Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Mario Dolcher

Questioni di minimo per insiemi chiusi sconnettenti uno spazio topologico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 159-171

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__159_0>

QUESTIONI DI MINIMO PER INSIEMI CHIUSI SCONNETTENTI UNO SPAZIO TOPOLOGICO

Nota (*) *di* MARIO DOLCHER (*a Trieste*).

Nel corso di una ricerca sulle trasformazioni piane continue – che effettuavo come Tesi di laurea, nel 1942 – mi imbattei in alcune questioni riguardanti i continui (e, più in generale, gli insiemi chiusi) «separanti il piano» che, pur essendomisi poi mostrate inessenziali ai fini della ricerca sulle trasformazioni, studiai collateralmente; riuscii allora a risolvere i più importanti problemi di minimo ([1]) che si pongono in tale riguardo. Più tardi trovai che gli stessi problemi erano già stati affrontati e risolti da MAZURKIEWICZ ([2]) e da KURATOWSKI ([3]), e che KNASTER ([4]) ed altri avevano precisato e pressochè esaurito tali ricerche relativamente al piano ([5]). Dal confronto però delle mie dimostrazioni

(*) Pervenuta in Redazione il 13 Gennaio 1950. Il contenuto di questa Nota è stato oggetto di una comunicazione al Seminario Matematico dell'Università di Padova nei giorni 6 e 7 Dicembre 1949.

([1]) Tali problemi trovano l'analogo in quelli riguardanti i *continui irriducibili* (*o minimali*) *fra due punti*, esaurientemente trattati da JANISZEWSKI (*Sur les continus irréductibles entre deux points*, Journal de l'École Polytechnique, *16* (1912)).

([2]) S. MAZURKIEWICZ: *Sur un ensemble* G_δ *ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire*, Fund. Math. I (1920); e *Sur les continus plans non bornés*, Fund. Math. V (1924).

([3]) C. KURATOWSKI: *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fund. Math. VI (1924).

([4]) B. KNASTER: *Quelques coupures singulières du plan*, Fund. Math. VII (1925).

([5]) Problemi analoghi, sempre relativamente al caso del piano, erano già stati studiati da BROUWER (*Zur Analysis Situs*, Math. Ann. *68*, (1910)); DENJOY (*Sur l'Analysis Situs du plan*, C. R. Acad. Sc. *153* (1911)); A. ROSENTHAL (*Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua*, Sitzungsberichte Bayr. Akad., 1919).

con quelle di Mazurkiewicz e di Kuratowski rilevai che mentre le dimostrazioni degli Autori precedenti erano condotte in modo da consentire un'agevole estensione al più al caso di un S_n, quelle che io davo si prestavano ad estensioni molto più larghe: alcuni dei teoremi stessi risultavano validi anche nel caso di uno spazio topologico qualunque, altri – che non sussistono per spazi topologici qualunque – risultavano validi per spazi localmente connessi.

In questa Nota presento i risultati della mia ricerca.

Relativamente a *spazi topologici localmente connessi*, risolvo i seguenti problemi:

(I) fra gli insiemi chiusi separanti una data coppia di punti caratterizzare quelli che sono « minimali » rispetto alla proprietà stessa (cioè tali che nessun loro sottoinsieme chiuso proprio separa la data coppia di punti);

(II) fra gli insiemi chiusi sconnettenti lo spazio caratterizzare quelli che sono minimali rispetto alla proprietà stessa;

(III) accertare che ogni insieme chiuso separante una data coppia di punti contiene almeno un sottoinsieme chiuso minimale rispetto alla proprietà stessa; anzi, che è possibile assegnare a priori una legge che fra tali insiemi minimali ne individui uno.

Relativamente a *spazi topologici qualunque*, dimostro che le condizioni che per spazi localmente connessi sono « necessarie e sufficienti » sono in *ogni* caso « sufficienti » (ad assicurare le medesime proprietà di minimo) ([6]).

