MARIO BALDASSARRI

Le varietà pluririgate a tre dimensioni

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 172-200

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__172_0>

LE VARIETÀ PLURIRIGATE A TRE DIMENSIONI

Nota (*) *di* MARIO BALDASSARRI (*a Padova*).

Argomento di questo lavoro è lo studio e la classificazione di quelle varietà a tre dimensioni che contengono un sistema (irriducibile o no) di ∞^2 rette, tale che per un loro punto passi un numero finito μ di rette. A tali varietà si conviene il nome di « *varietà pluririgate* », dove l'aggettivo s'intenda usato senza alcuna selettività rispetto la composizione del sistema doppiamente infinito di rette.

CHARLES H. SISAM aveva ottenuto (¹) in proposito un risultato parziale, dimostrando che le uniche varietà pluririgate *con* $\mu = 6$ sono le ipersuperficie cubiche dello S_4, teorema che, in opportuno senso, si presentava come perfetta estensione del ben noto teorema per le superficie rigate, che afferma essere le quadriche le uniche superficie « pluririgate ». La dimostrazione del SISAM si fonda su opportuni sviluppi in serie, e la successiva identificazione dei termini sino al settimo ordine, base alcuni risultati algebrico-differenziali a carattere generale, precedentemente ottenuti dallo stesso autore.

Metodi di tale tipo si presentano però ben poco agevoli in una indagine generale, avendo essi un accentuato carattere dimostrativo piuttosto che di scoperta, ed in questa ricerca infatti vengono usati i puri metodi della geometria.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 febbraio 1950.

(¹) CHARLES H. SISAM, American Journal of Mathematics, 1930, pp. 632 e seg.

* * *

Questa Nota si inizia con alcuni teoremi, che, pur non costituendo parte dell'argomento centrale ne costituiscono tuttavia una utile premessa, dato l'impiego che essi poi trovano. Si tratta di proprietà riguardanti l'insieme delle pluritangenti di una superficie (Teor. 1, 2) e la varietà multipla di una V_3 rigata immersa in uno S_4 (Teor. 3, 4, 5, 6).

Dopodichè si affronta il problema della caratterizzazione delle varietà pluririgate pervenendo al risultato:

« *Le uniche varietà a tre dimensioni pluririgate sono le varietà a curve sezioni ellittiche d'ordine* $n < 7$, *esclusa la varietà del sesto ordine dello* S_7 *con retta doppia* ».

Infine si compie l'interpretazione dei risultati trovati nella grassmaniana delle rette dello S_4 che è una M_6^5 dello S_9, e da tal punto di vista il problema risolto è quello di *classificare le superficie della* M_6^5 *segate dagli* S_6 *tangenti alla* M_6^5 *nei loro punti secondo curve.*

* * *

Il lavoro si conclude con alcune conseguenze la più notevole delle quali è la *non esistenza di superficie dello* S_4 *che siano multiple per un eventuale loro sistema di* k — *secanti* (*con* $k > 3$) *d'indice maggiore di uno.* È questa una proprietà interessante di cui non mi sembra agevole una dimostrazione diretta.

È ancora da osservare che restano così aperte le vie per affrontare il problema più generale dello studio delle varietà pluririgate di dimensione qualsiasi, su cui io stesso conto di tornare.

1. - Si consideri una superficie algebrica F, d'ordine n, irriducibile ed immersa nello S_3. Il complesso (algebrico) delle sue tangenti, K, costituisce allora un insieme triplamente infinito di rette che può rappresentarsi, nel modo noto, con una varietà algebrica a tre dimensioni, immersa nella quadrica di KLEIN, Q_4^2, di uno S_5.

Indicheremo costantemente nel seguito le immagini di insiemi di rette dello S_3 fatte nello S_5 con le stesse lettere segnate da un asterisco. Pertanto sarà K^* la varietà suddetta.

La K^* risulta una varietà rigata, e le sue ∞^2 rette sono le immagini dei fasci di tangenti della F.

La caratterizzazione completa (2) di essa si effettua esprimendo nello S_5 la condizione che le faccette punto e piano infinitamente vicine siano in posizione congiunta, ossia, che in ciascun fascio di tangenti della F esistono due rette (le tangenti assintotiche) che appartengono anche a fasci infinitamente vicini. Cioè in S_5 (entro Q) : ogni retta g della K^* è incontrata da due generatrici prossime, cioè possiede due *fuochi* (3).

Qualora la F abbia ordine n sufficientemente alto, essa ammette anche una congruenza H di bitangenti (4) ed una rigata T di tritangenti, nonchè un numero finito di rette quadritangenti.

Le immagini nello S_5 di questi insiemi di rette sono rispettivamente una superficie H^* ed una curva T^*.

La superficie H^* risulta chiaramente doppia per la K^*, e la curva T^* risulta tripla per K^* e per H^*.

Naturalmente la situazione descritta si presenta nella ipotesi di un'assoluta *regolarità* del complesso delle tangenti K di F, situazione che, estendendo lievemente la locuzione usata pel caso

(2) Cfr. E. BOMPIANI: *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato.* [Rendiconti Accad. dei Lincei, s. V., vol. III, 1926 (e note)].

(3) Per le proprietà delle superficie (focali) che si ottengono come luogo dei fuochi, e che qui a noi non interessano, cfr. E. BOMPIANI: *Sull'equazione di Laplace.* [Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XXXIV, 1912].

(4) Intendiamo qui naturalmente di riferirci alle tangenti con punti di contatto generalmente distinti, escludendo cioè la congruenza delle tangenti inflessionali.

di V_3 immerse in uno S_4, si può riassumere dicendo che la varietà K^* immagine delle tangenti di una superficie algebrica F, presenta, entro la grassmaniana Q, *singolarità normali.*

2. – È ovvio a questo punto cercare di precisare la precedente ipotesi di *regolarità,* indagando le particolari condizioni cui deve soddisfare la superficie F, perchè il complesso K delle sue tangenti presenti singolarità *superiori* alle normali.

A tale scopo si perviene con i due teoremi seguenti.

Teor. 1. « *Una superficie F, algebrica, dello S_3 può ammettere ∞^2 rette k-tangenti con $k > 2$, solo nel caso che esse si distribuiscano secondo uno o più sistemi ∞^2, formati ciascuno da tutte le rette di un piano tangente stazionario secondo una curva d'ordine k* ».

Per dimostrare il teorema premettiamo qualche osservazione nel caso $k = 2$. Si consideri in tale ipotesi un punto B di H^*, immagine quindi di una retta b, bitangente F in S_3. In esso K^* annette due S_3 tangenti, α^* e β^*, passanti per il piano π^* tangente ad H^* in B. Gli S_3 α^* e β^* tagliano Q in due coni quadrici Γ_α e Γ_β, le cui generatrici sono in corrispondenza birazionale con le tangenti di K infinitamente vicine ed incidenti b. Inoltre il piano π^* taglia Q in due rette p^* e q^* che appartengono sia a Γ_α che a Γ_β, e rappresentano, nella corrispondenza suddetta, due rette p e q bitangenti F, prossime ed incidenti b.

Si può quindi dire, osservando che un piano generico per B dello S_4 tangente Q in B, taglia Γ_α e Γ_β, ciascuno in una retta, che nell'intorno a due dimensioni in K di una bitangente b di F, sono contenute due rigate ρ_α e ρ_β infinitesime, razionali aventi per direttrice b e per generatrici le tangenti di F prossime ed incidenti b. Le due rigate ρ_α e ρ_β hanno come elementi di collegamento due bitangenti di F ([5]).

Si supponga ora che la H^* sia invece immagine di un si-

([5]) Non è qui il caso di dilungarsi su tutto quanto, ben noto, si potrebbe di qui ricavare circa le proprietà focali di una congruenza.

stema ∞^2, irriducibile ([6]), di rette k-tangenti F, con $k > 2$. Allora la superficie H^* diviene ovviamente k-pla per K^*. Nel punto B la K^* avrebbe quindi $k - S_2$ tangenti, ed inoltre il piano π tangente ad H^* in B, dovrebbe tagliare Q in più di due rette (distinte o no), perchè una retta k-tangente di F ha sempre infinitamente vicine più di due rette k-tangenti. Ma allora il piano π giace entro Q, ed attesa la genericità di π, H^* avrebbe tutti i suoi piani tangenti contenuti in Q.

