le v_j che soddisfano la:

$$\varphi'(v_0, v_1, \ldots, v_{\rho+1}) = 0 .$$

Si noti perciò che la $f(\eta_0, \ldots, \eta_{r+1})$ risulta omogenea nelle v_j e di grado $nt+\nu$ rispetto esse, con i coefficienti in $K(\gamma)$.

Perchè quindi la $f(\eta_0, \ldots, \eta_{r+1})$ si annulli identicamente sulla $\varphi'(v_0, \ldots, v_{\rho+1}) = 0$, occorre e basta che essa si spezzi nel prodotto della $\varphi'(v_0, \ldots, v_{\rho+1})$ per una certa forma $F(v_0, v_1, \ldots, v_{\rho+1})$ di grado $nt+\nu-\mu$ nelle v_j, che sia cioè:

$$f(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{r+1}) \equiv \varphi(v_0, \ldots, v_{\rho+1}) \cdot F(v_0, \ldots, v_{\rho+1}),$$

(17) $N-1$ è, in altre parole, la dimensione del sistema lineare che la totalità delle V^t sega sulla varietà: $\varphi'(v_0, \ldots, v_{\rho+1}) = 0$ in un certo spazio.

dove le η_i si pensino espresse dalle loro posizioni in funzione delle v_j e la forma $F(v_j)$ è data da:

$$F(v_0, \ldots, v_{\rho+1}) \equiv \sum \delta_{j_0 j_1 \ldots j_{\rho+1}} v_0^{j_0} v_1^{j_1} \ldots v_{\rho+1}^{j_{\rho+1}},$$

con la sommatoria estesa a tutte le $j_0, j_1, \ldots, j_{\rho+1}$ tali che:

$$j_0 + j_1 + \ldots + j_{\rho+1} = nt + \nu - \mu .$$

Uguagliando i coefficienti nella identità considerata si hanno allora:

$$p = \binom{nt + \nu + \rho + 1}{\rho + 1}$$

equazioni nelle incognite γ_i^k ($i = 1 \ldots N$; $k = 0 \ldots r + 1$) e nelle $\delta_{j_0 j_1 \ldots j_{\rho+1}}$. Ordinando le γ e le δ secondo un unico indice possiamo chiamarle $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\bar{N}}$, $\delta_1, \ldots, \delta_M$ dove, come sappiamo:

$$\bar{N} = (r + 2) N, \qquad M = \binom{nt + \nu - \mu + \rho + 1}{\rho + 1}.$$

Le equazioni ottenute sono omogenee di grado n nelle γ_i ed omogenee di grado uno nelle δ_i coi coefficienti in K.

Esse hanno perciò la struttura:

$$\varphi_t(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\bar{N}}) = \psi_t(\delta_1, \ldots, \delta_M) \qquad (t = 1, \ldots, p)$$

in cui le φ_t sono forme di grado n e le ψ_t forme lineari.

5. - È ora il momento di esporre il significato che vogliamo attribuire alla espressione: «varietà algebrica V_r *generale* su un corpo di funzioni algebriche $K(u)$».

Osserviamo perciò che i polinomi $\varphi_t - \psi_t$ ai quali siamo giunti sopra appartengono al dominio di polinomi $K[\gamma_1, \ldots, \gamma_{\bar{N}}, \delta_1, \ldots, \delta_M]$ e definiscono in esso un ideale $\bar{I}$, le cui radici individuano i punti di una varietà W, che è appunto la varietà di $\bar{I}$ (18).

Passando dallo spazio affine $S_{M+\bar{N}}[\gamma_1, \ldots, \gamma_{\bar{N}}, \delta_1, \ldots, \delta_M]$ ad uno spazio proiettivo $S^*_{M+\bar{N}}[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{M+\bar{N}}]$ ponendo:

$$\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \, (i = 1, \ldots, \bar{N}) \qquad \delta_j = \frac{\lambda_{\bar{N}+j}}{\lambda_0} \, (j = 1, \ldots, M),$$

i polinomi sopra scritti divengono:

$$F_t(\lambda) \equiv \varphi_t(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\bar{N}}) - \lambda_0^{n-1} \psi_t(\lambda_{\bar{N}+1}, \ldots, \lambda_{\bar{N}+M}) = 0 \qquad (t = 1, \ldots, p),$$

e gli $F_t(\lambda)$ definiscono ora l'ideale $\bar{I}^*$ omogeneo:

$$\bar{I}^* \equiv (F_1, F_2, \ldots, F_p),$$

che è formato da tutti quei polinomi di $K[\lambda_0, \ldots, \lambda_{\bar{N}}, \ldots, \lambda_{\bar{N}+M}]$ che per $\lambda_0 = 1$ danno un polinomio di $\bar{I}$ (19).

Ad $\bar{I}^*$ resta ancora associata una W^* dello spazio proiettivo, che contiene la W (20).

La varietà W^* intanto non è vuota perchè essa contiene almeno il punto O associato alla radice di $\bar{I}^*$ data da $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i = 0$ per $i \neq 0$.

La W^* può essere irriducibile o no: e, se lo è, può sempre pensarsi come somma di un numero finito di varietà irriducibili (21). A ciascuna di queste W_j^* resta associato un determinato ideale primo $\bar{P}_j^*$ (22), ed a questo una dimensione d_j che è

(18) Per quanto segue si può utilmente confrontare con W. Gröbner: *Moderne Algebraische Geometrie*, Springer, Wien, 1949, Kap. 2, 3.

(19) van der Waerden. II, XIII Kap.

(20) Si tratta precisamente della più piccola varietà dello spazio proiettivo che contenga la W.

(21) Cfr. ad es. Waerden, B. L. van der: *Einführung in die Algebraische Geometrie*, 1939. Kap. IV.

(22) Si ricordi che ciò è in relazione con la scomposizione non accorciabile di un ideale riducibile in componenti primarie, cui siano associati distinti ideali primi. Cfr. per ciò: van der Waerden, II, § 87.

poi la dimensione della W_j^*, ed è, algebricamente intesa, il grado di trascendenza di una radice generale di $\overline{P}_j^*$ (23).

Se nelle F_t sostituiamo alle φ_t e ψ_t delle forme generali φ'_t ψ'_t degli stessi gradi con coefficienti scelto genericamente in K, l'ideale generato dalle F'_t, e sia I^*, è certamente un ideale primo (24), quindi la varietà associata W'^* risulta irriducibile e di una certa dimensione $d \geq 0$, perchè l'ideale I^* ha ancora la radice associata al punto O.

Le $F_t(\lambda)$ possono ora pensarsi come una specializzazione in $K[\lambda_0, \ldots, \lambda_{\overline{N}+M}]$ di quelle forme $F'_t(\lambda)$, ed il relativo ideale I^* si specializzerà precisamente in $\overline{I}^*$.

Dopociò possiamo enunciare la seguente definizione:

« *Una V_r algebrica definita su un corpo di funzioni algebriche $K(u)$ si dirà generale (e tale si dirà allora anche l'insieme delle sue specializzazioni in $K(u)$ e quindi il sistema algebrico Σ_ρ ad essa associato), se e solo se l'ideale specializzato $\overline{I}^*$ sopra definito risulta per essa irriducibile e di dimensione d eguale a quella dell'ideale, generico in $K[\lambda_0, \ldots, \lambda_{\overline{N}+M}]$, I^* pure definito sopra, ovvero riducibile ma in modo che gli ideali primi associati alle singole varietà componenti abbiano tutti dimensione eguale fra loro ed uguale ancora a d, cioè la W^* sia una varietà magari riducibile, ma pura, di dimensione d* ».

La definizione di varietà generale così posta si riferisce evidentemente ad un ideale $\overline{I}^*$ calcolato in corrispondenza *ad un generico valore di t*, che indicheremo ora per evidenza, con $\overline{I}^*(t)$. È stata così aggirata la difficoltà che si presentava a priori, di giustificare l'indipendenza della definizione da un eventuale, particolare valore di t.