([6]) Restano suscettibili di studio le questioni: (1) di ricercare classi di spazi topologici più ampie di quella degli spazi localmente connessi, nelle quali permangono « necessarie e sufficienti » le condizioni che dimostro esserlo per spazi localmente connessi; (2) di introdurre per spazi topologici qualunque nozioni che per gli spazi localmente connessi coincidano con quelle usuali (di *frontiera, separazione, componenti*, . . .) e ne rappresentino generalizzazioni diverse dalle nozioni usuali per il caso di spazi topologici qualunque, atte a consentire la validità generale di proposizioni per le quali gli spazi non localmente connessi si presentano come « eccezionali ».

Ritengo che la questione (1) non ammetta soluzioni espressive ed utili (essa è anzi posta in termini che non ne assicurano neppure un'effettiva consistenza!); ritengo invece che lo studio della questione (2) possa riuscire di

Notazioni, terminologia. - Indico i punti con minuscole a, $b, \ldots$; gli insiemi di punti con maiuscole $A, B, \ldots$; le famiglie di insiemi con maiuscole gotiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}, \ldots$

Detto I un insieme (di punti di uno spazio S), con $\mathcal{C}(I)$ indico il suo complementare (rispetto ad S); con $\bar{I}$ la sua chiusura; con I^* la sua frontiera. Indico con $\emptyset$ l'insieme vuoto.

Dicendo «spazio», intendo in ogni caso «spazio topologico»; dicendo semplicemente «insieme», intendo in ogni caso «insieme di punti».

Gli altri simboli e termini sono di uso generale.

1. - Spazi topologici. - Premettiamo qui alcune nozioni generali sopra gli spazi topologici. Tale premessa va intesa a solo scopo di comodità di lettura, in quanto tutte le nozioni qui date sono quelle oggi usuali; esse sono *sufficienti* per la trattazione dei problemi che seguono.

DEF. (7). Si dice *spazio topologico* un insieme S quando sia assegnata una famiglia $\mathfrak{A}$ di suoi sottoinsiemi, soddisfaciente alle seguenti condizioni:

(A 1) la riunione di quantisivogliano insiemi di $\mathfrak{A}$ appartenga ad $\mathfrak{A}$;

(A 2) l'intersezione di due insiemi di $\mathfrak{A}$ appartenga ad $\mathfrak{A}$;

(A 3) gli insiemi $\emptyset$ ed S appartengano ad $\mathfrak{A}$.

Gli elementi dell'insieme S si dicono anche «punti»; gli insiemi della famiglia $\mathfrak{A}$ si dicono insiemi *aperti*.

notevole interesse, in quanto alcuni dei caratteri di separazione non ancora sfruttati possono valer di guida per la determinazione di invarianti topologici; (così come ad es. la proprietà che *in ogni insieme chiuso sconnettente lo spazio sia contenuto un continuo sconnettente lo spazio* può servire a definire la «connessione semplice» di uno spazio).

(7) Così ad es. in N. BOURBAKI: *Éléments de Mathématique; les structures fondamentales de l'Analyse* (livre III: *Topologie*, chap. 1). Ed. Hermann, Paris.

Def. Un insieme I si dice *chiuso* se l'insieme $\mathcal{C}(I)$ è aperto.

Def. Un insieme U si dice *intorno di un punto* p se esiste un insieme aperto contenente p e contenuto in U.

Def. Si dice *chiusura* di un insieme I l'insieme $\overline{I}$ di tutti e soli quei punti dello spazio i quali appartengono ad ogni insieme chiuso contenente I.

I punti della chiusura di un insieme I sono tutti e soli quei punti ogni intorno dei quali contiene almeno un punto di I (punti *aderenti all' insieme* I).

Si dimostra che se S è uno spazio topologico valgono le proposizioni seguenti:

(B 1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

(B 2) $\overline{A} \supset A$ per ogni insieme A di S;

(B 3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ per ogni insieme A di S;

(B 4) $\overline{(A + B)} = \overline{A} + \overline{B}$ per ogni coppia di insiemi A, B di S.