Inoltre, per chiare ragioni di continuità, i piani tangenti dovrebbero appartenere ad uno stesso sistema di piani Q, e quindi essere a due a due incidenti in un punto. Quindi o la superficie H^* appartiene allo S_3 ed è una superficie di Veronese, o appartiene al più ad uno S_4.

La prima ipotesi è da escludersi perchè i piani tangenti ad una superficie di Veronese empiono una varietà cubica e non quadratica ([7]). Resta pertanto la seconda, e l' S_4 che (al più) contiene la superficie H^*, dovendo contenerne i piani tangenti, taglierà la quadrica Q in una quadrica Q'_3 specializzata, perchè tali sono le uniche quadriche di S_4 contenenti piani. Lo S_4 dovrà pertanto essere tangente a Q, e ciò significa che la congruenza H deve certamente appartenere ad un complesso lineare speciale, ossia che le rette di H si appoggiano tutte ad una retta fissa r. Ma allora nei piani per l' asse r del complesso, vi sarebbero infinite rette tritangenti (almeno) F, il che è chiaramente assurdo, a meno che tutte quelle k-tangenti non appartengano ad uno stesso piano, nel quale caso il piano deve naturalmente essere un piano tangente stazionario di F secondo una curva C di contatto almeno d' ordine k ([8]).

C. D. D.

([6]) È ovvio che infatti la congruenza H può spezzarsi in più congruenze irriducibili, e quindi la superficie H^* in più superficie. In tal caso tutto quanto si dice di H od H^* è sempre da intendersi riferito ad una componente ∞^2 irriducibile.

([7]) Del resto, a parte questa osservazione, è noto che la superficie di Veronese è immagine della congruenza del primo ordine e della terza classe (o della duale) che è priva di superficie focale. Cfr. perciò, ad es., G. Fano: [Annali di Mat., II, 21, 1893].

([8]) Naturalmente non vengono prese in considerazione le rette passanti per eventuali punti multipli di E' (tangenti improprie).

3. - Occupiamoci ora di cosa si possa dire qualora la F possieda una rigata di rette k-tangenti con $k > 3$. Nel caso regolare $k = 3$, la curva T^*, come abbiamo già osservato, risulta tripla sia per H^* che per K^*, e quindi in un suo punto P, il cono osculatore ad H^* si spezza in tre piani, tutti contenenti la tangente t^* a T^* in P. Ciascuno di questi tre piani, tangenti ad H^* in P, e quindi a Q taglia Q secondo una coppia di rette, e quindi si hanno in tutto sei rette immagini di sei fasci di rette dello S_3 formati dalla tritangente p di F, con le sei rette tritangenti di F, ed infinitamente vicine, fasci che hanno a due a due i centri nei fuochi di p, e giacciono a due a due nei piani tangenti ad F in quei fuochi.

Dimostriamo ora il teorema:

Teor. 2. « *Una superficie algebrica F dello S_3 può avere ∞^1 k-tangenti con $k > 3$ se e solo se essa ammette ∞^1 piani k-tangenti con i punti di contatto allineati, ed in tal caso quelle ∞^1 rette formano una rigata sviluppabile* ».

Si noti perciò che se la F ammette una retta p k-tangente con $k > 3$ questa si rappresenta in un punto P di T^* che ha per K^* molteplicità k, per H^* molteplicità $\binom{k}{2}$ e per T^* molteplicità $\binom{k}{3}$. I piani che congiungono a due a due le $\binom{k}{3}$ rette tangenti a T^* in P risultano piani tangenti ad H^* in P. Ognuno di essi taglia al solito Q in due rette immagini di due fasci di rette contenenti p ed una retta (ciascuno) bitangente F ed incidente p.

Se ora si suppone che le $\binom{k}{3}$ rette tangenti a T^* in P coincidano, anche quei piani tangenti coincidono tutti fra di loro, e venendo al limite a dover contenere più di due rette di Q, il piano limite giace in Q, e quindi giace in Q l'unica tangente a T^* in P.

Se finalmente si suppone che T^* sia addirittura una curva più che tripla per K^*, essa sarà tale che per ogni suo punto varranno le considerazioni precedenti fatte per P, cioè tutte le tangenti di T^* dovranno essere contenute da Q.

Ma allora presi due punti prossimi di T^* essi appartengono ad una retta di Q, cioè le loro immagini in S_3, che sono due k-tangenti prossime, sono incidenti appartenendo ad un fascio.

Quindi la rigata T è sviluppabile, e se si prende il piano tangente a T lungo una sua retta esso risulta tangente ad F nei punti di contatto di quella retta con F, cioè k-tangente ad F.

C. D. D.

Si noti che il tipo di superficie F cui siamo giunti, con ∞^1 k — tangenti e $k > 3$ esiste effettivamente, come si vede, nel modo più semplice, pensando che il tipo duale è dato da una superficie con curva multipla d'ordine k, la sviluppabile delle k-tangenti diventando dualmente la sviluppabile delle tangenti di tale curva.

4. - Raccogliendo i risultati ottenuti possiamo concludere che una superficie F algebrica dello S_3 ha un complesso di tangenti dotato di singolarità normali esclusi i casi che essa ammetta piani tangenti stazionari secondo curve di contatto d'ordine maggiore di due, ovvero ammetta una sviluppabile di piani più che tangenti. Ossia riferendosi a K^* si ha l'enunciato definitivo:

« *La varietà K^* di Q, immagine delle tangenti di una superficie F algebrica dello S_3, ammette soltanto singolarità di molteplicità normale, a meno che essa non contenga piani multipli o curve multiple con tangenti contenute in Q* ».

5. - Prendiamo ora in studio una varietà a tre dimensioni, algebrica, irriducibile e contenente un sistema ∞^2 di rette che indicheremo con R_3. La R_3 sarà normale in uno certo spazio S_r, ma è lecito pensarla immersa, tramite opportune proiezioni, in uno S_4.

Vale in tali condizioni il teorema:

Teor. 3. *Una R_3 d'ordine n dello S_4, ammette necessariamente $(n-3)$ punti doppi su ciascuna generatrice g.*

La proprietà, notissima per una superficie rigata dello S_3, può dimostrarsi mediante queste osservazioni. Si prenda una generatrice generica g della R_3. La retta g è asse di un sistema ∞^2 di piani, e sia π uno di essi, seganti la R_3 secondo una curva spezzata in g ed una curva residua C_1 d'ordine $(n-1)$. La C_1 taglia g in $(n-1)$ — punti che per la curva totale $g+C_1$ sono punti doppi. Questi $(n-1)$ punti doppi possono provenire o dai punti di contatto di π con R_3, o da eventuali punti doppi di R_3 stessa.

Ma considerando anche la totalità delle rette g di R_3, si trova un sistema di ∞^4 piani nelle condizioni di π. Ora un sistema di tale dimensione può essere formato da piani al più bitangenti la R_3.

Si supponga infatti che essi siano k-tangenti con $k>2$. Scelto un punto qualsiasi O dello S_4, per esso passerebbero ∞^2 piani k-tangenti la R_3. Si proietti allora la R_3 da O su uno S_3 ω opposto di O.

La R_3 viene così a rappresentarsi sullo S_3 ω contatto n volte, con una certa superficie di diramazione ρ, la quale ammetterebbe ∞^2 rette k-tangenti.

Ma, pel teor. 1, ciò è possibile solo se tutte quelle k-tangenti giacciono in un piano τ. Ma se così fosse, poichè il piano τ proviene per proiezione da uno S_3 passante per O, tutti gli ∞^2 piani k-tangenti R_3 e passanti per O giacerebbero in uno S_3 α. Lo S_3 α, d'altra parte, sega R_3 secondo una superficie la quale ammetterebbe quindi ∞^2 piani k-tangenti, cosa notoriamente assurda, a meno che la superficie non sia un piano, e quindi, attesa la genericità di O in S_4, la R_3 sarebbe uno S_3, che noi non considereremo come una effettiva varietà rigata.

Pertanto solo due di quegli $(n-1)$ punti possono essere punti di contatto di π con R_3, e non resta perciò altro da supporre che i rimanenti $(n-3)$ siano punti doppi per la R_3.

C. D. D.

Notiamo che i due punti di contatto di π con R_3 non possono aumentare di molteplicità, cioè essere più che doppi per la curva $g+C_1$, eccetto per un insieme di dimensione inferiore.

