RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE ZWIRNER

Criteri di esistenza per un problema al contorno relativo all'equazione $y' = f(x, y; \lambda)$

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 141-158

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__141_0>

CRITERI DI ESISTENZA PER UN PROBLEMA AL CONTORNO RELATIVO ALL' EQUAZIONE $y' = f(x, y; \lambda)$

Nota (*) *di* GIUSEPPE ZWIRNER (*a Ferrara*).

In due miei lavori ho stabilito, fra l'altro, delle condizioni sufficienti per l'esistenza di almeno una soluzione per il problema:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} y'(x) = \lambda f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \, , \; y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

nelle incognite λ e $y(x)$ (1).

Recentemente F. CAFIERO (2) ha esaminato il problema più generale:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = \varphi_1(\lambda) \, , \; y(x_1) = \varphi_2(\lambda) \end{cases}$$

e, applicando un metodo dovuto a G. STAMPACCHIA (3), ha stabi-

(*) Pervenuta in Redazione il 1. Settembre 1949.

(1) G. ZWIRNER: *Sull'equazione* $y' = \lambda f(x, y)$ [Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova, vol. XV (1946), pp. 33-39]; *Alcuni teoremi sulle equazioni differenziali dipendenti da un parametro* [Annali Triestini dell' Università di Trieste, serie IV, vol. II (1946-47)].

(2) F. CAFIERO: *Su un problema ai limiti relativo all' equazione* $y' = f(x, y, \lambda)$ [Giornale di Matematiche di Battaglini, serie IV, vol. LXXVII (1947-48), pp. 145-163].

(3) G. STAMPACCHIA: *Sulle condizioni che determinano gli integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.* [Rend. Acc. Naz. Lincei serie 8, vol. 2 (1947), pp. 411-418].

lito, fra l'altro, un teorema di esistenza per le soluzioni del problema considerato.

In questa Nota, dopo aver esteso (n. 1, 2) il teorema di F. Cafiero, do altri criteri di risolubilità del sistema II).

Esamino poi (n. 7) il problema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = y_0 \,,\; y'(x_1) = \nu \end{cases}$$

dandone un criterio di esistenza per le soluzioni.

1. Dimostriamo il seguente:

Teorema. *Sia $f(x, y; \lambda)$ una funzione ovunque finita nella striscia S:*

$$S: \quad x_0 \leq x \leq x_1 \,,\; -\infty < y < +\infty \,,\; a \leq \lambda \leq b$$

e ivi misurabile rispetto a x e continua rispetto a (y, λ).

Supponiamo inoltre che:

a) *in corrispondenza ad ogni numero reale e positivo M esista una funzione $\varphi(x)$ non negativa e sommabile in*

$$i: \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

tale che nel campo C:

$$C: \quad x_0 \leq x \leq x_1 \,,\; |y - y_0| \leq M \,,\; a \leq \lambda \leq b$$

sia:

$$(1) \qquad |f(x, y; \lambda)| \leq \varphi(x)$$

e che, almeno per M abbastanza grande, sia:

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, dx \leq M \;:$$

b) *fissato un numero* y_1, *con* $|y_1 - y_0| \leq M$, *esistano due funzioni* $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ *continue in* i, *soddisfacenti ivi alle condizioni:*

$$
(3) \qquad \begin{array}{ll}
|\alpha_1(x) - y_0| \leq M, & |\alpha_2(x) - y_0| \leq M, \\
\alpha_1(x_0) = y_0 \quad , & \alpha_2(x_0) = y_0 \quad , \\
\alpha_1(x_1) \leq y_1 \quad , & \alpha_2(x_1) \geq y_1 \quad ,
\end{array}
$$

e tali che le funzioni

$$
\alpha_1(x) - \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_1(t); a)\, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_2(t); b)\, dt - \alpha_2(x)
$$

$$
\left[\alpha_1(x) - \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_1(t); b)\, dt \ , \ \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_2(t); a)\, dt - \alpha_2(x)\right]
$$

siano non decrescenti in i.