Si dimostra inoltre che: se, dato un insieme S, si associa ad ogni suo sottoinsieme A un sottoinsieme $\overline{A}$ in modo da soddisfare alle condizioni (B 1), (B 2), (B 3), (B 4) (*postulati di* Kuratowski), la struttura così definita per l'insieme S è quella di uno spazio topologico nel quale [sono insiemi chiusi tutti e soli quelli autoassociati, e quindi] sono insiemi aperti tutti e soli quelli il cui complementare è autoassociato; si ha inoltre che nello spazio topologico così definito la chiusura di ogni insieme è l'insieme ad esso associato.

Si dimostra ancora che se S è uno spazio topologico, valgono le proposizioni seguenti:

(C 1) ogni intorno di un punto contiene il punto stesso;

(C 2) se U è un intorno di p, e se è $U \subset V$, è pure V un intorno di p;

(C 3) se U e V sono intorni di p, è pure $U \cap V$ un intorno di p;

(C 4) se U è un intorno di p, esiste un intorno V di p contenuto in U e tale che U è intorno di ogni punto di V.

Si dimostra inoltre che: se, dato un insieme S, ad ogni suo punto si associa una famiglia non vuota di sottoinsiemi in modo da soddisfare alle (C 1), (C 2), (C 3), (C 4), la struttura così definita per l'insieme S è quella di uno spazio topologico nel quale sono insiemi aperti tutti e soli quegli insiemi i quali sono associati ad ognuno dei loro punti; si ha inoltre che nello spazio topologico così definito gli intorni di un punto sono tutti e soli gli insiemi ad esso associati.

I tre gruppi di proposizioni riportati sono dunque equivalenti previa opportuna traduzione dei termini in cui sono espressi. A seconda dell'opportunità si ricorrerà dunque indifferentemente all'una o all'altra delle espressioni.

Se S è uno spazio topologico, detto R un sottoinsieme qualunque di S, la struttura topologica di S ne subordina una su R ove si convenga di denominare « chiuso » un sottoinsieme I di R se e solo se $\bar{I} \cap R = I$; ogni sottoinsieme di S diviene così un *sottospazio* di S (o *spazio subordinato* in S).

Def. Dato che sia un insieme I, un punto p si dice *interno* all'insieme se esiste un intorno di p contenuto in I; si dice *esterno* se è interno al complementare $\mathcal{C}(I)$; si dice *punto di frontiera* se non è nè interno nè esterno.

Def. Si dice *insieme-frontiera* (o brevemente *frontiera*) di un insieme I l'insieme I^* dei suoi punti di frontiera.

Si hanno immediatamente le proposizioni seguenti (I indica un insieme qualunque in S):

$$\emptyset^* = S^* = \emptyset \ ; \quad I^* = \mathcal{C}(I)^* \ ; \quad I^* = \bar{I} \cap \overline{\mathcal{C}(I)} \ ; \quad I + I^* = \bar{I}.$$

Ne segue che: un insieme I è chiuso se e solo se $I^* \subset I$; un insieme è aperto se e solo se $I^* \subset \mathcal{C}(I)$; un insieme è chiuso ed aperto se e solo se $I^* = \emptyset$. Inoltre: *per ogni insieme* I *si ha* $(\bar{I})^* \subset I^*$. (Si ha infatti, successivamente: $\bar{I} \supset I$, $\mathcal{C}(\bar{I}) \subset \mathcal{C}(I)$, $\overline{\mathcal{C}(\bar{I})} \subset \overline{\mathcal{C}(I)}$ e quindi $(\bar{I})^* = \bar{I} \cap \overline{\mathcal{C}(\bar{I})} \subset \subset \bar{I} \cap \overline{\mathcal{C}(I)} = I^*$).

2. - Connessione.

Def. Uno spazio S si dice *sconnesso* se è somma di due insiemi non vuoti A, B tali che si abbia $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Uno spazio S si dice *connesso* quando non sia sconnesso. Gli spazi sconnessi sono caratterizzati dall'esistenza in essi di sottoinsiemi propri non vuoti aventi frontiera vuota.