Infatti ciò potrebbe succedere solo per piani tangenti la R_3 in punti della sua varietà multipla. Gli altri $(n-3)$ punti potrebbero anche ridursi a un gruppo, equivalente per l'ordine totale di molteplicità, costituito da punti più che doppi qualora la R_3 presenti una varietà più che doppia.

6. – Faremo ora vedere che i piani π passanti per una generatrice g, non solo, come si è visto, non possono essere più che bitangenti ad R_3, ma che sono effettivamente tutti bitangenti di R_3. Vale cioè il teorema:

TEOR. 4. *Ogni piano passante per una generatrice g di R_3 la tocca in due punti di g, talchè esiste una proiettività fra gli ∞^2 piani per g e la g_2^2 delle coppie di punti di g.*

Infatti un piano π per g sega R_3 in una curva spezzata. Questa curva spezzata, per un noto principio di ENRIQUES, deve acquistare almeno un punto doppio di collegamento fra le due componenti, ed il piano π risulta quindi tangente ad R_3 in quel punto. Ma questi piani tangenti risultano anzi bitangenti, perchè preso uno S_3 tangente ad R_3 in un punto P di g, questo taglia R_3 in una superficie che ha in P un punto doppio, e gli ∞^1 piani tangenti a quella superficie nei punti S della retta g (che appartiene alla superficie) la tagliano in una curva che ha due punti di collegamento in P ed S, cosicchè quei piani risultano doppiamente tangenti ad R_3.

Quindi preso un piano generico π per g, esso tocca R_3 in due punti di g, e viceversa presa una coppia di punti P ed S qualsiasi, si consideri il piano che tocca in P la superficie segata su R_3 dallo S_3 tangente in S; questo piano risulta unicamente individuato anche se si scambia l'ufficio di P ed S, ed è il piano bitangente di R associato alla coppia P ed S. Ne scende che fra le coppie della g_2^2 di g ed i piani π sussiste una corrispondenza biunivoca senza eccezioni, cioè una omografia.

C. D. D.

7. – Restano così dimostrate le proprietà generali che abbiamo dovuto premettere per aprire la strada alla nostra ricerca.

D'ora in poi il simbolo R_3 indicherà *una varietà pluririgata*, cioè una varietà rigata a tre dimensioni, ma tale che per un suo punto qualsiasi (nel senso della geometria birazionale) passino μ rette della varietà, con $\mu > 1$.

Indichiamo con Σ il sistema, doppiamente infinito, delle rette g contenute in R_3, sistema che ovviamente, potrà anche essere riducibile senza che lo sia la R_3 come insieme di punti.

Presa una retta g di Σ, ad essa se ne appoggiano, nelle nostre ipotesi, altre ∞^1 che formano una rigata avente g per direttrice rettilinea $(\mu - 1)$-pla, che indicheremo con $\sigma(g)$.

Le generatrici di $\sigma(g)$ individuano con g ∞^1 piani, che nella loro totalità rispetto le rette g di Σ, formano un sistema ∞^3 di piani, immerso nel sistema ∞^4 dei piani bitangenti R_3, seganti la R_3 secondo curve spezzate due volte.

Poichè, in corrispondenza a quei piani, la curva sezione con R_3 si è ulteriormente spezzata, essa deve avere acquistato almeno un punto doppio, cioè quegli ∞^3 piani sono almeno tritangenti la R_3. Sussiste ora il teorema:

Teor. 5. - *I piani delle coppie rette incidenti del sistema Σ di una R_3 plurigata non possono essere più che tritangenti.*

Ciò potrebbe farsi conseguire dal teor. 2, ma scende anche da immediate osservazioni. Infatti il punto comune alla coppia di rette incidenti deve generalmente essere un effettivo punto di tangenza, altrimenti, se fosse un punto multiplo di R_3, la varietà di questi punti multipli invaderebbe tutta R_3, poichè quelle coppie di rette sono ∞^3, e per un punto passa solo un numero finito, di quelle coppie aventi ivi la loro intersezione. Inoltre su ognuna di quelle rette devono esservi, pel Teor. 3, $n-3$ punti doppi di R_3, quindi la C^{n-2} residua segata dal piano delle due rette sulla R_3, deve incontrare ciascuna rette in $n-2$ punti, uno solo dei quali può essere ancora punto di tangenza del piano. Pertanto questi piani hanno generalmente un punto di tangenza nella intersezione delle due rette, ed un altro su ciascuna retta, cioè sono piani tritangenti di R_3.

C. D. D.

8. - Al variare di g in Σ, gli $n-3$ punti doppi di R_3, siano $D_1, D_2, \ldots, D_{n-3}$, contenuti da g variano su R_3 descrivendo una varietà Δ.

Sussiste il teorema:

Teor. 6. *La varietà* Δ, *doppia di* R_3, *è necessariamente una superficie.*

Poichè Δ non è certamente un gruppo di punti, basterà escludere che essa possa essere una curva.

Supponiamo, per assurdo, che ciò sia. Allora gli ∞^3 piani tritangenti di R_3, supposto $n > 3$, sarebbero almeno $2(n-3)$ secanti la curva Δ, con $2(n-3) \geq 2$. Ciascuno di essi conterrebbe quindi una o più corde di Δ, e quindi per una corda generica d di Δ passerebbero almeno ∞^1 piani tritangenti R_3.

Scelto allora un punto O su d fuori di Δ, si proietti la R_3 da O su uno S_3 ω opposto. Si trova nello S_3 ω n-plo una superficie di diramazione ρ, che ammetterebbe ∞^1 rette tritangenti passanti pel punto O' in cui la retta d taglia ω. Ma queste ∞^1 tritangenti formerebbero allora un cono i cui piani tangenti sarebbero tritangenti per ρ, i quali dovrebbero quindi provenire da ∞^1 S_3 tritangenti la R_3 e passanti per d. E dato che d è una corda generica di Δ, la R_3 sarebbe tale che ogni suo S_3 tangente sarebbe tritangente, cosa possibile, come si sa, solo se la R_3 è a carattere sviluppabile, cioè se esiste per ogni retta g uno S_3 che la tocca lungo tutta quella retta. Ma ciò è assurdo per la nostra R_3. Infatti per ogni suo punto passano più rette, e quindi in ogni suo punto vi sarebbero più S_3 tangenti ivi.

Si conclude da ciò che la varietà doppia Δ è una superficie, e poichè i piani tritangenti di R_3 la incontrano almeno in $2(n-3)$ punti, la superficie Δ ha certamente ordine maggiore od eguale a $2(n-3)$.

c. d. d.

9. - Raccogliendo quanto esposto fin qui possiamo dire intanto che una R_3 pluririgata di ordine n contiene necessariamente una superficie doppia d'ordine almeno $2(n-3)$.

Vogliamo ora far vedere come questo permetta con qualche ulteriore indagine di esaurire il problema della caratterizzazione delle R_3 per i valori $n = 3, 4, 5, 6$.

Intanto il caso $n = 3$ è senz'altro esaurito pel fatto che la R_3 cubica dello S_4 coincide con la più generale ipersuperficie cubica dello S_4, per cui notoriamente $\mu = 6$.

Il caso $n = 4$ risulta pure immediatamente esaurito dall'osservare che in tal caso la R_3^4 presenta una superficie doppia almeno del secondo ordine, cioè una quadrica doppia. La R_3^4 coincide dunque con la ipersuperficie del quarto ordine a curve sezioni ellittiche normale nello S_5, per cui $\mu = 4$ (⁹), come risulta dal ricordare che la R_3^4 normale è la quartica base di un fascio di quadriche dello S_5 (¹⁰).

Il caso $n = 5$ può ancora semplicemente trattarsi con osservazioni dirette. Infatti in tal caso si ha una R_3^5 con una superficie doppia che può essere almeno del quarto ordine, cioè una Δ_2^4, o d'ordine superiore.