Questa questione si presenta tuttavia nuovamente, oltre che per se stessa, per il suo interesse pratico. È ovvio che sarà

(23) Si dice generale una radice ξ per $\overline{P}_j^*$ se per ogni $f(x)$ tale che $f(\xi) = 0$, si abbia $f \equiv 0\,(\overline{P}_j^*)$.

(24) Ciò può del resto facilmente verificarsi su una particolare specializzazione di I^* in K, ad esempio riducendo tutte le forme meno una a forme lineari.

molto più comodo verificare la generalità di una certa V_r per un particolare valore di t, che non per un generico t.

In ordine a questo dimostreremo ora che *se una* V_r *è generale rispetto l'ideale* $\overline{I}^*(t')$ *dove* t' *è un particolare valore (intero positivo) essa è generale pure rispetto l'ideale* $\overline{I}^*(t)$ *con* t *intero positivo qualsiasi maggiore di* t'*: cioè, semplicemente, è generale.*

Sia, infatti, $t > t'$. Diciamo $U(t)$ la varietà a ρ dimensioni, corrispondente al valore t, rappresentata parametricamente da:

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^i \psi_k (v_0 \dots v_{\rho+1}) \qquad (i = 0, 1, \dots r+1)$$

sul corpo di funzioni algebriche: $K(v)$ mod $\varphi(v)$, e in cui le ψ_k si suppongono di ordine $t > t'$.

Se si suppone di specializzare la $U(t)$ entro il sistema della totalità delle ipersuperficie di quell'ordine di $S_{\rho+1}$, per modo che si spezzi in un iperpiano Γ contato $t - t'$ volte, la parte residua descriverà il sistema lineare di tutte le $U(t')$. Di conseguenza anche il sistema lineare che le $U(t')$ segano sulla $\varphi(v) = 0$, può pensarsi come la specializzazione indotta nel sistema analogo segato dalle $U(t)$.

Tale specializzazione si effettua imponendo certe relazioni lineari nelle γ_k^i, che si potrebbero anche scrivere immediatamente premettendo un opportuno cambiamento di coordinate che portasse I nell'iperpiano improprio: $v_0 = 0$. Dopodichè basta annullare nelle ψ_k i coefficienti dei termini che hanno in v_0 grado $< t - t'$, e le ψ_k si specializzeranno in certe $\psi_k \to v_0^{t-t'} \cdot \psi'_k$ dove le ψ'_k sono di ordine t'. Delle N ψ'_k così ottenute ve ne saranno solo $N' < N$ linearmente indipendenti su $\varphi(v_0 \dots v_{\rho+1}) = 0$, dove N' è il numero base relativo al sistema segato dalle $U(t')$ sulla $\varphi(v_0 \dots v_{\rho+1}) = 0$. Si potranno quindi annullare $N - N'$ delle γ_k^i per ogni $i = 0, \dots, r+1$, cioè in tutto $(r+1)(N - N')$ incognite, ossia $\overline{N} - \overline{N}'$. Tramite la trasformazione lineare che ha fornito il cambiamento di coordinate, si ottengono così $\overline{N} - \overline{N}'$ equazioni lineari sulle γ_i^k.

Si specializzino inoltre, annullandoli, i coefficienti di $F(v_0, \ldots, v_{\rho+1})$ dei termini con v_0 di esponente $< t - t'$. Con ciò si annullano $M - M'$ δ_i, e contemporaneamente il numero p delle equazioni $\varphi_t - \psi_t = 0$, si abbassa di $(p - p')$ cioè diviene p', indicando sempre con apice tutti i caratteri relativi al valore t' dell'ordine. In definitiva, dopo tale specializzazione, il sistema di p equazioni in $q = M + \overline{N}$ incognite, è divenuto un sistema di $\overline{p} = p' + \overline{N} - \overline{N}'$ equazioni in $\overline{q} = M' + \overline{N}$ incognite di cui $\overline{N} - \overline{N}'$ lineari con coefficienti generici in K attesa la genericità di I.

È per di più evidente che la specializzazione eseguita porta l'ideale $\overline{I}^*(t)$ in $\overline{I}^*(t')$. Ma $\overline{I}^*(t')$ può pensarsi come somma di $\overline{I}^*(t)$ e dell'ideale A^* relativo agli $\overline{N} - \overline{N}'$ polinomi lineari, e, per la genericità di A^* e per la generalità supposta di $\overline{I}^*(t')$, si può concludere ([25]) che anche $\overline{I}^*(t)$ soddisfa alla condizione di generalità, e quindi ha proprio dimensione data da $\overline{q} - \overline{p} = q' - p'$.

Omettiamo qui un'analisi più approfondita che porterebbe a distinguere fra le due possibilità poste nella definizione di varietà irriducibile o riducibile e pura, nè vogliamo preoccuparci di quali condizioni iniziali conducano all'uno o all'altro dei due casi, nè se, eventualmente, si possa, magari con opportune limitazioni, escludere anche la riducibilità pura: tali questioni, magari interessanti in se e forse per le conoscenze che ne verrebbero circa il sistema algebrico delle varietà unisecanti ([26]), non gioverebbero infatti ai nostri scopi immediati.

È appena il caso di osservare che questa definizione di *«generalità»* è più estesa oltrechè particolarmente adatta ai nostri scopi, di quella che si avrebbe ottenuto in modo più immediato, esigendo addirittura l'assoluta generalità degli enti definenti la V_r entro i rispettivi sistemi di variabilità.

([25]) W. Grobner, Alg. Geom., n. 133, 16.

([26]) La W^* costituisce infatti, come si vedrà chiaramente fra poco, un modello della totalità delle varietà unisecanti la generica specializzazione della V_r.

È infatti ovvio che una V_r generale in tal senso, lo è pure in quello della nostra definizione, laddove V_r particolari rispetto quella generale concezione astratta, sono secondo la nostra, ancora da ritenersi generali.

Malgrado la facile intuibilità di tale osservazione ci riserviamo di comprovarla con un esempio concreto alla fine della dimostrazione in corso, per non deviare oltre dalla linea generale delle deduzioni.

6. - Ammetteremo d'ora in poi che la V_r algebrica in discorso sia *generale*. Torniamo con ciò al sistema delle p equazioni :

$$F_i(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\overline{N}+M}) = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, p)$$

nelle $q+1$ incognite $\lambda_0, \ldots, \lambda_{\overline{N}+M}$.

Condizione sufficiente perchè tale sistema, nella nostra ipotesi di generalità, abbia soluzioni non tutte nulle è, per noti risultati della teoria della eliminazione ([27]), che il numero delle incognite sia maggiore di quello delle equazioni.

Senonchè noi desideriamo che tornando dalle λ_i alle γ_i e δ_i queste vengano ad avere valori *finiti*, cioè dobbiamo cercare soluzioni del sistema per cui $\lambda_0 \neq 0$, cioè fuori dall'iperpiano improprio dello spazio delle λ_i.

In tale più minuta esigenza ci aiuta l'osservazione già fatta che il punto $O(1, 0, \ldots 0)$ appartiene alla $\overline{W}^*$ che è la varietà associata alle radici del nostro sistema, punto per cui è appunto $\lambda_0 \neq 0$. Se quindi il punto O si può rinchiudere in un intorno di $\overline{W}^*$, si potrà certo trovare in questo intorno un punto P distinto da O e per cui sia λ_0 ancora non nullo, cui corrisponderà una radice del sistema in esame, e quindi, se si preferisce, una radice dell'ideale $\overline{I}^*$.

([27]) VAN DER WAERDEN, II, I Kap.; o anche (nel corpo complesso): F. SEVERI: *Lezioni di Analisi* (Bologna, Zanichelli, 1933), I, cap. 9.