In tali ipotesi il problema (4):

$$
(5) \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = y_0 \, , \; y(x_1) = y_1 \end{cases}
$$

ammette almeno una soluzione (5) $[\lambda_0, y_0(x)]$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua in* i (6).

(4) Solamente per semplicità consideriamo nel problema (5) le condizioni al contorno $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Il caso più generale, già considerato da F. Cafiero nel lavoro citato in (2), che si ha quando si impone all'integrale $y(x)$ le condizioni $y_0(x_0) = \varphi_1(\lambda)$, $y(x_1) = \varphi_2(\lambda)$, con $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$ opportune funzioni continue di λ in (a, b), si tratta in modo perfettamente analogo al caso da noi preso in esame.

(5) Naturalmente l'equazione $y'(x) = f(x, y(x); \lambda)$ sarà soddisfatta quasi ovunque in i.

(6) Il teorema dato da F. Cafiero nel lavoro citato in (2) si deduce da quello da noi enunciato supponendo la $f(x, y; \lambda)$, in tutta la striscia S minore, in modulo, di una funzione della variabile x sommabile in i e supponendo inoltre le funzioni $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ assolutamente continue in i.

Per dimostrare il teorema enunciato poniamo:

$$F(x,y;\lambda)=f(x,y;\lambda) \qquad \text{in } C,$$

$$F(x,y;\lambda)=f(x,y_0+M;\lambda) \text{ per } x_0\leq x\leq x_1, y\geq y_0+M, a\leq\lambda\leq b,$$

$$F(x,y;\lambda)=f(x,y_0-M;\lambda) \text{ per } x_0\leq x\leq x_1, y\leq y_0-M; a\leq\lambda\leq b.$$

La funzione $F(x,y;\lambda)$ così definita è misurabile rispetto a x, continua rispetto a (y,λ) in tutta la striscia S soddisfacendo ivi, per la (1), alla

$$|F(x,y;\lambda)|\leq\varphi(x). \tag{6}$$

Inoltre, essendo, per le (3),

$$F(x,\alpha_1(x);\lambda)=f(x,\alpha_1(x);\lambda)\ ;\ F(x,\alpha_2(x);\lambda)=f(x,\alpha_2(x);\lambda),$$

le funzioni

$$\alpha_1(x)-\int_{x_0}^{x}F(t,\alpha_1(t);a)\,dt\ ,\ \int_{x_0}^{x}F(t,\alpha_2(t);b)\,dt-\alpha_2(x) \tag{7}$$

$$\left[\alpha_1(x)-\int_{x_0}^{x}F(t,\alpha_1(t);b)\,dt\ ,\ \int_{x_0}^{x}F(t,\alpha_2(t);a)\,dt-\alpha_2(x)\right] \tag{7'}$$

sono non decrescenti in i.

Consideriamo allora il problema

$$\begin{cases} y'(x)=F(x,y(x);\lambda) \\ y(x_0)=y_0\ ,\ y(x_1)=y_1 \end{cases} \tag{8}$$

e facciamo vedere che ammette almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, con $y_0(x)$ assolutamente continua in i.

Infatti, l'equazione

$$(9) \qquad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y; \lambda)\, dt\,,$$

per le ipotesi fatte ([7]), ammette, per ogni valore di λ dell'intervallo $a \leq \lambda \leq b$, almeno un integrale il cui campo di definizione e di ogni altro eventuale è tutto l'intervallo i.

Esisteranno allora almeno due integrali dell'equazione (9), $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, corrispondenti rispettivamente ai valori a e b del parametro λ, i quali, per la non decrescenza delle funzioni (7) [(7')] e per un noto teorema di confronto ([8]), soddisferanno in tutto i alle limitazioni:

([7]) C. Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Lipsia, 1ª ed. (1918)], §§ 576-582.

([8]) Questo teorema di confronto si può enunciare nella forma seguente:

Sia $f(x, y)$ una funzione misurabile rispetto a x e continua rispetto a y nella striscia:

$$a \leq x \leq b\,, \quad -\infty < y < +\infty$$

e soddisfaccia ivi alla

$$|\, f(x, y) \,| \leq q(x)\,,$$

con $q(x)$ (non negativa e) sommabile in $a \leq x \leq b$.