Un insieme $I\,(\subset S)$ si dice sconnesso se lo è come spazio nella topologia subordinata da quella di S; ossia, se I è somma di due insiemi non vuoti I_1, I_2 tali che si abbia $\overline{I}_1 \cap \overline{I}_2 \cap I = \emptyset$; il che equivale all'essere $\overline{I}_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cap \overline{I}_2 = \emptyset$. Un insieme $I\,(\subset S)$ si dice connesso quando non sia sconnesso; ossia quando, rappresentato comunque come somma di due insiemi, almeno uno di questi contiene punti aderenti all'altro.

Def. Un insieme chiuso e connesso si dice *continuo*; un insieme aperto e connesso si dice *campo*.

Sia I un insieme qualunque di uno spazio S. Detto p un punto qualunque di I, diciamo C_p l'insieme-riunione della famiglia dei sottoinsiemi connessi di I contenenti p. Si constata che C_p è connesso ed è massimale rispetto alla proprietà di essere un sottoinsieme di I; (esso è dunque individuato da ognuno dei suoi punti). La topologia dello spazio S ripartisce dunque l'insieme I in una famiglia di sottoinsiemi; questi si dicono i *componenti* di I. Se I è connesso e non vuoto, la ripartizione è impropria: vi è un unico componente. I componenti di un insieme chiuso sono insiemi chiusi ([8]).

Def. Diremo che un insieme $I\,(\subset S)$ *sconnette* (oppure *separa*) *lo spazio* S se l'insieme $\mathcal{C}(I)$ è sconnesso. Diremo che un insieme I *separa due punti* a_1, a_2 quando i due punti appartengono a componenti distinti dell'insieme $\mathcal{C}(I)$.

([8]) I componenti di un insieme aperto possono invece non essere insiemi aperti. Ad es., lo spazio S (che è insieme aperto) può ammettere componenti non aperti (componenti «di accumulazione»).

Def. Si dice che uno spazio è *localmente connesso in un punto* p se in ogni intorno di p è contenuto un intorno connesso di p. Uno spazio si dice *localmente connesso* se lo è in ognuno dei suoi punti. Un insieme I in uno spazio S si dirà *localmente connesso* [*in un punto* $p \in I$] se lo è [in p] nella topologia subordinata su I da quella dello spazio S.

3. - Lemmi.

Diamo ora, sotto forma di *lemmi*, alcune proposizioni utili per il seguito.

Lemma 1. - *Per ogni coppia di componenti A_1, A_2 distinti di un insieme sconnesso si ha $\overline{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$.*

Dim. Altrimenti l'insieme $A_1 + A_2$ risulterebbe connesso, contro l'ipotesi che A_1, A_2 siano *componenti*.

Lemma 2. - *Se un insieme connesso A contiene punti di un insieme I e punti del complementare $\mathcal{C}(I)$, contiene anche punti della frontiera I^*.*

Dim. L'insieme A è somma dei seguenti tre insiemi, a due a due privi di punti a comune: punti di A interni ad I, punti di A esterni ad I, punti di $A \cap I^*$. Dei due primi insiemi l'uno non contiene punti aderenti all'altro; dunque l'eventualità che sia $A \cap I^* = \emptyset$ è incompatibile con la connessione dell'insieme A.

Lemma 3. - *La frontiera A^* di un insieme A separa ogni (eventuale) punto interno ad A da ogni (eventuale) punto esterno ad A.*

Dim. Un insieme connesso I che contenga un punto a di A e un punto b di $\mathcal{C}(A)$ contiene (lemma precedente) punti di A^*; pertanto non è possibile che a e b appartengano ad uno stesso componente dell'insieme $\mathcal{C}(A^*)$.

Lemma 4. - *In uno spazio localmente connesso i componenti di un insieme aperto A sono insiemi aperti.*

Dim. Detto A_1 un componente di A, sia $p \in A_1$; esiste un intorno connesso U di p, contenuto in A, quindi anche in A_1. Dunque essendo ogni punto p di A_1 interno all'insieme stesso, A_1 è aperto.