Ma perchè ciò avvenga occorre che vi sia una $\overline{W}^*$ di radici avente dimensione maggiore di zero, cioè almeno 1, ossia nel nostro caso che sia:

$$q > p.$$

Se ciò avviene vi è dunque almeno una curva luogo di punti cui sono associate radici di $\overline{I}^*$, che può eventualmente spezzarsi in più parti irriducibili. Ed una di queste, sia una certa W_j^*, deve allora contenere O, poichè $\overline{W}^*$ deve essere, se riducibile, pura (grazie sempre alla generalità di V_r), e quindi non può contenere punti isolati.

Per $q = p$ la $\overline{W}^*$ si riduce ad un gruppo di punti ([28]), e niente si può dire della loro posizione rispetto l'iperpiano improprio.

Trovato così quel certo P, che è poi ora un P qualsiasi di $\overline{W}_j^*$ distinto da O e fuori dalla varietà impropria di $\overline{W}^*$, si può per di più dire che le λ_i sue coordinate per $i = 1, \ldots, \overline{N}$ non sono certamente tutte nulle.

Infatti se così fosse il prodotto:

$$\varphi(v_0 \ldots . v_{\rho+1}) \cdot F(v_0, \ldots, v_{\rho+1})$$

sarebbe identicamente nullo in quanto la:

$$f\left(\sum_{k=1}^{\overline{N}} \gamma_k^i \, \psi_k(v_0, \ldots, v_{\rho+1})\right)$$

cui esso è identico, essendo nulle le $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\overline{N}}$ cioè tutte le γ_k^i, svanirebbe identicamente.

Poichè i polinomi costituiscono un campo d'integrità, sarebbe allora identicamente nullo uno dei due polinomi φ od F, ossia, giacchè $\varphi \neq 0$, F e quindi sarebbero nulli tutti i suoi coefficenti,

([28]) Non è escluso che il gruppo di punti possa addirittura ridursi al solo punto O.

cioè le δ_i, e quindi in definitiva sarebbero nulle tutte le λ_i eccetto λ_0, cioè P coinciderebbe con O, mentre è stato supposto distinto.

Concludendo questa analisi si può affermare che: condizione sufficente perchè la $\overline{W}^*$ associata all'ideale $\overline{I}^*$ abbia punti *propri distinti da* O, è che:

$$q > p,$$

ed in corrispondenza a questi ∞^d punti con $d = q - p > 0$, si ha un sistema continuo (o più sistemi continui ∞^d) di radici di $\overline{I}^*$, cui sono associate radici a valori finiti e non tutti nulli, dell'ideale non omogeneo $\overline{I}$.

La condizione trovata, sostituendo a q e p i valori precedentemente calcolati, diviene:

$$(r+2)\left\{\binom{t+\rho+1}{\rho+1} - \binom{t-\mu+\rho+1}{\rho+1}\right\} -$$
$$-\left\{\binom{nt+\nu+\rho+1}{\rho+1} - \binom{nt+\nu-\mu+\rho+1}{\rho+1}\right\} > 0,$$

che a noi basta valga per certi (anzi per un certo) valore di t.

L'espressione che sta a primo membro può pensarsi come un polinomio nella variabile t, sia $G(t)$. Per valori convenientemente grandi di t, il polinomio $G(t)$ assume il segno del primo coefficente A, e poichè $G(t)$, che apparentemente è di grado $\rho+1$, è in realtà di grado ρ, annullandosi il coefficente del grado $\rho+1$, si ha come è immediato:

$$A = r + 2 - n^\rho .$$

Quindi se A è positivo esistono valori di t (ve ne sono evidentemente infiniti: certamente tutti quelli che sono maggiori del più grande $\bar{t}$ per cui $G(\bar{t}) = 0$) in corrispondenza ai quali $\overline{I}$ ha radici finite e non tutte nulle, *esistono cioè infinite varietà unisecanti la generica specializzazione di V_r entro il Σ_ρ, di ordine t arbitrariamente grande.*

7. - Sia $\lambda'_0, \ldots, \lambda'_{\bar{N}+M}$ una soluzione del sistema considerato, e siano $\eta'_0, \ldots, \eta'_{r+1}$ i corrispondenti valori delle $\eta_0, \ldots,$ η_{r+1} ([29]). Si torni a coordinate non omogenee $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$, e si dica ancora $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{r+1}$ la soluzione considerata. Si ponga allora nella $f(x_1, \ldots, x_{r+1})$:

$$x_i = y_i - x'_i, \qquad (i = 1, \ldots, r+1)$$

essendo y_i nuove coordinate.

La $f(x_1, \ldots, x_{r+1})$ diviene con ciò un polinomio nelle y_i, privo del termine di grado zero: indichiamolo con $h(y_1, \ldots, y_{r+1})$ che avrà i coefficienti $\alpha'_{i_0\, i_1 \ldots i_{r+1}}$ in $K' \equiv K(v)$.

Si ponga:

$$t_i = \frac{y_i}{y_{r+1}} \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

e si noti che le t_i appartengono a $K'(x_1, \ldots, x_{r+1})$, e pertanto:

$$K'(t_1, \ldots, t_r) \subset K'(x_1, \ldots, x_{r+1}).$$

Inoltre il polinomio $h(y_1, \ldots, y_{r+1})$ diviene un polinonio del tipo:

$$y_{r+1} \cdot g(t_1, \ldots, t_r, y_{r+1}),$$

dove $g(t_i, y_{r+1})$ è di grado $n-1$ nella y_{r+1}, e se per omogeneità di scrittura, si pone ora $y_{r+1} = t_{r+1}$, si può dire che t_{r+1} è algebrico di grado $n-1$ sul corpo $K'(t_1, \ldots, t_r)$ che è una estensione trascendente pura di K' di dimensione r. Inoltre:

$$K'(t_1, \ldots, t_{r+1}) \subset K'(x_1, \ldots, x_{r+1}),$$

([29]) La soluzione appartiene certamente a $K' \equiv K(v)$ perchè il corpo K è stato supposto algebricamente chiuso, e quindi le $\gamma^{(i)}_k$ appartengono tutte a K, e quindi le $\Sigma \gamma^{(i)}_k \psi_k$ a $K(v)$.

e poichè y_{r+1} appartiene a $K'(t_1, t_2, \ldots, t_{r+1})$, vi appartengono le $y_i\,(i = 1, \ldots, r)$ e quindi le x_i (30) e si ha:

$$K'(t_1, \ldots, t_{r+1}) \subset K'(x_1, \ldots, x_{r+1}) \subset K'(t_1, \ldots, t_{r+1}),$$

cioè:

$$K'(x_1, \ldots, x_{r+1}) \ mod\ f(x_1, \ldots, x_{r+1}) \equiv$$

$$\equiv K'(t_1, \ldots, t_{r+1}) \ mod\ g(t_1, \ldots, t_{r+1})$$

dove $g(t_1, \ldots, t_{r+1})$ è un polinomio di grado $(n-1)$ in t_{r+1}.

È così completamente dimostrata la sufficienza della condizione:

$$A = r - n^{\rho} + 2 > 0.$$

8. - Passiamo ad occuparci della necessità della condizione esposta. Riprendiamo perciò le osservazioni dei primi capoversi del n. 6. Abbiamo lì visto che per la sufficenza occorreva pretendere l'esistenza di una varietà $\overline{W}^*$ di soluzioni del sistema delle $F(\lambda_i) = 0$, di dimensione > 0, data l'esigenza di ottenere soluzioni proprie cioè con $\lambda_0 \neq 0$. Se ciò è sufficiente, non è tuttavia necessario, apparendo chiaramente che in un gruppo di soluzioni isolate, cioè se la $\overline{W}^*$ si riduce ad un gruppo di punti, possono certo esservi soluzioni proprie. Quindi dobbiamo dire: condizione necessaria che vi siano soluzioni proprie, è certo che vi siano soluzioni, e per questo è necessario che sia:

$$q + 1 > p,$$

ossia:

$$q \geq p.$$

(30) Si ricordi l'osservazione in nota sopra: le x'_i appartengono a $K(v) \equiv K'$.

