Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Enrico Magenes

Un'osservazione sui teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una *N*-cella

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 19 (1950), p. 108-113

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1950__19__108_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN'OSSERVAZIONE SUI TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI IN TRASFORMAZIONI PLURIVALENTI DI UNA N-CELLA

Nota (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Padova*).

1. – Recentemente è stato studiato da parecchi Autori il problema dell'esistenza di punti in trasformazioni semicontinue e plurivalenti di una *n-cella*, il cui interesse è stato messo in rilievo per primo da J. VON NEUMANN (1).

Ecco di che si tratta: nello spazio reale ed euclideo Σ_n si abbia una *n-cella* I e una trasformazione T, che faccia corrispondere ad ogni punto P di I un continuo $T(P)$ di Σ_n e che sia *semicontinua superiormente* (cioè per ogni P di I, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, sia possibile trovare un $\sigma > 0$ tale che, se P' dista da P meno di σ, $T(P')$ sia contenuto nell'ε-intorno n-dimensionale aperto di $T(P)$). Sotto quali condizioni esiste almeno un punto P^* appartenente a $T(P^*)$?

Risultati sono stati ottenuti, nell'ipotesi che T trasformi tutto I o almeno la sua frontiera in un sottoinsieme di I stesso, sopratutto da S. EILEMBERG e D. MONTGOMERY e da O. H. HAMILTON (2), *particolarizzando la natura del continuo* $T(P)$ (senza

(*) Pervenuta in Redazione il 12 novembre 1949.

(1) V. ad es. J. VON NEUMANN – O. MORGENSTERN: *Theory of games and economic behavior* – Princeton – 1947; pag. 154.

(2) S EILEMBERG, D. MONTGOMERY: *Fixed point theorems for multivalued trasformations* (American Journal of Mathematics – LXVIII – 1946 – pp. 214 – 222); O. H. HAMILTON: *A fixed point theorem for upper semicontinuous trasformation of n-cells for which the images of points are non acyclic continua* (Duke Math. Journal – 14 – 1947 – pp. 689 - 693).

di che il punto P^* potrebbe anche non esserci, come si può vedere per es. nel lavoro citato di HAMILTON).

Ultimamente io sono stato portato [3], nello studiare un'interessante questione di topologia del Σ_n, ad estendere il problema, considerando trasformazioni in cui l'insieme $T(P)$ non fosse composto da *un solo* continuo. Precisamente si supponga che la trasformazione T soddisfi alle seguenti condizioni:

α') *$T(P)$ è un insieme chiuso;*

α'') *è semicontinua superiormente* (nel senso sopradetto);

α''') *se $t(P)$ è una porzione chiusa, non vuota e isolata di $T(P)$* (cioè tale che sia chiuso anche l'insieme $T(P) - t(P)$) *la distanza di $T(P)$ da $t(P)$* [4] *tende a zero al tendere di P' a P.*

Il problema, così posto, presenta notevoli difficoltà già nel caso che $T(P)$ sia formato da *un numero finito di componenti.*

Se questo numero è *costante* al variare di P in I, allora si vede facilmente [5] che si può *estrarre* dalla T almeno una nuova trasformazione che ad ogni punto faccia corrispondere un solo continuo. Ma *se esso varia con P*, le difficoltà crescono notevolmente.

(3) E. MAGENES: *Proprietà topologiche di certi insiemi di punti e teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una r-cella in sè* (Giornale di Matematiche di BATTAGLINI – Vol. 78 – (1948–49) pp. 168–181). Colgo l'occasione per avvertire che ivi mi sono sfuggiti due *lapsus calami:*

1) nella nota (2) a pag. 169 citando il lavoro di EILEMBERG e MONTGOMERY ho scritto *Annals* of Mathematics anzichè *American Journal* of Mathematics;

2) ho sempre scritto "semicontinuità *inferiore*" e "trasformazioni semicontinue *inferiormente*" anzichè "semicontinuità *superiore*" e "trasformazioni semicontinue *superiormente*" come avrei dovuto fare per mantenere la nomenclatura in uso; quindi la parola *inferiormente* va sostituita con quella *superiormente* a pag. 170, riga 22; pag. 174, righe 17 e 20; pag. 175 nota (11), e la parola *inferiore* va sostituita con quella *superiore* a pag. 170, nota (3) e pag. 174, riga 9.