LEMMA 5. – *In uno spazio localmente connesso* [9] *un insieme chiuso G contiene la frontiera di ciascuno dei componenti dell'insieme complementare $\mathcal{C}(G)$.*

Più in generale:

LEMMA 5'. – *In uno spazio localmente connesso un insieme chiuso G contiene la frontiera di ogni insieme–riunione A di una famiglia di componenti dell'insieme complementare $\mathcal{C}(G)$.*

DIM. L'insieme A è aperto; dunque non contiene nessuno dei suoi punti di frontiera. È dunque $A^* \subset \mathcal{C}(A)$ ossia $A^* \subset G + B$, essendosi indicato con B l'insieme–riunione dei componenti di $\mathcal{C}(G)$ non contenuti in A. Essendo pure B aperto, è $A^* \cap B = \emptyset$, dunque $A^* \subset G$, che è la tesi; ne discende in particolare il lemma 5.

Veniamo ora a stabilire le condizioni di minimo relative alla separazione di uno spazio mediante insiemi chiusi (problemi (I) e (II) enunciati all'inizio di questa Nota).

4. – Teoremi validi per spazi qualunque.

TEOREMA. – *In uno spazio topologico qualunque: condizione sufficiente affinchè un insieme chiuso G separante una coppia di punti a_1, a_2 sia minimale rispetto a questa proprietà* [10] *è che, detti A_1, A_2 i componenti dell'insieme $\mathcal{C}(G)$ ai quali i due punti rispettivamente appartengono, sia $A_1^* = A_2^* = G$.*

DIM. Detto G' un sottoinsieme chiuso proprio di G, proviamo che G' non separa la coppia di punti a_1, a_2. E infatti, detto b un punto di $G \cap \mathcal{C}(G')$, in ogni intorno di b vi sono punti di A_1 e punti di A_2 (in quanto $b \in G$, e $G = A_1^* = A_2^*$); dunque il punto b è aderente sia al componente di $\mathcal{C}(G')$ in cui è contenuto A_1 (quindi vi appartiene), sia al componente di $\mathcal{C}(G')$ in cui è contenuto A_2 (quindi vi appartiene). Dunque, nell'insieme $\mathcal{C}(G')$ uno stesso componente contiene A_1 ed A_2; ossia, G' non separa a_1 da a_2, donde la tesi.

(9) L'enunciato cade in difetto per spazi non localmente connessi.

(10) Da intendere precisamente: « minimale rispetto alla proprietà di essere un insieme chiuso separante la coppia di punti a_1, a_2 ».

TEOREMA. - *In uno spazio topologico qualunque: condizione sufficiente affinchè un insieme chiuso G sconnettente lo spazio sia minimale rispetto a questa proprietà* ([11]) *è che ciascuno dei componenti di* $\mathcal{C}(G)$ *abbia G come frontiera.*

DIM. Indicando con A_ι $(\iota \in E)$ i componenti di $\mathcal{C}(G)$, per ognuno di essi si ha per ipotesi $A_\iota^* = G$; l'insieme G non ha dunque punti interni.

Detto G' un sottoinsieme chiuso qualunque contenuto propriamente in G, proveremo che l'insieme $\mathcal{C}(G')$ è connesso; ne risulterà la proprietà di minimo per G. Suppongasi $\mathcal{C}(G')$ sconnesso, e precisamente sia $\mathcal{C}(G') = C_1' + C_2'$, con C_1', C_2' non vuoti e $\overline{C_1'} \cap C_2' = \emptyset$, $C_1' \cap \overline{C_2'} = \emptyset$. Intanto, $\mathcal{C}(G)$ contiene effettivamente punti di ambedue questi insiemi; (il fatto che C_1' e C_2' sono, evidentemente, insiemi aperti esclude che uno di essi sia contenuto in G, insieme privo di punti interni). Dunque, dei componenti di $\mathcal{C}(G)$ alcuni stanno in C_1', altri in C_2'. Orbene, un punto x di $G \cap \mathcal{C}(G')$, supposto che appartenga per es. a C_1', risulta interno a C_1', e non può quindi appartenere alla frontiera di nessuno di quei componenti di $\mathcal{C}(G)$ i quali stanno in C_2'; e ciò è in contrasto con l'ipotesi fatta sull'insieme G. Ne segue che $\mathcal{C}(G)$ è connesso; dunque, la proprietà di minimo per G.