Se Δ è effettivamente una Δ^4, una sezione di R_3^5 con uno S_3 generico è una superficie del quinto ordine a curve sezioni di genere due dotata di quartica doppia. Ora com'è noto in generale per le superficie a curve sezioni iperellettiche (¹¹), e come qui è del resto immediato (¹²), una superficie di questo tipo è o razionale o rigata, la seconda ipotesi è senz'altro da escludersi perchè altrimenti la R_3^5 conterebbe ∞^3 e non ∞^2 rette. E per la prima qualora si considerino i tipi tutti noti di R_3 a superficie-sezioni razionali si vede che fra essi non ve n'è alcuno corrispondente ai nostri requisiti. Si deve concludere che non è possibile che l'ordine di Δ sia 4, e quindi esso dovrà essere almeno eguale a cinque. Ma allora la R_3^5 è a curve sezioni ellittiche (¹³), e questo caso è effettivamente da accettarsi poichè per un punto generico della più generale R_3^5 (normale in S_6) a curve sezioni ellittiche passano $\mu = 3$ rette (¹⁴).

Anzichè con questo ragionamento diretto, si poteva procedere in un altro modo che qui esponiamo perchè ci condurrà

(⁹) Cfr. G. Scorza: *Sulle varietà a curve sezioni ellittiche.* [Annali di Mat., XV, III, pp. 217].

(¹⁰) Cfr. Rosati, *Rappresentazione della quartica etc.*... [Annali di Mat., 1 (3), 1899].

(¹¹) Cfr., ad esempio, F. Enriques: *Le superficie razionali* [Zanichelli 1945. Lib. II, cap. VI, n. 29].

(¹²) Trattato citato sopra, L. II, n. 32.

(¹³) U. Morin: *Le varietà a superficie–sezione razionali* [Annali di Mat., IV, XVIII (1939)].

(¹⁴) G. Scorza: *Sulle varietà a curve sez. ellittiche* [Mem. cit.].

ad un risultato che ci permetterà di risolvere anche il caso $n = 6$, e che sarà più avanti adoperato ancora. Si tratta di rafforzare la disuguaglianza cui soddisfa l'ordine di Δ. Sussiste in proposito il risultato espresso dal teorema:

TEOR. 7. *L'ordine* δ *della superficie* Δ *doppia per la* R_3^n *è, qualora* Δ *esista effettivamente, cioè per* $n > 3$, *maggiore od eguale a* $3(n-3)-1$.

Si consideri perciò una rigata $\sigma(g)$ avente la retta g per direttrice ed uno S_3 α generico per g. Si hanno due casi: o quello S_3 α contiene oltre d una sola generatrice di $\sigma(g)$ o ne contiene più di una. Nel primo caso la $\sigma(g)$ è una rigata razionale; la si seghi con uno $S_3\,\beta$ non passante per g. Si trova in questo, come intersezione, una curva razionale γ. Inoltre β taglia g in un punto O. Per il punto O passa allora almeno una corda di γ, che taglierà γ in due punti P e Q per i quali passano allora due generatrici p e q di $\sigma(g)$, che quindi si appoggiano a g. Pertanto si trova così un piano che contiene tre generatrici p, q e g della R_3 distinte.

Se invece in α cadono almeno due generatrici di $\sigma(g)$ si considerino tutti gli $S_3\,\alpha$ passanti per un piano ω fisso condotto per g. Essi allora segano gruppi di ν generatrici di $\sigma(g)$ contenute, ciascuna insieme a g, in ν piani per g. Si genera così una g^1_ν entro il sistema dei piani per g, che ammetterà degli elementi doppi, i quali saranno piani contenenti tre rette di R_3.

Quindi in ogni caso esistono nel sistema ∞^3 dei piani tritangenti la R_3, dei piani π che segano la R_3 in curve spezzate in tre rette ed una C^{n-3} residua. Pel solito principio di ENRIQUES quei piani risulteranno quadritangenti alla R_3, avendo essi acquistato un punto di contatto nel punto di collegamento che nasce nella intersezione delle due rette di R_3, complanari fra loro e con g.

Per una considerazione ormai usuale, se si ricorda che su ogni retta di R_3 esistono $n-3$ punti di intersezione con la C^{n-3} residua, si ha che sul piano π esistono $3(n-3)+3-4 = 3(n-3)-1$ punti doppi per R_3 Sicchè la superficie Δ deve avere almeno l'ordine $3(n-3)-1$.

C. D. D.

10. – Il risulato del teor. 6 permette allora di esaurire completamente la classificazione delle R_3^n con $n \leq 6$.

Intanto da esso consegue che per $n = 5$, la R_3^5 deve avere una Δ^5 doppia, e quindi essere a curve sezioni ellittiche, come avevano già direttamente dimostrato.

Inoltre per $n = 6$ si deduce che si tratta di una R_3^6 avente una superficie doppia di ordine almeno otto. E quindi di una R_3^6 che ha curve sezioni piane al più di genere due, cioè è a curve sezioni iperellettiche. Ricorrendo quindi anche qui alle classificazioni note delle varietà a curve sezioni iperellettiche (o a quella delle varietà a superficie sezioni razionali) si trova ancora che non esistono fra esse tipi soddisfacenti alle nostre condizioni. Per modo che l'ordine di Δ deve risultare almeno 9, e quindi la R_3^6 risulta ancora una volta a curve sezioni ellittiche. Si noti qui però che non tutte le R_3^6 a curve sezioni ellittiche soddisfano alle nostre esigenze. Infatti dei tre tipi possibili solo due risultano pluririgate, restando escluso il tipo di R_3^6 normale in S_7 con retta doppia, la quale è semplicemente rigata (15).

Ciò era del resto prevedibile con un lieve adattamento del Teor. 6, da cui si può far conseguire che una varietà pluririgata non può avere una curva direttrice.

Raccogliamo i risultati ottenuti nei numeri 9, 10 nel seguente teorema:

TEOR. 8. *Le uniche varietà R_3^n pluririgate con $n < 7$ sono le R_3^n a curve sezioni ellittiche normali in S_{n+1}, esclusa la R_3^6 con retta doppia di S_7.*

11. Tutto quanto segue è ora dedicato a raggiungere il risultato fondamentale che quelli già descritti sono gli unici tipi di R_3 pluririgate, cioè che *non esistono R_3^n pluririgate con $n \geq 7$*, e ad alcune conseguenze dei ragionamenti che esporremo.

Sarà utile nel seguito rappresentare le rette dello S_4 sulla relativa grassmaniana che è una M_6^5 a curve sezioni ellittiche di uno S_9.

(15) G. SCORZA: *Sulle varietà a curve sezioni ellittiche* [Mem. cit.].

Indicheremo le immagini nello S_9 di enti di rette dello S_4 con la stessa lettera sagnata da un asterisco.

Il sistema Σ di rette della R_3 si rappresenta nello S_9 in una superficie Σ^*, eventualmente riducibile, immersa nella M_6. Alle rigate $\sigma(g)$ formate dalle rette di Σ che si appoggiano a g corrispondono sopra Σ^* delle curve σ^*, le quali *appartengono a spazi* S_6, poichè ciascuna di quelle rigate è contenuta in una doppia infinità di complessi lineari (quelli i cui piani assi passano per g). Anzi σ^* giace nella intersezione (sovrabbondante) [16] di quello S_6 con la M_6, che è una V_4^3–cono luogo di ∞^1 S_3, e quegli S_6 sono gli spazi tangenti [17] alla M_6 nei punti di Σ^*, e quindi tangenti anche alla Σ^*.

Si noti che questa condizione *caratterizza* la Σ^* come immagine di Σ, nel senso che, se viceversa si ha una superficie Σ^* della M_6, che sia tagliato in curve dagli S_6 tangenti alla M_6 nei suoi punti, essa è certo immagine del sistema di rette di una varietà pluririgata. Pertanto il nostro problema è equivalente a quello di caratterizzare tali superficie della M_6. Noi generalmente non affronteremo tale problema direttamente, ma ci serviremo tuttavia delle osservazioni di questo numero, più che altro come agevole mezzo di espressione.

Naturalmente enunceremo più avanti la soluzione del problema da questo punto di vista.

12. – Per arrivare a dimostrare che i tipi trovati al n. 10 sono gli unici tipi possibili di varietà pluririgate a tre dimensioni, eseguiremo un'analisi diretta secondo i valori dell'indice del sistema Σ contenuto nella varietà R_3, cioè del numero di rette passanti per un punto della R_3.