(4) Per distanza di due insiemi E ed E' s'intende qui l'estremo inferiore dell'insieme delle distanze dei punti di E da quelli di E'.

(5) Il fatto è dimostrato nei numeri 6 e 7 della nota citata in (3).

In questa nota esporrò alcune semplici osservazioni in proposito, che mi sembrano abbastanza utili. L'idea di ricondurre il problema al caso di un solo componente, che potrebbe sembrare utile in analogia col caso di un numero costante di componenti, si rivela in generale inefficace, come mostrerò con un esempio (n. 3).

Solo in certi casi è possibile dare un procedimento all'uopo: nel n. 2 lo farò appunto per un certo tipo di trasformazioni, nelle quali $T(P)$ sia formato al più da due componenti.

2. - Si supponga per semplicità che I sia l'ipercubo:

$$I: \quad 0 \leq x_i \leq 1 \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n)$$

e si consideri dunque la trasformazione T di I che soddisfi alle condizioni $\alpha')$, $\alpha'')$, $\alpha''')$ e che *ad ogni P di I faccia corrispondere un insieme $T(P)$ di al più due componenti.*

Il sottoinsieme H dei punti P di I tali che $T(P)$ sia formato da un solo componente è, per la condizione $\alpha'')$, chiuso; dunque il complementare $C(H)$ rispetto ad I è formato da al più un'infinità numerabile di domini [6] $\{H_r\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$. *Facciamo l'ipotesi che ognuno di questi H_r possa considerarsi come il limite di una successione non decrescente di n-celle $C_{p,r}$: $H_r = \lim\limits_{p \to +\infty} C_{p,r}$* [7].

Possiamo allora costruire una nuova trasformazione T^* di I nel seguente modo.

Poniamo anzitutto $T^*(P) = T(P)$ se P appartiene ad H. Fissato poi un qualunque numero intero positivo m, si divida I in m^n ipercubi uguali, che chiameremo M_m, mediante i sistemi di Σ_{n-1} di equazioni rispettivamente

$$x_i = \frac{1}{m}, \ \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

[6] Cioè di insiemi aperti e connessi.

[7] Ciò va inteso nel senso solito della teoria degli insiemi, per cui dunque H_r risulta essere l'insieme somma delle $C_{p,r}$ $(p = 1, \ldots)$.

Si consideri poi in H_r $(r = 1, 2, \ldots)$ un suo punto P_r e si fissi uno dei due componenti di $T(P_r)$, che diremo $t(P_r)$(8); si indichi quindi con $A_{m,r}$ quello dei componenti dell'insieme formato dagli ipercubi M_m, che sono interni ad H_r, che contiene P_r; e si osservi che la successione degli $A_{m,r}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ è non decrescente ed ha per limite H_r. Possiamo anche dire che, in virtù della ipotesi più sopra fatta circa H_r, $A_{m,r}$ (se non è vuoto) è una *n-cella*.

Per ogni punto P di $A_{m,r}$ l'insieme $T(P)$ è formato da due componenti. Possiamo allora far corrispondere ad ogni P di $A_{m,r}$ *uno ed uno solo*, $t(P)$, dei due componenti di $T(P)$ in modo che a P_r corrisponda $t(P_r)$ e che la trasformazione così definita di $A_{m,r}$ sia semicontinua superiormente in tutto $A_{m,r}$. Ciò segue senz'altro dal n. 6 della Nota citata in (3), tenendo presente anche il n. 2 della stessa Nota, con una costruzione corrispondente a quella che ho ivi definita per determinare gli insiemi chiamati *τ-nuclei*, costruzione che anche ora è possibile definire, perchè $A_{m,r}$ è una *n-cella* formata da un numero finito di ipercubi M_m.