5. - Un esempio.

Valga un esempio a mostrare che le condizioni ora dimostrate sufficienti non sono invece in generale necessarie affinchè l'insieme G goda delle dette proprietà di minimo.

([11]) Da intendere precisamente: « minimale rispetto alla proprietà di essere un insieme chiuso sconnettente lo spazio S ». Si noti che un insieme chiuso minimale rispetto alla proprietà di separare una coppia di punti a_1, a_2 può non essere minimale rispetto alla proprietà di separare lo spazio. Esempio: S sia il piano riferito a coordinate polari, G sia l'insieme chiuso composto dalle due circonferenze $\rho = \frac{\pi}{2}$ e $\rho = \frac{3\pi}{2}$ e dalla linea $\rho = \pi + \operatorname{arctg} \theta$ $(-\infty < \theta < +\infty)$; l'insieme G separa i punti $a_1(\pi - \varepsilon, 0)$, $a_2(\pi - \varepsilon, 0)$ quando si scelga $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, ed è minimale rispetto alla proprietà di separare la coppia di punti; non è invece, evidentemente, minimale rispetto alla proprietà di sconnettere il piano.

Nel piano reale (x, y) diciamo A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ la semiretta $y = \frac{1}{n} x$, $x > 0$; diciamo A_0 la semiretta $y = 0$, $x > 0$; diciamo O l'origine. Lo spazio S sia l'insieme-riunione degli insiemi detti $\left(S = O + \sum_{0}^{\infty}{}_n A_n\right)$, con la topologia subordinata dalla topologia del piano. Orbene, l'insieme chiuso G costituito dal solo punto O sconnette lo spazio S ed è minimale rispetto alla proprietà stessa: eppure non tutti i componenti dell'insieme $\mathcal{C}(G)$ hanno O come insieme-frontiera (è infatti $A_0^* = A_0 + O$). E ancora: detti a_1, a_2 i punti di coordinate risp. (1, 1) ed (1, 0), l'insieme chiuso $G = O$ separa la coppia di punti a_1, a_2 ed è minimale rispetto a tale proprietà, senza che le frontiere dei componenti di $\mathcal{C}(G)$ i quali contengono i due punti coincidano.

6. - Teoremi validi per spazi localmente connessi.

Le condizioni provate sufficienti risultano essere anche necessarie quando ci si limiti alla considerazione di *spazi localmente connessi*.

Si hanno cioè i due teoremi seguenti:

Teorema. - *In uno spazio topologico localmente connesso: condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme chiuso G separante una coppia di punti a_1, a_2 sia minimale rispetto a questa proprietà è che, detti A_1, A_2 i componenti dell'insieme $\mathcal{C}(G)$ ai quali i due punti rispettivamente appartengono, sia $A_1^* = A_2^* = G$.*

Dim. Che la condizione sia sufficiente è già stato, più in generale, provato. Ammessa dunque per l'insieme G la proprietà di minimo, proviamo che è $A_1^* = A_2^* = G$.

Gli insiemi A_1, A_2 sono aperti [lemma 4]; dunque ad es. il punto a_1 è interno, a_2 è esterno ad A_1. Pertanto la frontiera A_1^* separa a_1 da a_2 [lemma 3]; ed essendo $A_1^* \subset G$ [lemma 5], l'ammettere che G goda della proprietà di minimo relativamente alla separazione della coppia di punti a_1, a_2 porta di conseguenza $A_1^* = G$. E così $A_2^* = G$.