Sia $\omega_1(x)$ una funzione continua in $a \leq x \leq b$ e supponiamo che la funzione

$$\omega_1(x) - \int_a^x f(t, \omega_1(t))\, dt$$

sia non decrescente in $a \leq x \leq b$.

In tali ipotesi, detto x_0 un punto di (a, b), esiste almeno una soluzione $y(x)$ dell'equazione

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt$$

soddisfacente alle limitazioni:

$$Y_1(x) \leq \alpha_1(x) \quad , \quad Y_2(x) \geq \alpha_2(x)$$

$$[Y_2(x) \leq \alpha_1(x) \quad , \quad Y_1(x) \geq \alpha_2(x)]$$

e quindi

$$Y_1(x_1) \leq \alpha_1(x_1) \leq y_1 \quad , \quad Y_2(x_1) \geq \alpha_2(x_1) \geq y_1$$

$$[Y_2(x_1) \leq \alpha_1(x_1) \leq y_1 \quad , \quad Y_1(x_1) \geq \alpha_2(x_1) \geq y_1)] \; .$$

Giunti a questo punto, si prova, con lo stesso ragionamento svolto da F. Cafiero nel lavoro citato [9], che il problema (8) ammette almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, con $y_0(x)$ assolutamente continua in i.

$$y(x) \leq \omega_1(x) \qquad \text{per } x_0 \leq x \leq b \qquad \text{se } y_0 \leq \omega_1(x_0)$$

$$y(x) \geq \omega_1(x) \qquad \text{per } a \leq x \leq x_0 \qquad \text{se } y_0 \geq \omega_1(x_0) .$$

Analogamente, detta $\omega_2(x)$ *una funzione continua in* $a \leq x \leq b$, *sia*

$$\omega_2(x) - \int_a^x f(t, \omega_2(t))\, dt$$

non crescente in $a \leq x \leq b$, *esiste allora almeno una soluzione* $y(x)$ *dell'equazione considerata soddisfacente alle limitazioni:*

$$y(x) \geq \omega_2(x) \qquad \text{per } x_0 \leq x \leq b \qquad \text{se } y_0 \geq \omega_2(x_0) ,$$

$$y(x) \leq \omega_2(x) \qquad \text{per } a \leq x \leq x_0 \qquad \text{se } y_0 \leq \omega_2(x_0) .$$

Questo teorema, nella ipotesi che la $f(x, y)$ sia continua rispetto a (x, y) è stato dimostrato da E. Bajada: *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali* [Nota I e II, Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei, s. VIII, vol. 3 (1947), pp. 158-271] e, nella ipotesi che $f(x, y)$ sia continua rispetto a y e misurabile rispetto a x da F. Cafiero: *Su due teoremi di confronto relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine* [Boll. dell' Un. Mat. Italiana, s. III, anno III (1948), pp. 124-128].

(9) Cfr. loc. cit. (2), pp. 153-55.

Dalla (6) e dalla (2) si trae:

$$|y_0(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, dx \leq M \qquad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

e quindi $[\lambda_0, y_0(x)]$ è anche una soluzione del problema (5).

2. – Dal teorema generale dimostrato segue il seguente criterio di esistenza:

Se, ferme restando tutte le altre ipotesi fatte nel teorema precedente, si sostituisce la b) *con la:*

b') *esistano due funzioni* $p_1(x)$, $p_2(x)$ $[p_1(x) \leq \varphi(x),\ p_2(x) \geq -\varphi(x)]$ *sommabili in* i *e tali che in tutto il campo:* $x_0 \leq x \leq x_1$, $|y - y_0| \leq M$, *sia:*

$$(11) \qquad \begin{array}{ll} f(x, y; a) \leq p_1(x) & [f(x, y; a) \geq p_2(x)] \\ f(x, y; b) \geq p_2(x) & [f(x, y; b) \leq p_1(x)] \end{array}$$

con

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)\, dx \leq y_1 - y_0 ; \int_{x_0}^{x_1} p_2(x)\, dx \geq y_1 - y_0$$

allora il problema (5) *ammette almeno una soluzione* $[\lambda_0, y_0(x)]$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua in* i.