Anzitutto una semplice osservazione. Se in S_4 si ha una R_3^n, le rette passanti per un suo punto P e giacenti su essa, giacciono nello S_3 Δ_1 tangente in P ad R_3, nel cono quadrico Δ_2 delle rette uscenti da P e aventi contatto bipunto, etc., sino al cono

(16) A. Comessatti: *Osservazioni sulla geometria della retta nello* S_r, [Atti Ist. Ven., LXXX (1931), pp. 387].

(17) A. Comessatti: *Osservazioni sulla geometria della retta nello* S_r. [Cfr. sopra].

Δ_n delle rette uscenti da P e aventi contatto n - punto con la R_3^n [18]. Così quelle rette sono intersezione parziale delle successive polari del punto P. D'altra parte se si considerano le prime tre polari, cioè lo S_3 tangente, il cono Δ_2 e il cono Λ_3, dato che queste tre ipersuperficie per P, punto semplice della R_3^n, non possono certo avere infinite rette in comune, esse devono avere esattamente sei rette in comune, e quindi quel gruppo di μ rette uscenti da P e giacenti in R_3 o coincide con questo gruppo di sei rette od è in esso parzialmente contenuto, cioè concludendo: *l'indice* μ *del sistema* Σ *di rette appartenente alla* R_3 *non può mai superare il valore sei.*

13. - Si consideri ora uno S_3 generico della S_4. Esso taglia la R_3^n in una superficie F_2^n che non può risultare rigata, perchè il sistema Σ è doppiamente infinito, e che contiene quindi un numero finito ν di rette. Queste ν rette formano entro lo S_3 una configurazione che è ovviamente dotata di assoluta simmetria rispetto i suoi elementi, cioè è tale che ogni sua caratteristica rispetto un certo sottogruppo di rette, si ripete identica per ogni sottogruppo nella stessa situazione di quello.

In particolare prese due rette sghembe di Σ, siano r ed r', esse individuano appunto uno S_3, cui apparterranno quindi altre $\nu - 2$ rette di Σ. Poichè d'altra parte le due rigate $\sigma(r)$ e $\sigma(r')$, immerse nel sistema ∞^2 Σ, hanno in comune un gruppo di $\bar{\mu}$ rette (eventualmente vuoto), si ha che alle rette r, r' incidono $\bar{\mu}$ rette di Σ, e per l'osservazione precedente succederà allora, che presa una qualsiasi coppia di rette sghembe fra loro entro quelle ν segate dallo S_3, ad esse si appoggeranno sempre $\bar{\mu}$ rette. Il numero $\bar{\mu}$ di rette che si presenta come grado del sistema algebrico di rigate σ, coincide anche con l'indice del sistema (supposto irriducibile) ∞^2 delle rigate σ, poichè se a due rette generiche (e quindi sghembe) di Σ si appoggiano $\bar{\mu}$ rette, vi sono appunto $\bar{\mu}$ rigate contenenti due rette, precisamente quelle che hanno le $\bar{\mu}$ rette come direttrici.

(18) E. Bertini: *Geometria proiettiva degli iperspazi*, pg. 233.

Ciò significa nello S_3 che le curve σ^* formano su Σ^* un sistema algebrico di curve di grado ed indice $\bar{\mu}$.

14. – Ammetteremo, sino ad avviso contrario, che il sistema Σ sia irriducibile. Dimostriamo allora il teorema:

TEOR. 9. – *Se gli ∞^2 piani contenenti le coppie di rette incidenti di Σ contengono un'altra retta di Σ, la R_3 è necessariamente l'ipersuperficie cubica.*

Infatti quei piani sono generalmente, come abbiamo dimostrato, piani tritangenti della R_3^n. Se però la curva residua C^{n-2} si spezza ulteriormente in una retta ed una parte residua, essi divengono piani quadritangenti perchè la curva sezione totale dovrebbe acquistare un nuovo punto di collegamento. Ma ciò è assurdo pel teor. 5, e quindi la C^{n-2} non può ulteriormente spezzarsi. Resta quindi soltanto da supporre che essa sia una retta, cioè appunto $n = 3$.

C. D. D.

Da ciò si può far conseguire l'altro teorema:

TEOR. 10. – *L'indice $\bar{\mu}$ del sistema di rigate $\sigma(g)$ immerso in Σ, non può superare il valore cinque, e anzi tale valore è raggiunto solo per la ipersuperficie cubica.*

Si supponga infatti che a due rette sghembe r ed r' giacenti in uno $S_3\,\alpha$, si appoggino $\bar{\mu} \geq 5$ rette.

Si prenda una retta r'' di Σ incidente ad r, e si faccia tendere r' ad r'', il che è lecito poichè il sistema Σ è stato supposto irriducibile. Le $\bar{\mu}$ rette incidenti ad r ed r' dovranno al limite o passare pel punto P comune ad r, r'' o giacere sul piano rr''. Ma escluso il caso della ipersuperficie cubica sul piano rr'' non possono giacere altre rette, e quindi devono passare tutte per P. Ma per P, per l'osservazione del n. 12, non possono passare più di sei rette e quindi $\bar{\mu} \leq 4$. Inoltre se $\bar{\mu} = 5$, pel teor. precedente e per la stessa osservazione appena invocata la R_3^n è una ipersuperficie cubica.

C. D. D.

Il risultato ottenuto può essere maggiormente precisato. Si osservi intanto che avendo supposto Σ irriducibile non può essere $\mu = 2$. Infatti allora a due rette sghembe di Σ non inciderebbe nessuna retta di Σ, se no per un punto passerebbero tre rette e non due di Σ, cioè $\bar{\mu} = 0$. Ma ciò è assurdo perche $\bar{\mu}$ è anche l'indice del sistema ∞^2 delle rigate $\sigma(g)$. Sicchè si può senz'altro supporre μ eguale almeno a 3.

Vogliamo allcra dimostrare il teorema:

Teor. 11. - *L'indice $\bar{\mu}$ di rigate $\sigma(g)$ può assumere soltanto i valori due od uno, sempre esclusa la ipersuperficie cubica.*

Dato il risultato del precedente teorema basterà escludere i valori $\bar{\mu} = 3, 4$.

Perciò si riprendano le due rette r ed r' sghembe di Σ, e sia ancora α lo S_3 congiungente. Poichè l'ordine n di R_3 è diverso da tre, si può trovare una retta r'' incidente ad r, e tale che nel piano rr'' non vi siano altre rette di Σ. Si faccia allora tendere r verso r''. Al limite le $\bar{\mu}$ rette incidenti ad r ed r', verranno per le ipotesi fatte a passare tutte pel punto $P \equiv (rr'')$. Quindi intanto $\bar{\mu} = \mu - 2$. Lo $S_3\,\alpha$ al limite diviene lo S_3 contenente le μ rette per P di Σ che è perfettamente individuato perchè come abbiamo osservato μ vale almeno tre, ed è lo $S_3\,\bar{\alpha}$ tangente ad R_3 in P. Inoltre è ovvio che le μ rette passanti per P provengono tutte da uno o più gruppi di μ rette a due a due sghembe di Σ contenute in α. Infatti così è di r ed r''. Ma queste μ rette erano tali che ad ogni coppia di esse ne incidevano $\bar{\mu}$. Talchè occorre ammettere che ad esempio su r sono andate a sovrapporsi due rette di Σ distinte e sghembe in α. In conclusione quindi le μ rette per P provengono da due gruppi di μ rette di Σ contenute in α (19), e tali che un gruppo era

(19) Si osservi che ciò appare giustificato, o per meglio dire, possibile per il fatto che la superficie sezione con $\bar{\alpha}$ ha acquistato in P un punto doppio. È noto che questa proprietà per le rette contenute da una superficie vale per la F_2^3 come ha dimostrato il Klein (Cfr. Math. Ann. VI, pag. 366, e vale, come si può facilmente vedere, per ogni F_2^n a curve sezioni ellittiche.

costituito da μ rette fra loro sghembe, e l'altro era dato da rette pure fra loro sghembe e tale che ad ognuna di esse incideva $\mu - 1$ rette del primo gruppo e per di più le rimanenti $\nu - 2\mu$ rette di α devono essere tutte incidenti ad una almeno delle μ rette. Inoltre i due gruppi sono naturalmente simmetrici. Cosicchè ad es. su r coincidono due rette che sono da pensarsi come sghembe fra loro, e per di più una di esse è incidente alle altre $\mu - 1$ e l'altra sghemba e simmetricamente.