Teorema. – *In uno spazio topologico localmente connesso: condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme chiuso G sconnettente lo spazio sia minimale rispetto a questa proprietà è che ciascuno dei componenti di $\mathcal{C}(G)$ abbia G come frontiera.*

Dim. Evidentemente, se G è minimale rispetto alla proprietà di (essere un insieme chiuso e di) sconnettere lo spazio, esso è minimale rispetto alla proprietà di (essere un insieme chiuso e di) separare ogni coppia di punti a_1, a_2 appartenenti rispettivamente a componenti distinti di $\mathcal{C}(G)$. Dunque per ogni coppia di componenti A_ι, $A_\varkappa$ di $\mathcal{C}(G)$ deve aversi, in base al teorema precedente, $A_\iota^* = A_\varkappa^* = G$. Ne segue la tesi.

7. - Teorema di esistenza dell'insieme chiuso minimale.

Passiamo ora alla risoluzione del problema (III).

Teorema. – *Dato comunque in uno spazio localmente connesso S un insieme chiuso G sconnettente lo spazio e data comunque una coppia di punti che l'insieme separa nello spazio, esiste un sottoinsieme chiuso di G, il quale separa i due punti dati ed è minimale rispetto a tale proprietà. Un tale sottoinsieme può individuarsi a priori in base alle sole ipotesi fatte* (12), *ove soltanto si supponga «ordinata» la coppia di punti.*

(12) La sola arbitrarietà che compare nell'enunciazione della legge di estrazione dell'insieme chiuso minimale (legge formulata nelle quattro righe che seguono Dim.) è il considerare l' insieme B dei punti separati da a_2 per mezzo di A_1^* anzichè quello dei punti separati da a_1 per mezzo di A_2^*.

Per togliere ogni arbitrarietà è sufficiente (ed anche necessario, almeno con riferimento al caso generale) presupporre per l' insieme dei due punti a_1, a_2 la *struttura discreta* (ossia, con espressione più usata, presupporre «ordinata» la coppia di punti). Naturalmente, tale ipotesi risulta a priori verificata quando la struttura (topologica, di S e G), *distingue fra loro* i punti a_1, a_2 (cioè subordina sul sottoinsieme di S costituito dai due punti la struttura discreta).

Così ad esempio, detto ancora G l' insieme descritto nella nota (11), e detti ora a_1, a_2 i punti $(0, 0)$ e $(0, 2\pi)$, l' insieme chiuso minimale G_0 è la circonferenza $\rho = \frac{\pi}{2}$ oppure la circonferenza $\rho = \frac{3\pi}{2}$ secondo che si

Dim. Detti a_1, a_2 i due punti dati, appartenenti rispettivamente a due componenti A_1, A_2 distinti dell'insieme $\mathcal{C}(G)$, indichiamo con B l'insieme dei punti che la frontiera A_1^* separa da a_2, e con G_0 la frontiera di $\overline{B}$. Vogliamo dimostrare che G_0 è un sottoinsieme chiuso di G, separante i punti a_1, a_2 e minimale rispetto a questa sua proprietà.

Anzitutto si ha $A_1^* \subset G$ [lemma 5]; inoltre, poichè B è somma di componenti di $\mathcal{C}(A_1^*)$, si ha $B^* \subset A_1^*$ [lemma 5']; è infine $G_0 (= (\overline{B})^*) \subset B^*$. Dunque G_0 è un sottoinsieme, chiuso, di G.

Proviamo che G_0 separa la coppia di punti a_1, a_2. Essendo A_1, A_2 insiemi aperti [lemma 4], i punti di A_1 sono interni ad A_1, a_2 esterno, per cui [lemma 3] si ha $A_1 \subset B$; quindi a_1, interno ad A_1, è interno pure a B, e a $\overline{B}$. Il punto a_2, essendo interno ad A_2, non appartiene ad $\overline{A}_1$; non appartiene a B, nè a B^* $(\subset A_1^* \subset \overline{A_1})$; quindi a_2 non appartiene a $\overline{B}$. Se ne deduce [lemma 3] che G_0, frontiera di $\overline{B}$, separa a_1 (punto interno a $\overline{B}$) da a_2 (punto esterno a $\overline{B}$).