Infatti, posto

$$\alpha_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt \ , \quad \alpha_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} p_2(t)\, dt$$

per le (1), (2), (11) e (12) si ha:

$$|\alpha_1(x) - y_0| \leq M \ , \ |\alpha_2(x) - y_0| \leq M \quad (x_0 \leq x \leq x_1) \ ,$$
$$\alpha_1(x_1) \leq y_1 \quad , \quad \alpha_2(x_1) \geq y_1$$

mentre per le (11) risulta, quasi ovunque in i,

$$f(x, \alpha_1(x); a) \leq \alpha_1'(x) \quad , \quad f(x, \alpha_2(x); b) \geq \alpha_2'(x)$$
$$[f(x, \alpha_2(x); a) \geq \alpha_2'(x) \quad , \quad f(x, \alpha_1(x); b) \leq \alpha_1'(x)]$$

cioè le funzioni:

$$\alpha_1(x) - \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_1(t); a)\, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_2(t); b)\, dt - \alpha_2(x)$$

$$\left[\alpha_1(x) - \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_1(t); b)\, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} f(t, \alpha_2(t); a)\, dt - \alpha_2(x)\right]$$

sono non decrescenti in i.

In virtù allora del teorema precedente resta senz'altro provato il criterio enunciato.

3. - Dimostriamo ora un secondo teorema di esistenza sempre relativo allo stesso problema.

TEOREMA. *Il problema* (5) *ammette almeno una soluzione* $[\lambda_0, y_0(x)]$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua in* i, *se:*

I) $f(x, y; \lambda)$ *è continua rispetto a* (y, λ) *e misurabile rispetto a* x *nello strato* S:

$$S: \quad x_0 \leq x \leq x_1 \,, \quad -\infty < y < +\infty \,, \quad a \leq \lambda \leq b \,;$$

II) *soddisfa in* S *alla disuguaglianza*:

$$|f(x, y; \lambda)| \leq \beta(x)\, \psi(y) + \gamma(x) \tag{13}$$

dove $\beta(x), \gamma(x)$ *sono non negative e sommabili in* i *e* $\psi(u)$ *continua e positiva in* $-\infty < u < +\infty$, *con*

$$\psi(u) \geq K \qquad (K = cost. > 0)\,; \tag{14}$$

quest' ultima condizione potendosi sopprimere quando $\gamma(x)$ *è identicamente nulla;*

III) *esiste un numero positivo N tale che*

$$
(15)\qquad \begin{aligned}
&\int_{-N}^{-|y_0|} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int_{x_0}^{x_1} \beta(x)\, dx + \frac{1}{K}\int_{x_0}^{x_1} \gamma(x)\, dx\,, \\
&\int_{|y_0|}^{N} \frac{du}{\psi(u)} \geq \int_{x_0}^{x_1} \beta(x)\, dx + \frac{1}{K}\int_{x_0}^{x_1} \gamma(x)\, dx\,;
\end{aligned}
$$

IV) *esistono due funzioni $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ continue in i e ivi soddisfacenti alle limitazioni:*

$$
(16)\qquad \begin{gathered}
|\sigma_1(x)| \leq N \quad , \quad |\sigma_2(x)| \leq N \\
\sigma_1(x_0) = y_0,\ \sigma_1(x_1) \leq y_1\,,\ \sigma_2(x_0) = y_0,\ \sigma_2(x_1) \geq y_1\,,
\end{gathered}
$$

tali che le funzioni

$$
\sigma_1(x) - \int_{x_0}^{x} f(t, \sigma_1(t); a)\, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} f(t, \sigma_2(t); b)\, dt - \sigma_2(x)
$$

$$
\left[\sigma_1(x) - \int_{x_0}^{x} f(t, \sigma_1(t); b)\, dt \ , \ \int_{x_0}^{x} f(t, \sigma_2(t); a)\, dt - \sigma_2(x)\right]
$$

siano non decrescenti in i.