D' altra parte si ammetta per ipotesi la tesi cui siamo giunti alla fine del numero precedente, cioè si ammetta che il corpo $K'(x)$ contenga certi elementi $t_1, \dots, t_{r+1}$ tali che esso possa pensarsi come estensione algebrica semplice di grado $n-1$ (aggiunzione di t_{r+1}) della estensione trascendente pura di dimensione r: $K' t_1, \dots, t_r)$. Ciò è come dire che esisterà una trasformazione razionale delle x_i nelle t_j e sia simbolicamente:

$$x = R(t),$$

la quale trasforma il polinomio $f(x_1, \dots, x_{r+1})$ di grado n in x_{r+1} (ed in $x_1, \dots, x_2$), in un polinomio nelle t_j che si spezzerà nel prodotto di un polinomio di primo grado in t_{r+1} e sia un certo $P(t_1, \dots, t_{r+1})$ per $g(t_1, \dots, t_{r+1})$ di grado $n-1$ in t_{r+1}. Se allora si scelgono dei valori qualsiasi in $K(v)$ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ per $t_1, t_2, \dots, t_r$ e si determina t_{r+1} in modo che:

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, t_{r+1}) = 0,$$

si trova una $(r+1)$-pla di valori che appartiene a $K(v)$ perchè vi appartiene t_{r+1} come funzione razionale nelle v_j, e che inoltre sostituiti al posto delle t_j nella $x = R(t)$, forniscono una rappresentazione parametrica di una varietà unisecante la generica specializzazione della V_r.

La ipotesi ammessa conduce quindi all' esistenza di costanti γ_k^i di K per le quali le:

$$\eta_i = \sum_{K=1}^{N} \gamma_k^{(i)} \varphi_k \qquad (i = 0, \dots, r+1),$$

soddisfànno identicamente la $f(x_0, \dots, x_{r+1})$ rispetto le v_j che soddisfànnò la $\varphi(v_j) = 0$.

Ma allora si cade nella necessaria risolubilità del sistema, e per quanto osservato al principio di questo numero nella:

$$q \geqq p.$$

Questa è dunque intanto una condizione necessaria (non sufficiente!).

Pertanto occorre che il polinomio $G(t)$ acquisti per certi valori di t [31] interi positivi segno positivo o sia tutto al più nullo.

Nel numero seguente faremo vedere che ciò avviene solo se:

$$A = r + 2 - n^{\rho} > 0,$$

in quantochè dimostreremo che vale la disuguaglianza:

$$(*) \qquad G(t) < (r + 2 - n^{\rho}) \, . \, \Phi(t),$$

con $\Phi(t)$ sempre positivo.

Dopochè si può concludere che la condizione in discorso è, per una V_r *generale*, necessaria e sufficiente.

9. - Procediamo ora a dimostrare la disuguglianza (*). Si tratta di una dimostrazione di pura natura aritmetica, per la quale soccorrono alcune semplici relazioni che vogliamo procurarci.

Introduciamo l'espressione:

$$\varphi_m(\alpha, i) = \binom{\alpha}{i} - \binom{\alpha - m}{i},$$

dove α, m, i sono numeri interi e positivi, con: $\alpha - m > i$.

L'espressione $\varphi_m(\alpha, i)$ gode della proprietà:

$$(**) \qquad \binom{\alpha}{s} \varphi_m(\alpha, i - s) > \binom{i - 1}{s} \varphi_m(\alpha, i)$$

per ogni $s < i$.

Procederemo alla dimostrazione per induzione su m. Per $m = 1$ essa è vera, come si verifica con semplici calcoli.

(31) A stretto rigore basta per un valore di t (intero o positivo). Ma vedremo, come si prevede facilmente, che se ve n'è uno ve ne sono infiniti.

Ammettiamola allora vera per m e dimostriamo che di conseguenza si ha:

$$\binom{\alpha}{s} \varphi_{m+1}(\alpha, i-s) > \binom{i-1}{s} \varphi_{m+1}(\alpha, i).$$

È intanto ovvio che per $s < i$ (come supposto) si ha:

$$\binom{\alpha}{s} > \binom{\alpha - m - i + s}{s},$$

ovvero:

$$\binom{\alpha}{s}\binom{\alpha - m}{i-s}(i-s) > \binom{\alpha - m}{i}\binom{i-1}{s} i,$$

od anche:

$$\binom{\alpha}{s}\binom{\alpha - m}{i-s} - \binom{i-1}{s}\binom{\alpha - m}{i} > \binom{\alpha}{s}\binom{\alpha - m}{i-s}\frac{\alpha - m - i + s}{\alpha - m} -$$
$$- \binom{i-1}{s}\binom{\alpha - m}{i}\frac{\alpha - m - i}{\alpha - m},$$

da cui:

$$\binom{\alpha}{s}\binom{\alpha - m}{i-s} - \binom{i-1}{s}\binom{\alpha - m}{i} > \binom{\alpha}{s}\binom{\alpha - m - 1}{i-s} -$$
$$- \binom{i-1}{s}\binom{\alpha - m - 1}{i}.$$

Ma, poichè per la (* *):

$$\binom{\alpha}{s}\binom{\alpha}{i-s} - \binom{i-1}{s}\binom{\alpha}{i} > \binom{\alpha}{s}\binom{\alpha - m}{i-s} - \binom{i-1}{s}\binom{\alpha - m}{i},$$

confrontando con la precedente consegue la tesi.

10. - La $\varphi_m(\alpha, i)$ è inoltre funzione *crescente* di α nell'insieme dei numeri interi e positivi.

Infatti per $i = 1$ essa è costante ed eguale ad m. Per $i = 2$. essa è costante come si verifica immediatamente.

Ammettiamo allora che per un certo i si abbia, con h intero positivo:

$$\binom{\alpha + h}{i} - \binom{\alpha + h - m}{i} \geq \binom{\alpha}{i} - \binom{\alpha - m}{i}, \qquad (^{32})$$

e dimostriamo che ciò è vero per $i + 1$, ossia che:

$$\binom{\alpha + h}{i + 1} - \binom{\alpha + h - m}{i + 1} > \binom{\alpha}{i + 1} - \binom{\alpha - m}{i + 1}.$$

Infatti questa si può scrivere moltiplicandola per $i + 1$:

$$\binom{\alpha + h}{i}(\alpha + h - i) - \binom{\alpha + h - m}{i}(\alpha + h - m - i) >$$

$$> \binom{\alpha}{i}(\alpha - i) - \binom{\alpha - m}{i}(\alpha - m - i),$$

e sottraendo da questa quella ammessa valida, moltiplicata per $\alpha - i$, resta da dimostrare:

$$\binom{\alpha + h}{i} h - \binom{\alpha + h - m}{i}(h - m) > m \binom{\alpha - m}{i},$$

che è di evidente verità, tenuto conto che i coefficenti binomiali sono funzioni crescenti del loro numeratore.

11. - Vogliamo ora dimostrare la diseguaglianza:

$$\varphi_\mu(nt + \nu, R) > n^{R-1} \varphi_\mu(t, R),$$

(32) Il segno eguale sussiste solo per $i = 1$; per $i > 1$ vale sempre la maggiorazione.

dove n, t, ν, $R = \rho + 1$ sono i caratteri che abbiamo precedentemente incontrati.

Poichè φ_μ è funzione crescente di t (cfr. n. 10) essa è certo vera per $n = 1$.

Procediamo allora per induzione su n: ammettiamo cioè che essa valga per un certo n e per ogni valore di $R \geq 1$, e dimostriamo che di conseguenza essa vale pel successivo valore $n + 1$ e per ogni valore di $R \geq 1$.