Sia allora r_1 la retta che coincide al limite con r. Poichè la coppia $r r_1$ era una coppia di rette sghembe in α, ad esse dovevano inciderne altre $\bar{\mu}$, e siano $s_1, s_2, \ldots, s_{\bar{\mu}}$. Se allora $\bar{\mu} > 2$, a due di queste ad esempio $s_1\, s_2$ devono inciderne $\bar{\mu}$, e quindi un'altra t oltre r ed r_1. Ma questa t non può incidere una delle altre rette di Σ per P, perchè per la posizione simmetrica di queste, $s_1\, s_2$ dovrebbero allora essere incontrate anche da una retta incidente ciascuna di queste, cioè in tutto da $\mu - 1$ rette. Ma allora ad $s_1\, s_2$, inciderebbero più di $\bar{\mu}$ rette il che è assurdo. Nè può t incidere più di una retta per P, perchè si contraddirebbe al Teor. 9; e d'altra parte essa non può essere sghemba con tutte quelle μ rette per l'osservazione fatta sopra. Si arriva quindi sempre ad un assurdo per $\bar{\mu} > 2$, e pertanto non resta che supporre $\bar{\mu} \leq 2$.

C. D. D.

15. - Accingiamoci ora, con i risultati ottenuti, ad esaurire il nostro problema *nel caso che Σ sia un sistema irriducibile.*

Vi sono da discutere solo due casi. Parliamo qui del primo. Si ha una R_3 tale che per un suo punto generico passano quattro rette ed inoltre a due di esse incidono sempre altre due.

Si fissi una generatrice $\bar{g}$, generica fra quelle di Σ, e si consideri la rigata $\sigma(\bar{g})$ delle rette di Σ che la incidono. Essa ammette la retta $\bar{g}$ come direttrice tripla. Un qualsiasi S_3 per g la taglierà, oltre che in $\bar{g}$, in altre m generatrici, sicchè il suo ordine sarà $m + 3$. Si supponga di prendere, in particolare, uno S_3 tangente ad R_3 in un punto P di $\bar{g}$. Allora quello S_3 contiene intanto certamente le altre tre generatrici di Σ uscenti da P, ed in più potrà contenerne altre incidenti $\bar{g}$. Si vede però subito che non potrà contenerne più di altre due. Infatti se si tengono presenti le osservazioni del numero precedente, nella configurazione di rette che quello S_3 taglia su Σ, la $\bar{g}$ è da pensarsi come limite di due rette sghembe fra loro, cui non potevano incidere più di due rette poichè nel nostro caso $\bar{\mu} = 2$, e che quindi anche al limite non potranno essere più di due, ed anzi saranno effettivamente due.

Si conclude che $\sigma(\bar{g})$ è una rigata dell'ottavo ordine, che sarà rappresentata sulla superficie Σ^* ancora da una curva dell'ottavo ordine σ^*, contenuta in uno S_6.

Si osservi ancora che, rispetto una certa, ma generica, $\sigma(\bar{g})$ il sistema di rette Σ può pensarsi in corrispondenza biunivoca (algebrica) con le coppie di generatrici della $\sigma(\bar{g})$.

Infatti presa una coppia g' e g'' di generatrici di $\sigma(\bar{g})$, ad esse si devono appoggiare due rette di Σ, e quindi dato che fra queste c'è la retta fissa $\bar{g}$, un'altra sola di variabile. Viceversa presa una retta g di Σ essa individua, insieme a $\bar{g}$, una coppia di rette di Σ, cui dovranno incidere altre due sempre di Σ, che per incidere $\bar{g}$ apparterranno a $\sigma(\bar{g})$.

Pertanto la superficie Σ^* dello S_3 può pensarsi come un modello delle coppie di punti di una curva di genere π eguale a quello della rigata $\sigma(\bar{g})$. Inoltre mettiamo in evidenza che la Σ^* contiene un sistema ∞^2 continuo di curve σ^* d'ordine otto e di genere π, sistema che risulta di grado due e di indice due.

La serie caratteristica di tale sistema continuo è una g_2^1, e perciò si hanno due possibilità sole, o il sistema è completo, o no, dovendo in tal caso quelle curve σ^* essere tutte razionali.

Nel primo caso la Σ^* è una superficie irregolare d'irregolarità $q = 2$ ([20]), e nel secondo caso sarebbe una superficie razionale, perchè conterrebbe almeno un fascio lineare di curve razionali ([21]) (quello che si ottiene in corrispondenza alle curve σ^* immagini di coppie di elementi di cui uno sia fisso).

In questa ultima ipotesi il sistema continuo σ^* sarebbe con-

([20]) F. Enriques: *Le superficie algebriche* [Zanichelli, pp. 225 e sg.].
([21]) Ciò scende dal teorema di Noether. Cfr. ad es. F. Enriques: *Le superficie razionali* [Zanichelli, 1945, pp. 241 e sg.].

tenuto in un sistema lineare completo almeno ∞^3 (22). Quindi vi sarebbe sulla R_3 un sistema lineare ∞^3 di rigate razionali, il che è assurdo. Infatti se si considera la rete di quelle che dovrebbero passare per un certo punto P di R_3, quella rete dovrebbe avere una curva base contenente almeno le quattro rette di Σ per P. Ma allora le rigate di quella rete dovrebbero contenere addirittura una $\sigma(g)$, e ciò non è possibile.

Pertanto il sistema delle σ^* dev'essere completo, e resta possibile solo la prima ipotesi. È ora noto (23) che i generi della superficie immagine delle coppie di punti di una curva di genere π sono:

$$p_g = \frac{\pi(\pi-1)}{2}, \qquad p_a = \frac{\pi(\pi-3)}{2}.$$

E dovendo essere: $q = p_g - p_a = 2$, si ha successivamente: $\pi = 2$, e quindi $p_g = 1$, $p_a = -1$, che è un ben noto caso di superficie iperellittica.

Si fissi allora una curva γ di genere due contenuta in uno S_3. Il sistema Σ deve mediante una trasformazione birazionale T rappresentarsi sul sistema delle corde di γ. Il sistema delle ∞^2 rigate $\sigma(g)$ si trasformerà quindi in un sistema di rigata di corde di γ con le stesse caratteristiche algebriche.

Ora se si considerano le rigate delle corde di γ che si appoggiano ad una qualsiasi di esse, esse formano appunto un sistema ∞^2 di rigate di genere due, d'indice due e grado due, e questo è l'unico sistema che può esservi con tali caratteristiche se la superficie (di Iacobi) Σ^* risulta a moduli generali (24), ossia se lo è la curva γ. Se invece la γ non fosse a moduli generali, e quindi la superficie Σ^* risultasse singolare, si avrebbero su Σ^*

(22) Si ricordi che su una superficie regolare ogni sistema continuo è totalmente contenuto in un sistema lineare; cf. ad es. O. Zariski: *Algebraic Surfaces* [Springer, Berlin, 1935, pag. 82, n. 3].

(23) F. Severi: *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.* [Atti Accademia di Torino, 25 gennaio 1903].

(24) F. Severi: *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.* [Atti Accad. di Torino, 25 gennaio 1903].

una infinità di sistemi di quel tipo fra loro birazionalmente equivalenti ([25]), e pertanto è sempre lecito pensare che la trasformazione T sia addirittura l'opportuno prodotto che trasforma le $\sigma(g)$ nel sistema delle rigate costituite dalle corde incidenti una corda di γ.

Pertanto se è possibile che esista una trasformazione T birazionale fra il sistema Σ e quello delle corde di γ, si può supporre che in essa alle rigate $\sigma(g)$ debbano corrispondere le rigate che hanno per direttrici le corde di γ. Ma allora in T a rette di Σ incidenti corrispondono corde pure incidenti di γ. E siccome per un punto P della R_3 in discorso passano quattro rette di Σ, a queste quattro rette devono corrispondere nello S_3 di γ, quattro corde di γ a due a due incidenti, e che quindi dovranno essere complanari o passare ancora per un punto. Escluso ovviamente il primo caso resta solo il secondo. Cioè per un punto dello S_3 devono passare quattro corde di γ. Ma γ deve allora essere una quintica normale in S_3, intersezione parziale di una quadrica e di una superficie cubica.