Sia $\mu(x) \geq 0$ una funzione sommabile in i tale che sia

$$
|f(x, y; \lambda| \leq \mu(x)
$$

per $x_0 \leq x \leq x_1$, $|y| \leq N$, $a \leq \lambda \leq b$ e poniamo:

$$
f_0(x, y; \lambda) = f(x, y; \lambda)
$$

oppure

$$
f_0(x, y; \lambda) = \mu(x) \quad , \quad f_0(x, y; \lambda) = -\mu(x)
$$

a seconda che

$$| f(x, y; \lambda) | \leq \mu(x)$$

oppure

$$f(x, y; \lambda) > \mu(x) \quad , \quad f(x, y; \lambda) < -\mu(x)$$

di guisa che per $|y| \leq N$ si ha $f_0(x, y; \lambda) = f(x, y; \lambda)$.

La funzione $f_0(x, y; \lambda)$ così definita risulta evidentemente continua rispetto a (y, λ), misurabile rispetto a x in S, soddisfa ivi alla

$$| f_0(x, y; \lambda) | \leq \mu(x)$$

ed essendo, per le (16),

$$f_0(x, \sigma_1(x); \lambda) = f(x, \sigma_1(x); \lambda); \; f_0(x, \sigma_2(x); \lambda) = f(x, \sigma_2(x); \lambda)$$

le funzioni:

$$\sigma_1(x) - \int_{x_0}^{x} f_0(t, \sigma_1(t); a)\, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} f_0(t, \sigma_2(t); b)\, dt - \sigma_2(x)$$

$$\left[\sigma_1(x) - \int_{x_0}^{x} f_0(t, \sigma_1(t); b)\, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} f_0(t, \sigma_2(t); a)\, dt - \sigma_2(x)\right]$$

sono non decrescenti in i.

In queste ipotesi, per il teorema del n. 1, il problema

$$\begin{cases} y'(x) = f_0(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = y_0, \, y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, con $y_0(x)$ assolutamente continua in i.

Risultando inoltre verificata in S la

$$|f_0(x, y; \lambda)| \leq |f(x, y; \lambda)| < \beta(x)\, \psi(y) + \gamma(x)$$

dalle (14) e (15) segue che in i risulta:

$$|y_0(x)| \leq N$$

e quindi $[\lambda_0, y_0(x)]$ è anche una soluzione del problema (5).

4. - Il teorema del n. 3 continua ancora a sussistere anche *se, ferme restando tutte le altre ipotesi fatte nel teorema del numero precedente, si sostituisce la* IV) *con la:*

IV′) *nel campo*

$$x_0 \leq x \leq x_1 \quad , \quad |y| \leq N$$

risulta:

$$(17) \qquad \begin{array}{ll} f(x, y; a) \leq q_1(x) & [f(x, y; a) \geq q_2(x)] \\ f(x, y; b) \geq q_2(x) & [f(x, y; q) \leq q_1(x)] \end{array}$$

dove $q_1(x)$, $q_2(x)$ *sono sommabili in* i, *con*

$$\int_{x_0}^{x_1} q_1(x)\, dx \leq y_1 - y_0 \quad , \quad \int_{x_0}^{x_1} q_2(x)\, dx \geq y_1 - y_0 .$$

Osserviamo innanzi tutto che esiste sempre almeno un integrale $u(x)$ dell' equazione

$$y = |y_0| + \int_{x_0}^{x} [\beta(t)\, \psi(y) + \gamma(t)]\, dt$$

e un integrale $v(x)$ dell' equazione

$$y = -|y_0| - \int_{x_0}^{x} [\beta(t)\, \psi(y) + \gamma(t)]\, dt$$

che si possono definire in tutto i e che, per le (15), verificano ivi alle limitazioni

$$(18) \qquad |y_0| \leq u(x) \leq N \quad , \quad -N \leq v(x) \leq -|y_0| .$$

Definiamo ora, in S, la funzione $F_0(x, y; \lambda)$ nel modo che segue.