Si ha infatti per $0 \leq s < R$ dalla ipotesi ammessa, quando si scriva $R - s$ al posto di R e si moltiplichi tutto per $\binom{t}{s}$:

$$\binom{t}{s} \varphi_\mu(nt + \nu, R - s) > \binom{t}{s} n^{R-s-1} \varphi_\mu(t, R - s),$$

e per la (* *):

$$\binom{t}{s} \varphi_\mu(nt + \nu, R - s) > n^{R-s-1} \binom{R-1}{s} \varphi_\mu(t, R).$$

Sommando entrambi i membri per s che varii da zero ad $R - 1$, e tenendo conto che nel primo membro:

$$\varphi_\mu(nt + \nu, 0) = 0,$$

per cui nel primo membro si può sommare sino ad R, si ha:

$$\varphi_\mu((n + 1)t + \nu, R) > (n + 1)^{R-1} \varphi_\mu(t, R),$$

che è appunto la tesi.

Dalla uguaglianza dimostrata è ora facile ricavare una ultima relazione che ci condurrà immediatamente alla (*).

Si moltiplichino perciò entrambi i suoi membri per $\binom{R}{s}$ e si sommino ancora per s che varii da zero ad R. Si trova:

$$\varphi_\mu(nt + \nu + R, R) > n^{R-1} \varphi_\mu(t + R, R).$$

12. - Si prenda finalmente il polinomio $G(t)$; esso è:

$$G(t) \equiv (r+2)\left\{\binom{t+\rho+1}{\rho+1} - \binom{t-\mu+\rho+1}{\rho+1}\right\} -$$
$$-\left\{\binom{nt+\nu+\rho+1}{\rho+1} - \binom{nt+\nu-\mu+\rho+1}{\rho+1}\right\}.$$

Esso, usando il simbolo $\varphi_m(\alpha, i)$ può scriversi nella forma:

$$G(t) \equiv (r+2)\,\varphi_\mu(t+\rho+1, \rho+1) - \varphi_\mu(nt+\nu+\rho+1, \rho+1).$$

Ma per l'ultima disiguaglianza del numero precedente:

$$\varphi_\mu(nt+\nu+\rho+1, \rho+1) > n^\rho\, \varphi_\mu(t+\rho+1, \rho+1),$$

e quindi:

$$G(t) < (r+2-n^\rho)\cdot \varphi_\mu(t+\rho+1, \rho+1),$$

che è appunto la (*) che avevamo preannunciata.

È infatti evidente che:

$$\Phi(t) = \varphi_\mu(t+\rho+1, \rho+1) > 0,$$

e che quindi se:

$$A = r+2-n^\rho < 0,$$

anche $G(t)$ è negativo.

Resta così dimostrato il Teor. 1, e vogliamo anche raccogliere l'enunciato che:

« *Condizione necessaria e sufficente perchè una V_r definita nel corpo di funzioni algebriche:*

$$K'(x_0, \dots, x_{r+1}) \bmod f(x_0, \dots, x_{r+1})$$

con:

$$K' \equiv K(v_0, \ldots, v_{\rho+1}) \bmod \varphi(v_0, \ldots, v_{\rho+1}),$$

possegga un punto P razionale su K' è che:

$$r + 2 - n^\rho > 0, \text{»}$$

dove r, n, ρ hanno il significato usuale.

13. - È ora il momento d'illustrare la condizione di generalità che abbiamo introdotta alla luce di un semplice esempio.

Già abbiamo avvertito (n. 5) che una V_r molto *particolare* nel senso che gli enti che la definiscono, siano scelti in modo particolare nei loro insiemi di variabilità, può risultare «*generale*» nel nostro senso.

Vogliamo ora far toccare concretamente la verità di questa osservazione alquanto facilmente intuibile.

Consideriamo perciò la varietà algebrica definita sul corpo di funzioni:

$$K'(x_0, \ldots, x_n) \bmod f(x_0, \ldots, x_n),$$

con $f(x_0, \ldots, x_n)$ data dalla forma:

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \, x_i^n,$$

e in cui le α_i appartengono a:

$$K' \equiv K(v_0, v_1, v_r) \bmod \varphi(v_0, v_1, v_r),$$

con:

$$\varphi(v_0 v_1 v_2) = \beta_0 v_0 + \beta_1 v_0 + \beta_r v_2 = 0 .$$

Siamo quindi di fronte ad un sistema algebrico di ∞^1 specializzazioni della V_{n-1}^n, ammettente una retta dello $S_2(v_0, v_1 . v_r)$ come modello astratto.

Scriviamo per comodità i riferimenti numerici del caso, rispetto al simbolismo generale di prima. Si ha per i caratteri fondamentali:

$$r = n - 1\,, \quad \rho = 1\,, \quad \mu = 1\,.$$

Pel numero delle γ_k^i in una η_i è:

$$N = \binom{t+2}{2} - \binom{t+1}{2} = t + 1\,.$$

Quello delle δ_i è:

$$M = \binom{nt + \nu + 1}{2}.$$

Il numero totale q delle indeterminate è quindi:

$$q = (n+1)(t+1) + \binom{nt + \nu + 1}{2}.$$

Il numero delle equazioni cui esse devono soddisfare è:

$$p = \binom{nt + \nu + 2}{2}.$$

Inoltre in tal caso:

$$A = r + 2 - n^{\rho} = n + 1 - n = 1 > 0\,;$$

quindi, se la V_{n-1} sarà generale (ed a maggior motivo se non lo è) è soddisfatta la nostra condizione.

Ora vogliamo vedere che effettivamente la V_{n-1} è in tal caso generale. Come si è visto al n. 5 basta controllare la cosa per un particolare valore di t. Vediamo quali siano in tal caso i possibili valori di t.

(33) Cfr. perciò il n. 16 seguente.

Deve essere:

$$q - p > 0,$$

cioè:

$$(n+1)(t+1) + \binom{nt+\nu+1}{2} > \binom{nt+\nu+2}{2},$$

da cui si ha:

$$t > \nu - n.$$

Se aggiungiamo l'ipotesi che $\nu \leq n$ (34) basta prendere $t \geq 1$. (35) Si potrà pertanto verificare la generalità della V_{n-r} nel caso $t = 1$.

Si tratta quindi di determinare le condizioni cui deve soddisfare una retta unisecante il Σ_1. Si elimini perciò, anzitutto v_2 mediante la $\varphi(v_i) = 0$, dai coefficienti di $f(x_0, \ldots, x_n)$. Dopodichè le equazioni della retta possono scriversi nella forma:

$$(*) \qquad \eta_i = \lambda_{0,i}\, v_0 + \lambda_{1,i}\, v_1 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Ordiniamo la $f(x_0, \ldots, x_n)$ secondo v_0, v_1; si otterrà una forma del tipo:

$$* \qquad f(x_0, \ldots, x_n) \equiv \sum_{k=0}^{\nu} \left(\sum_{i=0}^{n} u_{ik}\, x_i^n \right) v_0^{\nu-k}\, v_1^k = 0.$$

Sostituendo le (*) nella $f(x_i)$ al posto delle x_i si ha:

$$\sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{n} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_{ik}\, \lambda_{0i}^{n-r}\, \lambda_{1i}^{r}\, v_0^{n+\nu-(r+k)}\, v_1^{r+k} \equiv 0,$$

identicamente nelle v_0, v_1.

(34) Questa ipotesi serve solo per semplificare alcuni calcoli, e si potrebbe benissimo non farla.

(35) Si ricordino le osservazioni del n. 6 sulle soluzioni isolate.

Perchè ciò sia, dovranno sussistere le:

$$\sum_{r+k=s} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{r} a_{ik} \lambda_{0i}^{n-r} \lambda_{1i}^{r} = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n+\nu),$$

dove la prima sommatoria è estesa a tutti quei valori di r e k la cui somma è s.

Tali equazioni possono anche scriversi:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{r=0}^{s} \binom{n}{r} a_{i,s-r} \lambda_{0i}^{n-r} \lambda_{1i}^{r} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n+\nu).$$

Esse in uno spazio conveniente $S[\lambda_{0i}, \lambda_{1i}]$ definiscono una varietà W che vogliamo far vedere essere irriducibile o pura, e di dimensione regolare.