Ma in tal caso la T si estende ad una trasformazione T' puntuale fra la R_3 e lo S_3, quando si associano due punti P e P' rispettivamente della R_3 o dello S_3, per i quali passano due quaderne di rette associate in T. Quindi la R_3 risulta *razionale*.

Essa potrà quindi rappresentarsi nello S_3 con un sistema lineare di superficie F^m, di ordine m, che poichè i punti di γ risultano fondamentali nella trasformazione T', dovranno passare per γ. Anzi poichè le corde di γ devono rappresentare rette della R_3, la γ dovrà essere di molteplicità $\frac{m-1}{2}$ per la F^m. Ossia ponendo $m = 2s + 1$, si avrà un sistema lineare di F^{2s+1} con γ s-pla. Ora poichè, come osservato, la curva γ giace su una quadrica, si avrà che questo deve tagliare la F^{2s+1} generica in una curva d'ordine $2(2s+1)$ e quindi deve essere

([25]) Cfr. A. COMESSATTI: *Sulle superficie di* J a c o b i *semplicemente singolari.* [Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, Serie 3ª, Tomo XXI, pag. 12]. Si noti che qui non è possibile l'esistenza di due schiere birazionalmente distinte perchè le coppie di punti sono estratte da una stessa curva.

$2(2s+1) \geq 5s$, cioè: $s \leq 2$ (26). Quindi non resta altro da supporre che quelle F siano superficie cubiche passanti semplicemente per una quintica di genere due. Ma questo è il ben noto (27) sistema lineare rappresentativo di una R_3^4 a curve sezioni ellittiche. Pertanto l'unico caso possibile per $\bar{\mu} = 2$, $\mu = 4$ è questo, che è appunto uno dei tipi che abbiamo già incontrato.

16. - Vediamo infine, sempre nella ipotesi che il sistema Σ sia irriducibile, il caso $\mu = 3$, $\mu = 1$. In questo caso il sistema ∞^2 di rigate $\sigma(g)$ forma entro Σ una rete omaloidica, e quindi ogni rigata $\sigma(g)$ è razionale. È anche qui facile come nel numero precedente determinare l'ordine della $\sigma(g)$. Infatti un generico S_3 passante per g sega $\sigma(g)$ in tre generatrici oltre la retta g che è direttrice doppia. Per veder questo si prenda uno S_3 particolare, e precisamente tangente alla R_3 in un punto P di g. Esso sega sulla R_3 una superficie che ha in P un punto doppio, e per cui, con una considerazione più volte ripetuta la retta g deve considerarsi come limite entro Σ di due rette sghembe di Σ, cui doveva incidere una ed una sola retta di Σ. Pertanto a g oltre le due rette uscenti da P non può incidere in quello S_3 che una sola altra retta di $\sigma(g)$ e quindi $\sigma(g)$ ha ordine cinque.

Pertanto il sistema Σ, o se si vuole la superficie sua immagine Σ^*, risulta razionale e riferibile ad un piano in modo che quella rete omaloidica di rigate $\sigma(g)$ si trasformi nella rete delle rette del piano. Il sistema lineare rappresentativo sarà costituito, dovendo le rette del piano rappresentare quintiche, da un sistema di curve piane del quinto ordine, sistema che riuscirà privo o no di punti base. In ogni caso si può dire che l'ordine della superficie rappresentata sarà $n \leq 25$. D'altra parte poichè uno S_3 non può contenere meno di sei rette (dato che a due di sghembe deve inciderne una) sarà se con x s'indica l'ordine della R_3:

(26) Il caso di superficie del quinto ordine con quintica doppia è da scartarsi, perchè conduce a superficie ellittiche che possono avere una quintica doppia di genere zero e non due. Cfr. F. Enriques: *Le superficie razionali* [Zanichelli, 1945, pag. 474].

(27) G. Scorza: *Le varietà a curve sezioni ellittiche* [Mem. cit.].

$$3x+6\leq 25,$$

da cui scende $x \leq 6$; quindi anche questo tipo di R_3 è fra quelli che abbiamo già esaminato ed anzi si può ormai precisare che si deve trattare della R_3^5 a curve sezioni ellittiche. Resta quindi precisato che quel sistema di quintiche non può avere punti base, e che la superficie Σ^* è effettivamente una superficie razionale d'ordine 25.

È anche facile ormai dire il genere delle curve sezioni iperpiane di Σ^*. Esso può determinarsi ad esempio osservando che vi sono certo delle sezioni con S_4 della R_3^5, pensata in S_6, completamente spezzate in rette. Per calcolare allora il genere della rigata somma, che eguaglia il genere di una sezione iperpiana di Σ^*, basta applicare la formula di NOETHER, e si trova tenendo conto che due qualsiasi di quelle rigate hanno in comune una retta, $p = = 0\binom{5}{2} + \binom{5}{2} - 4 = 6$ [28], cioè appunto il genere massimo di una quintica, cosicchè quelle quintiche piane che rappresentano sul piano la Σ^* risultano prive di punti doppi.

Ora un C^{25} di genere sei è normale in uno S_{19}, e pertanto *la* Σ^* *è una superficie razionale d'ordine* 25 *a curve sezioni di genere sei, normale in uno* S_{20} [29].

17. – Resta così esaurita la nostra ricerca nel caso che la R_3 contenga un sistema irriducibile di rette Σ. Passiamo a con-

(28) Si poteva anche osservare che sulla rigata di rette (di ordine 25) formata dalle rette di Σ che incidono un piano (e ciò è lecito perchè essendo questa rigata generalmente priva di generatrici doppie il genere non varia pur usando un complesso particolare) gli spazi S_3 passanti per questo piano segnano una g_{10}^1. In questa serie lineare, per una facile estensione di un risultato di KLEIN [Math. Ann. VI, pag. 366] si hanno elementi multipli solo quando uno S_3 diviene tangente alla R_3, ed allora ciascuna retta uscente dal punto di contatto conta per due, cioè si hanno tre diversi elementi doppi. E poichè in un fascio vi sono 10 spazi S_3 tangenti la R_3^5, nella g_{10}^1 si avranno in tutto 30 elementi doppi, ossia $2(10+p-1)=30$, e quindi $p=6$.

(29) Quest'ultima proprietà è abbastanza naturale essendo appunto uno S_{20} lo spazio di appartenenza della grassmaniana delle rette dello S_6.

siderare il caso che *il sistema* Σ *sia formato da più sistemi irriducibili* Σ_i.

Intanto ciascuno di questi sistemi deve essere *d'indice uno,* cioè per un punto della R_3 non può passare più di una retta di ciascun Σ_i. Infatti quanto è stato detto nei numeri precedenti circa il caso che il sistema Σ fosse irriducibile, può egualmente essere detto per una componente irriducibile Σ_i di Σ, e si è visto d'altra parte che in ogni caso il sistema esauriva l'insieme Σ delle rette della R_3, sicchè è assurdo l'ammettere che vi possano essere altre componenti oltre quella.

Ne segue che dobbiamo occuparci soltanto del caso, fin'ora completamente trascurato, che ciascun Σ_i sia appunto d'indice $\mu_i = 1$. Si ammetta dapprima che i sistemi Σ_i siano solo due: Σ_1 e Σ_2.

Si consideri in tale ipotesi una retta g_1 del sistema Σ_1. Ad essa si appoggiano ∞^1 rette del sistema Σ_2, formanti una rigata $\sigma(g_1)$, avente g_1 come direttrice semplice. Uno S_3 generico per g_1 taglia $\sigma(g_1)$ in m rette di Σ_2, e quindi contiene anche m rette di Σ_1, data l'assoluta simmetria dei due sistemi. Inoltre a g_1 si appoggeranno certe l rette fra le m di Σ_2 contenute nello S_3, e quindi ad ogni retta di un sistema Σ_i entro quello S_3, se ne dovranno appoggiare altre l dell'altro sistema, il che implica che sia: $\binom{m}{l} = m$, cioè: $(m-1)\;(m-2 \ldots\ldots (m-l+1) = = l\,(l-1, \ldots.\; 3 \cdot 2 \cdot 1$, e quindi: $m = l+1$; ma ciò se $l > 2$, implica che a due rette ad es. di Σ_1, se ne appoggino almeno due di Σ_2.