Poniamo:

$$F_0(x, y; \lambda) = \begin{cases} f(x, y; \lambda) & \text{per} \quad v(x) \leq y \leq u(x), \\ f(x, u(x); \lambda) & \text{per} \quad y \geq u(x), \\ f(x, v(x); \lambda) & \text{per} \quad y \leq v(x). \end{cases}$$

La $F_0(x, y; \lambda)$ così definita risulta continua rispetto a (y, λ) e misurabile rispetto a x nello strato S risultando ivi, per la (13), in modulo minore di una conveniente funzione della x (non negativa e) sommabile in i.

Inoltre per le (17) e (18) in tutto il campo $x_0 \leq x \leq x_1$, $-\infty < y < +\infty$, risulta:

$$\begin{aligned} &F_0(x, y; a) \leq q_1(x) \qquad && [F_0(x, y; a) \geq q_2(x)], \\ &F_0(x, y; b) \geq q_2(x) \qquad && [F_0(x, y; b) \leq q_1(x)]. \end{aligned}$$

In virtù allora del criterio del n. 2, il problema

$$\begin{cases} y'(x) = F_0(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, con $y_0(x)$ assolutamente continua in i.

Per provare quindi il teorema enunciato basterà dimostrare che in i risulta:

$$v(x) \leq y_0(x) \leq u(x). \tag{19}$$

Infatti supposto, per assurdo, che la seconda delle (19) non sia soddisfatta in tutto i, diciamo η un punto di i in cui riesce $y_0(\eta) > u(\eta)$ e (a', b') il massimo intervallo contenente η e contenuto in i nel cui interno sia sempre

$$y_0(x) > u(x) \qquad a' < x < b'; \tag{20}$$

sarà

$$y_0(a') = u(a') \,. \tag{21}$$

Avendosi, in $a' \leq x \leq b'$,

$$F_0(x, y_0(x); \lambda_0) = f(x, u(x); \lambda_0)$$

e tenuto conto delle (13), (21), si avrà, per ogni x dell'intervallo (a', b'),

$$y_0(x) - u(x) = \int_{a'}^{x} [f(t, u(t); \lambda_0) - \beta(t)\,\psi(u(t)) - \gamma(t)]\, dt \leq$$

$$\leq \int_{a'}^{x} [\beta(t)\,\psi(u(t)) + \gamma(t) - \beta(t)\,\psi(u(t)) - \gamma(t)]\, dt = 0$$

il che contraddice la (20).

In modo analogo si prova che sussiste in tutta i la prima delle (19).

5. – Il teorema del n. 3 continua ancora a sussistere se, *ferme restando tutte le altre ipotesi, si sostituisce la* III) *e le* (14), (16) *con le:*

III') *esistono due funzioni* $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$ $[\tau_1(x) < \tau_2(x)$ per $x \neq x_0]$ *continue in* i, *soddisfacenti alle condizioni*

$$\tau_1(x_0) \leq y_0 \,,\ \tau_1(x_1) \leq y_1 \ ;\ \tau_2(x_0) \geq y_0 \,,\ \tau_2(x_1) \geq y_1$$

e tali che le funzioni

$$\tau_1(x) - \int_{x_0}^{x} [\beta(t)\,\psi(\tau_1(t)) + \gamma(t)]\, dt, \quad \tau_2(x) - \int_{x_0}^{x} [\beta(t)\,\psi(\tau_2(t)) + \gamma(t)]\, dt \tag{22}$$

sono non decrescenti in i;

(14') $\psi(u)$ *è non negativa e continua in* $-\infty < u < +\infty$;

(16′) *risulta in* i

$$\tau_1(x) \le \sigma_1(x) \le \tau_2(x) \quad , \quad \tau_1(x) \le \sigma_2(x) \le \tau_2(x) \ .$$

Introduciamo la funzione

$$g(x, y; \lambda) = \begin{cases} f(x, y; \lambda) & \text{per} \quad \tau_1(x) \le y \le \tau_2(x) \\ f(x, \tau_2(x); \lambda) & \text{per} \quad y \ge \tau_2(x) \\ f(x, \tau_1(x); \lambda) & \text{per} \quad y \le \tau_1(x) \ , \end{cases}$$

misurabile rispetto a x, continua rispetto a (y, λ) nella striscia S e soddisfacente ivi, per la (13), ad una limitazione del tipo

$$| \, g(x, y; \lambda) \, | \le \mu_0(x)$$

con $\mu_0(x) \geq 0$ sommabile in i.