Per vedere ciò basterà specializzare convenientemente le $a_{i,s-r}$ in K, e verificare che la W' specializzata è irriducibile.

Si annullino perciò tutte le $a_{i,s-r}$ con $i \neq s-r$. Si ottiene la W' definita dalle:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{s-i} a_{i,i} \lambda_{0i}^{n-(s-i)} \lambda_{1i}^{s-i} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n+\nu),$$

in cui inoltre vanno considerati solo quegli i per cui: $s-n \leq i \leq s$.

È d' altra parte evidente che queste si riducono alle $n+\nu+1$ equazioni:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{0,0}^{n} = 0 \\ \lambda_{0,1}^{n} = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_{0,n}^{n} = 0 \\ \lambda_{1,1}^{n} = 0 \\ \quad \vdots \\ \lambda_{1,\nu}^{n} = 0, \end{array}\right.$$

che rappresentano effettivamente una W' pura e di dimensione regolare rispetto il numero delle equazioni.

L' esempio che abbiamo dato anche perchè offre interessanti sviluppi e prospettive, sui quali ci ripromettiamo di tornare in altri lavori, permette, sia pur vagamente, d' intravvedere una possibilità di studio di eventuali criteri di generalità, tramite opportune specializzazioni sistematicamente applicate a categorie sempre più vaste di varietà.

Dopociò, senza attardarci più oltre nell'approfondimento dello studio delle varietà unisecanti, su cui contiamo di ritornare, e specie del loro insieme, passiamo alla esposizione di un gruppo di teoremi, che conseguono dal Teor. 1.

14. – Iniziamo col dimostrare il teorema:

Teorema 2: « *Se* $K(x_1,\dots, x_{\rho+r+1})$ mod $f(x_1,\dots, x_{\rho+r+1})$ *è una estensione di dimensione* $\rho + r$ *su* K, *tale che la varietà* $W_{\rho+r}$, *algebrica, di equazione*:

$$f(x_1,\dots, x_{\rho+r+1}) = 0\,,$$

contenga un sistema algebrico Σ_ρ *di dimensione* ρ, *generale e d'indice uno di varietà algebriche* W_r^n, *la cui generica sia rappresentata da un conveniente ideale primo*:

$$\mathfrak{A} \equiv (f_1, f_2,\dots, f_j,\dots, f)$$

dato sul corpo di funzioni algebriche: $K' \equiv K(u)$ mod $\varphi(u_1, \dots, u_{\rho+1}) = 0$, *in cui cioè le* f_j *sono del tipo*:

$$f_j(x_1,\dots, x_{\rho+r+1} \mid u_1, u_2,\dots, u_{\rho+1}) = 0 \qquad (j = 1, 2,\dots),$$

si può trovare in $K(x_i)$ *una* $V'_{\rho+r}$ *luogo di* ∞^ρ *spazi lineari* S_r *ad* r *dimensioni tale che la* $V_{\rho+r}$ *data può essere rappresentata su essa contata* $(n - 1)$ *volte in modo che il* Σ_ρ, *generale, delle sue* W^n *si trasformi in un* Σ'_ρ *di spazi lineari* $(n - 1)$ — pli S_r, *che potrà anzi sempre ridursi ad un sistema di spazi passanti per un conveniente spazio lineare* ».

Intanto sistema algebrico Σ_ρ d'indice 1 significa notoriamente che per un punto della $V_{\rho+r}$, passa una ed una sola W_r^n del Σ_ρ, ossia in termini algebrici che se si costruisce l'ideale individuato dalle f_j pensate nelle variabili $u_1, \dots, u_{\rho+1}$ e dalla $\varphi(u_i) = 0$, cioè l'ideale:

$$B \equiv (f_1, \dots, f_j, \dots, \varphi),$$

la sua varietà di radici nello $S_{\rho+1}[u_1 \dots u_{\rho+1}]$ affine deve ridursi ad un solo punto.

Partendo da tale ipotesi si eliminino ([36]) ad es. le $u_2, u_3, \dots u_{\rho+1}$ dalle:

$$\begin{cases} f_j(x \mid u_1, u_2, \dots, u_{\rho+1}) = 0 & (j = 1, 2, \dots) \\ \varphi(u_1\, u_2, \dots u_{\rho+1}) = 0 . \end{cases}$$

Si perverrà a certi polinomi risultanti:

$$g_j(x \mid u_1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

nella sola indeterminata u_1.

I polinomi g_j ammetteranno un massimo comune divisore, che sarà un certo polinomio nelle x_j ed u_1 di un certo grado λ in u_1, e sia:

$$h(x_1, \dots, x_{\rho+r+1} \mid u_1) = 0,$$

per cui:

$$g_j(x, u_1) = h(x, u_1) \cdot l_j(x, u_1),$$

essendo ora le l_j prive di divisori comuni in u_1.

Si scomponga il polinomio $h(x, u_1)$ nei suoi fattori lineari rispetto u_1 in un certo sopracorpo $\overline{K}$ di riduzione di $K(x_1, \dots, x_{\rho+r})$, ottenendo una espressione del tipo:

([36]) Si confronti: VAN DER WAERDEN: *Algebraische Geometrie*, § 31.

$$h(x, u_1) \equiv P(x)(u_1 - \xi_1)(u_1 - \xi_2) \dots (u_1 - \xi_\lambda),$$

dove $P(x)$ appartiene a $K(x)$, e le ξ_i al sovracorpo $\overline{K}$.

Si specializzino dopociò le x_i in modo che le x'_i specializzate soddisfino la $f(x'_1, \dots, x'_{\rho+r+1}) = 0$: vi sarà allora un solo valore di u_1 radice di: $h(x, u_1)$, e quindi i valori specializzati ξ'_i delle ξ_i sono fra loro eguali. Ma ciò è allora vero per delle x_i generiche [37], e pertanto si può genericamente scrivere:

$$R(x, u_1) \equiv P(x)(u_1 - \xi)^\lambda .$$

Da qui, eguagliando i coefficienti, consegue che ρ deve appartenere a $K(x_1, \dots, x_{\rho+r+1})$.

Analogamente si può procedere per le altre u_i, e si conclude che esse appartengono tutte a $K(x)$, e perciò:

$$H \equiv K(x_1, \dots, x_{\rho+r}) \supset K(u_1, u_2, \dots, u_{\rho+1}) \equiv K',$$

ossia H è una estensione di dimensione r di $K' \equiv K(u)$.

Siamo quindi di fronte ad una W_r^n definita nel corpo di funzioni algebriche K', generale per ipotesi, perchè tale è stato supposto l'insieme delle sue specializzazioni: è inoltre soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente: $A > 0$; si può quindi applicare il Teor. 1, il quale ci garantisce, in tali condizioni, della esistenza in $K' \equiv K(u)$ di certi elementi $t_1, t_2, \dots, t_{r+1}$ tali che:

$$H \equiv K'(t_1, \dots, t_{r+1}) \bmod g(t_1, \dots, t_{r+1}),$$

con $g(t_1, \dots, t_{r+1})$ polinomio di grado $n-1$ in t_{r+1}.