Da ciò consegue che il sistema ∞^2 di rigate razionali $\sigma(g_1)$, in quanto dotate di una direttrice semplice, sarebbe un sistema algebrico non lineare entro il sistema ∞^2 razionale Σ_2, e quindi sarebbe contenuto in un sistema lineare almeno ∞^3. Si può allora ripetere un ragionamento del numero precedente che conduce all'assurdo. Da cui necessariamente $l = 2$, e perciò $m = 3$; quindi a g_1 si possono poggiare solo due rette di Σ_2 entro quello S_3 per g_2, cosicchè quelle rigate devono essere in ogni caso del terzo ordine.

Con una analoga discussione si vede che, se invece i sistemi

Σ^i sono tre, uno S_3 non può contenere più di due rette di ciascuno Σ_i, in modo che ad ognuna se ne appoggino due, una per ciascuno degli altri due sistemi, e quindi si può ancora dire che quelle rigate sono cubiche.

Ed ancora in modo analogo si giunge a scartare il caso che vi siano quattro o più sistemi d'indice uno, perchè allora ad una retta di un sistema non potrebbe incidere alcuna retta di un altro, e quindi l'assurdo. Pertanto si può concludere che *gli unici casi in cui il sistema Σ di una plurigata R_3 può spezzarsi è quando esso sia formato da due o tre sistemi d'indice uno.* Inoltre in tali casi le rigate $\sigma(g_i)$ sono sempre rigate cubiche.

18. – È ora possibile caratterizzare completamente la superficie spezzata Σ^*. Ciascuna sua componente Σ_i^* infatti contiene una rete omaloidica di curve del terzo ordine razionali, quindi è razionale e si può rappresentare su un piano mediante un sistema lineare di cubiche, in modo che quella rete di C^3 razionali si trasformi nella rete delle rette del piano. Le Σ_i^* avrà quindi al più ordine nove, qualora quel sistema non possieda punti base. Inoltre quelle cubiche saranno razionali od ellittiche e poichè in tal caso esiste una corrispondenza biunivoca (stabilita da un qualsiasi sistema Σ_i) fra la curva sezione piana della R_3 e la curva sezione iperpiana di una Σ_i^* in S_9, si ha che anche la R_3 deve risultare a curve sezioni razionali od ellittiche, e quindi si rientra in definitiva in uno dei tipi già trovati, che anzi in tal caso non può essere altro che o la R_3^6 di S_7, rappresentata su uno S_3 del sistema lineare di superficie cubiche per una cubica gobba con un punto doppio in un punto di questa (caso di due sistemi Σ_1, Σ_2), o la R_3^6 rappresentata dalle superficie cubiche passanti per tre rette a due a due sghembe (caso di tre sistemi Σ_1, Σ_2, Σ_3). Resta quindi anche immediatamente precisato che la Σ^* nello S_9 si compone o di due F_2^9 a curve sezioni ellittiche, o di tre F_2^8 pure a curve sezioni ellittiche.

19. – Tutto quanto precede può finalmente riassumersi nell'enunciato del teorema:

Teor. 12: «*Le uniche varietà pluririgate a tre dimensioni sono le varietà a curve sezioni ellittiche d'ordine minore di sette, esclusa la R_3^6 di S_7 con retta doppia*».

In riferimento alla posizione del problema fatta nel n. 11, cioè alla classificazione delle superficie contenute nella grassmaniana M_6^5 dello S_9, che siano tagliate seconde curve dagli S_6 tangenti alla M_6^5 nei loro punti, si può ora enunciare la seguente classificazione, che contiene tutti i tipi possibili e completa in qualche carattere i dati già trovati.

a) *Superficie irriducibili.*

1. La F_2^{45} di Fano, immagine del sistema Σ di rette coi caratteri (6, 27) di una R_3^3. La superficie è normale nello S_9, ed ha $p_g = 10$ e $p_a = 5$ ed il genere delle sezioni iperpiane è $p = 45$ (30).

2. Una F_2^{32}, immagine del sistema Σ di rette coi caratteri (4, 16) di una R_3^4 di S_5. La superficie è normale in uno S_{14}, ed ha i generi $p_g = 1$, $p_a = -1$ ed il genere delle sezioni iperpiane è $p = 17$ (31).

3. Una F_2^{25} razionale, normale nello S_{20}, immagine del sistema Σ contenuto nella R_3^5 di S_6 di caratteri (3, 10), a curve sezioni di genere $p = 6$.

(30) G. Fano: *Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni* [Atti della Accademia di Torino, XXXIX (1904), pp. 778 - 692].

(31) Per determinare tale valore si può ancora (come già fatto per la R_3^5) procedere con la formula di Noether per il genere di una curva spezzata, considerando una sezione con un S_3 della R_3^4 in S_5 spezzata in quattro rette. Tenendo conto che due rigate $\sigma(g)$ hanno sempre due rette in comune e che ognuna ha genere due, si trova: $p = 4 \times 2 + \binom{4}{2} \times 2 - 3 = 17$, o anche qui, come in nota al n.° 16, si può considerare la g_{16}^1 segata su Σ dagli S_2 per un piano; tenendo conto che la classe della R_3^4 è 16, si ha: $2(16 + p - 1) = 4 \cdot 16$, $p = 17$.

In quanto al fatto che la F_2^{32} è normalmente in uno S_{14}, si osservi che infatti su una sezione iperpiana gli S_{12} segano una g_{32}^{13}, che ha appunto deficienza due, eguale alla irregolarità della superficie.

b) *Superficie riducibili.*

1. Una F_2^{18} spezzata in due F^9 a curve sezioni ellittiche, immagini dei due sistemi di rette di caratteri ciascuno (1, 2) appartenente alla R_2^6 di S_7 immagine del sistema di superficie cubiche passanti per una cubica gobba e aventi in un punto di questa un punto doppio.

2. Una F_2^{24} spezzata in tre F_8 a curve sezioni ellittiche, immagini dei tre sistemi di rette di caratteri ciascuno (1, 2) appartenenti alla R_3^6 di S_7, immagine del sistema di superficie cubiche passanti per tre rette a due a due sghembe [32].

È da notarsi che delle tre superficie irriducibili trovate due sono irregolari e che tutte quante sono normali negli spazi di appartenenza della grassmaniana relativa alle rette dello spazio in cui la R_3 è normale.

20. – Al n. 3 si è visto che se la R_3^n, pluririgata, è immersa in uno S_4, essa ha necessariamente una superficie doppia di un certo ordine di cui le generatrici di Σ devono essere $2(n-3)$ secanti. È naturale che se si fosse allora potuto escludere che le rette di Σ fossero quadrisecanti o più per la superficie doppia Δ, tutta la ricerca sarebbe stata alquanto semplificata. Senonchè questa proprietà non si è dimostrata facile da vedersi direttamente, e si è dovuto ricorrere ad una analisi diretta più minuta. Credo tuttavia che ora valga la pena di raccogliere in

(32) Non è qui il caso di soffermarsi nella facile caratterizzazione proiettiva di queste superficie. Essa può ottenersi interpretando ad esempio le costruzioni proiettive assegnate dallo Scorza per le due R_3^6. Così ad esempio, volendo caratterizzare due F_2^9 immagini dei due sistemi di una R_3^6 del primo tipo, ci si riferisca alla R_3^6 normale, si prenda la grassmaniana V_{12} delle rette dello S (contenuta in uno S_{27}) e si considerino su essa tre cubiche razionali normali aventi a due a due un punto comune. Esse individuano allora tre H_6^5, grassmaniane delle rette di uno S_4; si riferiscano proiettivamente reti di grassmaniane dell'indice superiore che contengono quella H_6^5. Gli ∞^2 punti che così si ottengono danno una F_2^9, l'altra congiunta, è simmetricamente caratterizzata. Cfr. G. Scorza, Memoria citata, pag. 19.

modo esplicito tale risultato che scende da tutto quanto si è detto sin qui.

TEOR. 13. « *Le varietà W delle k-secanti con $k > 3$ di una superficie algebrica F dello S_4 non può possedere la F stessa come superficie doppia (o più), qualora W sia pluririgata* ».

E ancora:

TEOR. 14. « *Le uniche superficie dello S_4 ammettenti un sistema ∞^2 di k-secanti tali che per un punto dello S_4 ne passino o zero o più di una, sono quelle contenute nelle R_3^n a curve sezioni ellittiche con $n < 7$, esclusa la R_3^6 con retta doppia* ».