Risulta inoltre, per la (16′),

$$g(x, \sigma_1(x); \lambda) = f(x, \sigma_1(x); \lambda) \ , \ g(x, \sigma_2(x); \lambda) = f(x, \sigma_2(x); \lambda)$$

e quindi le funzioni

$$\sigma_1(x) - \int_{x_0}^{x} g(t, \sigma_1(t); a) \, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} g(t, \sigma_2(t); b) \, dt - \sigma_2(x)$$

$$\left[\sigma_1(x) - \int_{x_0}^{x} g(t, \sigma_1(t); b) \, dt \quad , \quad \int_{x_0}^{x} g(t, \sigma_2(x); a) \, dt - \sigma_2(x)\right]$$

sono non decrescenti in i.

In queste ipotesi, per quanto abbiamo visto, il problema

$$\begin{cases} y'(x) = g(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = y_0 , \, y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, con $y_0(x)$ assolutamente continua in i.

Basterà allora dimostrare che in i risulta

$$\tau_1(x) \leq y_0(x) \leq \tau_2(x) \tag{23}$$

per aver provato l'affermazione fatta.

A tale scopo supponiamo, per assurdo, che in un punto ξ di (x_0, x_1) risulti $y_0(\xi) > \tau_2(\xi)$ e diciamo (a_1, b_1) il massimo intervallo contenente ξ e contenuto in (a_1, b_1) in cui risulta sempre

$$y_0(x) > \tau_2(x) \qquad a_1 < x < b_1 ; \tag{24}$$

sarà

$$y_0(a_1) = \tau_2(a_1) \quad , \quad y_0(b_1) = \tau_2(b_1) \ . \tag{25}$$

Tenendo ora presente che in $a_1 \leq x \leq b_1$ risulta

$$g(x, y_0(x); \lambda_0) = f(x, \tau_2(x); \lambda_0) \leq \beta(x)\, \psi(\tau_2(x)) + \gamma(x)$$

e ricordando la prima delle (25) e la non decrescenza delle funzioni (22), in $a_1 \leq x \leq b_1$ si ha:

$$y_0(x) - \tau_2(x) = y_0(a_1) + \int_{a_1}^{x} g(t, y_0(t); \lambda_0)\, dt - \tau_2(x) \leq$$

$$\leq \tau_2(a_1) + \int_{a_1}^{x} [\beta(t)\, \psi(\tau_2(t)) + \gamma(t)]\, dt - \tau_2(x) =$$

$$= \tau_2(a_1) - \int_{x_0}^{a_1} [\beta(t)\, \psi(\tau_2(t)) + \gamma(t)]\, dt +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [\beta(t)\, \psi(\tau_2(t)) + \gamma(t)]\, dt - \tau_2(x) \leq 0$$

il che contraddice la (24).

Nello stesso modo si prova che in tutto i sussiste la prima delle (23).

6. - Il teorema del n. 5 continua ancora a sussistere anche *se, ferme restando tutte le altre ipotesi, si sostituisce la* IV) *e la* (16') *con la:*

IV'') *nel campo*

$$x_0 \leq x \leq x_1 \ , \quad \tau_1(x) \leq y \leq \tau_2(x)$$

risulta

$$f(x,y;a) \leq r_1(x) \qquad (f(x,y;a) \geq r_2(x))$$
$$f(x,y;b) \geq r_2(x) \qquad (f(x,y;b) \leq r_1(x))$$

dove $r_1(x)$, $r_2(x)$ *sono sommabili in* i, *con*

$$\int_{x_0}^{x_1} r_1(x)\,dx \leq y_1 - y_0 \quad , \quad \int_{x_0}^{x_1} r_2(x)\,dx \geq y_1 - y_0 \ .$$

L' affermazione fatta si dimostra con lo stesso procedimento adoperato nel numero precedente e ricordando il teorema del n. 2.