Se si considerano ora le equazioni:

(37) van der Waerden, II, Kap. V.

$$\begin{cases} \sigma z_0 = 1 \\ \sigma z_1 = u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sigma z_{\rho+1} = u_{\rho+1} \\ \sigma z_{\rho+2} = t_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sigma z_{\rho+r+1} = t_r, \end{cases}$$

con σ elemento di K, esse rappresentano in uno $S_{r+\rho+1}\,[z_0, \ldots, z_{r+\rho+1}]$ proiettivo, una $V'_{\rho+r}$ su H, su cui, contata $(n-1)$ volte, si rappresenta la data $V_{r+\rho}$. Si tratta inoltre evidentemente della varietà di equazione:

$$\varphi\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}, \ldots, \frac{z_{\rho+1}}{z_0}\right) = 0,$$

che nello $S_{r+\rho+1}$ è appunto una ipersuperficie conica costituita da ∞^ρ S_r, passanti tutti per lo S_{r-1} di equazioni:

$$z_0 = z_1, = \ldots . = z_{\rho+1} = 0,$$

ed ogni S_r $(n-1)$-plo è immagine di una W_r^n tramite le equazioni:

$$\begin{cases} \sigma z_{\rho+2} = t_1 \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ \sigma z_{\rho+r+1} = t_r . \end{cases}$$

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

È bene notare che la rappresentazione così ottenuta è di natura particolare, nel senso che può benissimo esservi una $V_{\rho+r}$ rappresentabile su una $V'_{\rho+r}$ $(n-1)$-pla di ordine m (eguale cioè all'ordine di $\varphi(u)$), ma non in modo che il Σ_ρ

delle sue W_r^n si trasformi in un sistema di spazi lineari $(n-1)$-pli. Insisteremo particolarmente su ciò fra poco in un caso particolare, molto importante, del Teor. 2.

Enunciamo ancora, prima di proseguire, il Teor. 2 in puro linguaggio geometrico:

« *Una varietà* $V_{\rho+r}$ *di dimensione* $\rho+r$, *con un sistema algebrico generale di* ∞^ρ W_r^n *ad* r *dimensioni* (*ovvero birazionalmente equivalente ad una* $V_{\rho+r}$ *con un sistema di questo tipo*), *si può razionalmente trasformare in una varietà* $V'_{\rho+r}$ $(n-1)$-pla *di spazi lineari ad* r *dimensioni, rappresentativi delle* W_r^n *del sistema, se e solo se:*

$$A = r + 2 - n^\rho > 0 \text{ ».}$$

15. – Si supponga ora, in tutte le ipotesi del Teor. 2, che la $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{\rho+1}) = 0$, sia un polinomio lineare nelle u_i, ovvero sia birazionalmente trasformabile in un tale polinomio, cioè si supponga che la $\varphi(u_1, \ldots, u_{\rho+1}) = 0$ rappresenti una ipersuperficie razionale dello $S_{\rho+1}$ $[u_1, \ldots, u_{\rho+1}]$ affine.

Si perverrà allora alla fine del procedimento del numero precedente, ad una $V'_{\rho+r}$ di equazione:

$$\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1 + \ldots . + \alpha_{\rho+1} z_{\rho+1} = 0\,,$$

che rappresenta un iperpiano di un conveniente $S_{r+\rho+1}$ proiettivo. Pertanto la $V_{\rho+r}$ data può in tal caso rappresentarsi in uno spazio $S'_{r+\rho}$ multiplo d'ordine $(n-1)$, in modo inoltre che il Σ_ρ delle W_r^n si trasformi ora nel sistema di tutti gli S_r passanti per un S_{r-1} dello $S'_{r+\rho}$.

Chiamando razionale un Σ_ρ di W_r^n del tipo sopradescritto, si potrà allora enunciare il seguente corollario del Teor. 2:

Teorema 3: « *Se* $K(x_1, x_2, \ldots, x_{\rho+r+1}) \bmod f(x_1, \ldots, x_{\rho+r+1})$ *è una estensione di dimensione* $\rho+r$ *su* K, *tale che la varietà* $V_{\rho+r}$ *di equazione*:

$$f(x_1, \ldots, x_{\rho+r+1}) = 0 ,$$

contenga un sistema algebrico Σ_ρ *di dimensione* ρ, *generale, razionale e d'indice uno di* V_r^n *di dimensione* r, *la* $V_{\rho+r}$ *può rappresentarsi un uno spazio lineare* $S'_{\rho+r}$ $(n-1)$ — plo *su* $K(x)$ *se e solo se:*

$$A = r + 2 - n^\rho > 0 ,$$

la rappresentazione sullo $S'_{\rho+r}$ *potendo eseguirsi in maniera che alle* W_r^n *della* $V_{\rho+r}$ *corrispondano gli* S_r $(n-1)$ — pli *per un certo* S_{r-1} *dello* $S'_{\rho+r}$ ».

È per di più evidente che, sempre nelle ipotesi del Teor. 2, se la generica W_r^n è razionale e *se la conoscenza di una soluzione della:*

$$f(x_1, \ldots, x_{\rho+r}) = 0 .$$

su $K' \equiv K(u)$ *è sufficente per rappresentare la* W_r^n *su un* S_r *semplice in* $K(u)$, *la* $V_{\rho+r}$ *si rappresenta semplicemente sulla varietà* $V'_{\rho+r}$:

$$\varphi\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{z_{\rho+1}}{x_0}\right) = 0 ,$$

che costituisce allora una trasformata birazionale della $V_{\rho+r}$, ed è in particolare un iperpiano se il Σ_ρ è razionale, caso che certamente si presenta ad es. quando $n = 2$, cioè quando si è di fronte a $V_{\rho+r}$ con sistemi di quadriche, che è un caso già completamente trattato, come estensione del Teor. di Noether [38], da

[38] M. Noether, *Ueber Flächen welche Schauren rationaler Kurven besitzen*, «Math. Ann.», Bd. 3, 1871. Per una esposizione: F. Conforto: *Le superficie razionali* (Bologna, Zanichelli, 1939), Lib. II. cap. I.

F. Conforto [39] per quanto riguarda la sufficienza della condizione $A > 0$.

U. Morin [40], studiando le V_{r+1} contenenti un sistema ∞^r di coniche (o di curve razionali) razionale e d'indice uno, ha introdotto la nozione di *razionalità lineare* per significare che la V_{r+1} è razionale, ma per di più in modo che le curve del sistema che essa contiene si rappresentino in una stella di rette.

La razionalità semplice e quella lineare costituiscono infatti due fatti differenti, come già risulta dalla esistenza di congruenze di coniche non trasformabili birazionalmente in stelle di rette [41].

È pertanto ovvio estendere tale denominazione ad una $V_{\rho+r}$ per cui si verifichino le condizioni specificate sopra. Si può allora brevemente raccogliere questi ragionamenti enunciando in puri termini geometrici che:

Teorema 4: « *Condizione necessaria e sufficiente perchè una $V_{\rho+r}$ ad $\rho + r$ dimensioni, che contenga un sistema algebrico Σ_ρ di dimensione ρ, generale e d'indice uno di W_r^n razionali ad r dimensioni e d'ordine n (od una sua trasformata birazionale) sia linearmente rappresentabile su un cono di ∞^ρ S_r per uno S_{r-1}, è che:*

$$A = r + 2 - n^\rho > 0,$$

e che la conoscenza di un punto sulla generica W_r^n permetta di rappresentarla su un S_r in $K' \equiv K(u)$.

In particolare se il Σ_ρ è razionale, la $V_{\rho+r}$ è linearmente razionale.

(39) F. Conforto, *Su un classico teorema di Noether etc....*, Rend. Acc. It. Serie VII, vol. II, 1940.

(40) U. Morin, *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali*, «Rend. Sem. Mat. della Università di Padova», Anno IX, n. 3-4 (1938).

(41) D. Montesano, *Sui vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio*, «Rend. Acc. di Napoli», 1895. (Due note).

16. - Ci occuperemo in questo numero di una $V_{\rho+r}$ di equazione:

$$f(x_1, \ldots, x_{\rho+r+1}) = 0 ,$$

contenente un sistema generale ∞^ρ di W_r^n, non più d'indice uno, bensì d'indice $\delta > 1$.

Ciò vuol dire che per un punto generico della $V_{\rho+r}$ passano δ W_r^n del Σ_ρ. Si riprendano allora in tale ipotesi le considerazioni del n. 19.