Passiamo infine a provare che G_0 gode della proprietà di minimo, dimostrando che comunque si scelga un insieme chiuso H contenuto propriamente in G_0, i punti a_1, a_2 appartengono ad uno stesso componente di $\mathcal{C}(H)$. Sia b un punto dell'insieme-differenza $G_0 \cap \mathcal{C}(H)$. Essendo $G_0 \subset A_1^*$, il punto b appartiene ad A_1^*; e allora, in quanto punto aderente al componente di $\mathcal{C}(H)$ il quale contiene a_1, appartiene a tale componente.

D'altra parte, essendo b punto di G_0, cioè punto di frontiera

enunci la legge nell'uno o nell'altro dei due modi possibili. Le due costruzioni daranno rispettivamente insiemi *distinguibili fra loro* – assegnati che siano, come struttura, la topologia di S e l'insieme G.

Se invece l'insieme G detto si pensa immerso nel piano S' dotato di (un) « punto all'infinito », i due punti a_1, a_2 non vengono distinti fra loro per mezzo della struttura ambiente, nè dunque possono venir distinti fra loro i due insiemi minimali deducibili in base alla legge.

La terminologia adottata in questa nota è quella che ho introdotto con la Memoria « *Nozione generale di struttura per un insieme* », Rend. Sem. Mat. Padova 1949, pagg. 265-291; in particolare ai numeri **36** e **47**.

(Nota aggiunta nelle bozze di stampa).

di $\overline{B}$, in ogni suo intorno vi sono punti di $\mathcal{C}(\overline{B})$, i quali, essendo esterni a $\overline{B}$, sono esterni a B. Orbene, un punto x esterno a B non appartiene ad A_1^* (è infatti, come già notato, $A_1 \subset B$; quindi $A_1^* \subset \overline{A}_1 \subset \overline{B}$) ; ossia appartiene a $\mathcal{C}(B + A_1^*)$. Ricordando allora la definizione data dell'insieme B, constatiamo che un siffatto punto x appartiene necessariamente allo stesso componente di $\mathcal{C}(A_1^*)$ al quale appartiene a_2 ; non viene dunque separato da a_2 per mezzo di A_1^*, nè di $G_0 (\subset A_1^*)$, nè di $H(\subset G_0)$. Abbiamo constatato dunque, per quanto riguarda il punto b, che esso è punto aderente al componente di $\mathcal{C}(H)$ al quale appartiene a_2 ; e allora, appartiene a tale componente. In definitiva, nell'insieme $\mathcal{C}(H)$, il punto b appartiene sia al componente che contiene a_1 sia a quello che contiene a_2 ; e allora, appartenendo a_1 e a_2 ad uno stesso componente di $\mathcal{C}(H)$, essi non vengono separati l'uno dall'altro per mezzo di H.

Di qui l'asserita proprietà di minimo per l'insieme G_0.

8. – Un esempio.

Un esempio valga, anche qui, a mostrare come il problema ora risoluto per spazi localmente connessi non sia risolubile in generale; e cioè come un insieme chiuso separante, in uno spazio topologico, una coppia di punti possa non contenere alcun sottoinsieme minimale rispetto alla proprietà stessa.

Nel piano reale (x, y) diciamo S l'insieme considerato al n. 5, sempre con la topologia subordinata dalla topologia del piano. Diciamo ora G l'insieme dei punti di S per i quali è $x = 1$. L'insieme G separa (in S) la coppia di punti a_1 $(0, 0)$ e a_2 $(2, 0)$, e non contiene – com'è facile constatare – alcun sottoinsieme minimale rispetto alla proprietà stessa.

9. – Osservazione. – Un problema analogo al (III) non si pone, almeno così in generale, per la proprietà di minimo relativamente alla sconnessione dello spazio. Possono darsi esempi di insiemi chiusi sconnettenti il *piano* non contenenti alcun insieme minimale rispetto alla proprietà stessa ([13]).

([13]) Ved. Knaster, loc. cit. in ([4]).