7. - In questo numero esamineremo il problema

$$(26) \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = y_0 \, , y'(x_1) = \nu \end{cases}$$

dimostrando il seguente:

Teorema. *Sia* $f(x,y;\lambda)$ *una funzione continua rispetto a* (y,λ) *e misurabile rispetto a* x *nel solito strato* S.

In corrispondenza ad ogni numero positivo M *esista una funzione* $\chi(x)$ *non negativa e sommabile in* i *tale che nel campo* D:

$$D: \qquad x_0 \leq x \leq x_1 \ , \quad |y - y_0| \leq M \ , \quad a \leq \lambda \leq b$$

riesca:

$$|f(x, y; \lambda)| \leq \chi(x) \tag{27}$$

con (almeno per M abbastanza grande)

$$\int_{x_0}^{x_1} \chi(x)\, dx \leq M. \tag{28}$$

Supponiamo inoltre che nei punti (x_1, y, λ), *con* $|y - y_0| \leq M$, *la* $f(x_1, y, \lambda)$ *sia continua rispetto a* (x, y, λ) *e che sia*

$$\begin{aligned} &f(x_1, y; a) \leq \nu \qquad &[f(x_1, y; a) \geq \nu] \\ &f(x_1, y; b) \geq \nu \qquad &[f(x_1; y; b) \leq \nu]. \end{aligned} \tag{29}$$

In tali ipotesi il problema (26) *ammette almeno una soluzione* $[\lambda_0, y_0(x)]$, *con* $y_0(x)$ *assolutamente continua in* i.

Supposto dapprima che la $f(x, y; \lambda)$ soddisfaccia, oltre a tutte le ipotesi dette, anche ad una condizione generalizzata di Lipschitz rispetto a y nel campo D, definiamo in S la funzione $G(x, y; \lambda)$ nel modo che segue.

Poniamo:

$$\begin{aligned} &G(x, y; \lambda) = f(x, y; \lambda) &&\text{in } D, \\ &G(x, y; \lambda) = f(x, y_0 + M; \lambda) &&\text{per } y \geq y_0 + M, \\ &G(x, y; \lambda) = f(x, y_0 - M; \lambda) &&\text{per } y \leq y_0 - M. \end{aligned}$$

La $G(x, y; \lambda)$ così definita risulta continua rispetto a (y, λ), misurabile rispetto a x e lipschitziana rispetto a y nella striscia S soddisfacendo ivi, per le (27), (29), alle limitazioni:

$$|G(x, y; \lambda)| < \chi(x) \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &G(x_1, y; a) \leq \nu \qquad &[G(x_1, y; a) \geq \nu] \\ &G(x_1, y; b) \geq \nu \qquad &[G(x_1, y; b) \leq \nu] \end{aligned} \tag{31}$$

e nei punti (x_1, y, λ) risulta continua rispetto a (x, y, λ).

Si osservi inoltre che la soluzione $y(x \mid \lambda)$ dell'equazione

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} G(t, y; \lambda)\, dt$$

è derivabile nel punto x_1 perchè $G(x, y(x \mid \lambda); \lambda)$ è continua in x_1.

Inoltre, poichè $y(x \mid \lambda)$ dipende con continuità dal parametro λ, lo stesso accade per $y'(x_1 \mid \lambda) = G(x_1, y(x_1 \mid \lambda); \lambda)$.

Per le (31), si ha $y'(x_1 \mid a) \leq \nu$ e $y'(x_1 \mid b) \geq \nu$ e quindi ragionando come nel n. 1 si vede che il problema

$$\begin{cases} y'(x) = G(x, y(x); \lambda) \\ y(x_0) = y_0\,, \; y'(x_1) = \nu \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, con $y_0(x)$ assolutamente continua in i.

Inoltre, dalle (28) e (30) segue

$$| y_0(x) - y_0 | \leq M$$

in tutto i e quindi $[\lambda_0, y_0(x)]$ è anche una soluzione del problema (26), per $\lambda = \lambda_0$. La condizione di Lipschitz si elimina poi con procedimento adoperato nel n. 1 del mio lavoro citato per secondo in (1).