L'ideale B, ancora zero-dimensionale, deve ora rappresentare per delle generiche x_i δ punti dello $S_{\rho+1}[u_1, u_2, \ldots, u_{\rho+1}]$. Si eliminino ancora le $u_2, \ldots, u_{\rho+1}$ tra le $f_j(x \mid u_1 \ldots u_{\rho+1}) = 0$ e la $\varphi(u_1 \ldots u_{\rho+1}) = 0$, e si consideri il M. C. D. $h(x, u_1)$ dei polinomi g_j cui si perviene. Se si specializzano le $x_i \to x_i'$, in modo che: $f(x_1', \ldots, x_{\rho+r+1}') = 0$, si avrà:

$$h(x' \mid u_1) \equiv P(x')(u_1 - \xi_1')^\mu (u_1 - \xi_2')^\mu \ldots (u_1 - \xi_\delta')^\mu ,$$

poichè si devono trovare solo δ valori distinti per u_1. Ciò varrà ancora per delle x_i generiche, e quindi ξ soddisfa una equazione di grado δ in $K(x)$, cioè u_1 appartiene ad una estensione di grado δ di $K(x)$. Analogamente si può dire per $u_2, \ldots, u_{\rho+1}$.

Sia allora $\overline{K}(x)$ il corpo che contiene $u_1, \ldots, u_{\rho+1}$, che si può costruire con l'aggiunzione di ξ_i' per u_1, di ξ_i'' per u_2, etc...., per cui le u_i sono elementi tutti di grado δ, tali inoltre che se si determina u_1 resta di conseguenza determinata ogni altra u_i.

Si consideri la $f(x_1 \ldots x_{\rho+r+1}) = 0$ definita su $\overline{K}(x) \supset K(x)$, anzichè su $K(x)$, e si proceda come al n. 19 facendo assolvere da $\overline{K}(x)$ l'ufficio di $K(x)$.

La varietà $V'_{\rho+r}$ definita su $\overline{K}(x)$ di equazioni:

$$\begin{cases} \sigma z_0 = 1 \\ \sigma z_1 = u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma z_{\rho+1} = u_{\rho+1} \\ \sigma z_{\rho+2} = t_1 \\ \vdots \\ \sigma z_{\rho+r+1} = t_{r+1} \end{cases}$$

è ora in corrispondenza $(1, \delta)$ con la $V_{\rho+r}$ data. Cioè la $V_{\rho+r}$ si rappresenta linearmente ([42]) sui gruppi di una involuzione d'ordine δ di una $V'_{\rho+r}$, che è ancora un cono di S_r per uno S_{r-1}, dove si suppone sempre che un punto di W_r^n noto su $K(u)$ permetta di rappresentarla razionalmente su un S_r.

Si può quindi concludere col teorema:

Teorema 5: «*Condizione necessaria e sufficiente perchè una $V_{\rho+r}$ contenente un sistema generale ∞^ρ, d'indice $\delta > 1$, di W_r^n razionali tali che la conoscenza di un punto della generica (su $K(u)$) sia sufficiente per rappresentarla su uno S_r in $K(u)$, sia birazionalmente equivalente ad una involuzione d'ordine δ di una $V_{\rho+r}$ appartenente ad una estensione finita algebrica di $K(x)$, è che riesca: $A > 0$*».

Se, in particolare il sistema Σ_ρ è razionale la $V_{\rho+r}$ riesce linearmente unirazionale.

17. Dedichiamo questo numero ad alcune osservazioni e rilievi, che hanno bisogno di precisare i problemi sin'ora risolti e quelli che restano da risolvere, nonchè il posto che occupano alcune idee che abbiamo svolte in un ordine generale di pensiero.

([42]) È chiaro cosa significhi in tal caso «linearmente». La generica W_r^n del Σ_ρ si rappresenta razionalmente su un S_r del cono, ma ad un punto della $V_{\rho+r}$ corrispondono δ punti della $V'_{\rho+r}$ che giacciano nei δ S_r associati alle δ W_r^n passanti per quel punto.

È ovvio anzitutto che questo lavoro è dominato dalla condizione di generalità che dà in tutto esso il confine e la portata delle deduzioni, e che nello stesso tempo, in tale ambito, resta completamente risolto il problema propostoci.

Infatti, ragionando per semplicità di discorso nel caso che si ricerchi l'eventuale razionalità lineare di una $V_{\rho+r}$ contenente un sistema algebrico d'indice uno di W_r^n di dimensione r (Teor. 4), si potrà procedere nel seguente ordine.

Si guardi anzitutto se $A = r + 2 - n^\rho$ è positivo o no. Se A riesce positivo non ha alcun interesse la generalità della W_r^n su $K(u)$, cioè sia essa generale o no, la $V_{\rho+r}$ è linearmente razionale, sempre qualora la W_r^n possa rappresentarsi in $K(u)$ su uno S_r con la conoscenza di un solo punto. Ciò, se la $V_{\rho+r}$ è generale, deriva dal Teor. 4; se non lo è, la cosa è a maggior motivo vera perchè l'ideale $\bar{I}^*$ associato alla $V_{\rho+r}$ ha allora dimensione maggiore della generica, e quindi il sistema dei polinomi che lo formano ammette, a fortiori, soluzioni non isolate.

Se invece $A \leq 0$, entra in gioco in modo decisivo la caratteristica di generalità. Occorrerà allora esaminare l'ideale $\bar{I}^*$ e vederne la dimensione. Se essa è eguale a quella generica di un ideale I formato da altrettanti polinomi generici nello stesso numero di variabili, la W_r^n è generale su $K(u)$, e per il Teor. 4, essa non è lineamente razionale rispetto quel Σ_ρ, e si può dirla *linearmente irrazionale.*

Ed anche in tal caso la questione è completamente risolta.

Se invece l'ideale $\bar{I}^*$ ha dimensione maggiore di quella generica (43) la W_r^n non è generale, e resta allora aperta la via ad una discussione più approfondita. Si tratta, più precisamente, di vedere se la non generalità della W_r^n sia sufficiente perchè $\bar{I}^*$ abbia almeno dimensione uno.

(43) Mi sembra abbastanza opportuno introdurre sistematicamente per uno stesso ideale I una distinzione fra la sua dimensione *effettiva* e la sua *virtuale*, chiamando virtuale quella che gli spetterebbe in base al numero delle equazioni e delle variabili, e sarà forse conveniente introdurre dimensioni virtuali negative.

Il problema può porsi in termini più interessanti. Si supponga che per una certa W_r^n su $K(u)$ riesca: $A \leq 0$, e che la W_r^n sia generale. Si può allora chiedere: « Quali relazioni dovranno esistere fra i dati del problema, se è possibile, perchè l'ideale $\bar{I}^*$ acquisti dimensione almeno eguale ad uno? E quale significato geometrico hanno tali relazioni? »

U. Morin ha risolto, ponendosi dal puro punto di vista geometrico, tale questione nel caso particolare di una V_{r+1} con ∞^r coniche nel suo lavoro già citato, ed ha trovato in tal caso una condizione necessaria e sufficente per la razionalità lineare consistente nella separabilità razionale su K in due varietà distinte, della varietà descritta dalle coniche degeneri della V_{r+1}.

Già in tal caso non si conosce tuttavia una dimostrazione puramente algebrica nello spirito di questo lavoro, e niente si sa per ogni altro caso di questo problema suggestivo e di alto interesse.

Una sua completa risoluzione, insieme ad uno studio sistematico delle irrazionalità minime che occorrono nella rappresentazione di una W_r^n razionale, non mancherebbe di fornire conoscenze assai importanti sulla geometria birazionale delle varietà a più dimensioni.

Vogliamo infine notare inversamente un aspetto delle ricerche da noi svolte, che però, crediamo, riuscire utile talvolta. Si supponga perciò di avere una $V_{\rho+r}$ con un Σ_ρ di W_r^n, e di sapere già, per una qualsiasi via, che la $V_{\rho+r}$ è linearmente razionale e che non è soddisfatta la condizione $A > 0$. Si potrà allora affermare che il Σ_ρ necessariamente è un sistema particolare, e qualora si conoscessero quei criteri cui sopra si è alluso, si potrebbe anche precisare la natura della sua particolarità.