Essendo la scelta di $t(P_r)$ indipendente da m ed essendo $\lim\limits_{m \to +\infty} A_{m,r} = H_r$, viene così individuato in corrispondenza a ogni P di H_r uno dei componenti $t(P)$ di $T(P)$, in modo che se poniamo

$$T^*(P) = t(P) \quad \text{per } P \text{ in } H_r \qquad (r = 1, 2 \ldots),$$

la trasformazione T^* resta definita in tutto I e ivi risulta semicontinua superiormente, in virtù anche del fatto che $T(P)$ in H è formato da un solo componente e che la T è semicontinua superiormente.

Dunque mediante la T^* il problema viene riportato al caso che il trasformato di ogni punto sia un solo continuo.

Ne risulta per es. che se alle ipotesi finora poste su T, aggiungiamo quella che *i componenti di* $T(P)$ *siano continui aci-*

(8) È ovvio che queste scelte di P_r e $t(P_r)$ si possono rendere indipendenti del postulato di Zermelo.

clici relativamente ad un determinato campo G di coefficienti e che T trasformi I in un suo sottoinsieme, allora esiste certamente almeno un punto unito, in virtù dei risultati di EILEMBERG e MONTGOMERY.

OSSERVAZIONE. - Si osservi che nel procedimento surriferito il fatto che $T(P)$ sia composto da al più due componenti non è essenziale; esso vale, ferme stando tutte le altre ipotesi, anche nel caso che, per ogni P di $C(H)$, $T(P)$ sia formato da un numero costante di componenti.

3. - Nel numero precedente si è potuto *estrarre* da ogni $T(P)$ uno dei suoi componenti in modo da ottenere una trasformazione T^* semicontinua superiormente, per cui $T^*(P)$ fosse formato da un solo continuo. Ciò però non è in generale possibile.

Si consideri infatti il seguente esempio.

Nel piano (r, θ) (coordinate polari) sia I il cerchio di raggio 1 e centro l'origine O e T la trasformazione così costruita.

Dette r e θ le coordinate del punto P di I:

se $r = 0$ oppure $r = 1$ sia $T(P) = P$;

se $0 < r < 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $T(P)$ sia formato dai due estremi, $t_1(P)$ e $t_2(P)$, del segmento posto sul semiraggio OP, il cui punto di mezzo sia P e la cui lunghezza sia rispettivamente uguale a $\frac{r}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} - \frac{r}{2}$ secondo che sia $0 < r < \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < r < 1$,

se $0 < r < 1$, $\pi < \theta < 2\pi$, $T(P)$ sia formato dai due estremi, $t_1(P)$ e $t_2(P)$, del segmento parallelo al semiraggio polare $\theta = 0$, il cui punto di mezzo sia P e la cui lunghezza sia rispettivamente uguale a $\frac{r}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} - \frac{r}{2}$ secondo che sia $0 < r < \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < r < 1$.

La trasformazione T fa dunque corrispondere ad ogni punto di I uno o due punti e soddisfa evidentemente anche alle condizioni α'') e α'''). Non è però possibile *estrarre* da essa una trasformazione univalente e continua di I in un suo sottoinsieme, cioè far corrispondere ad ogni P uno solo dei componenti di $T(P)$ in modo da ottenere una trasformazione univalente e continua.

Infatti per ogni trasformazione T^* univalente e continua, se P percorre una curva continua e chiusa, anche $T^*(P)$ deve percorrere una curva continua e chiusa, mentre nel nostro caso supponendo di far percorrere una sola volta a P una qualunque delle circonferenze di raggio $r < 1$ e centro O, partendo per es. da $P(r, 0)$, otteniamo che per continuità $t_1(P(r, 0))$ si trasforma in $t_2(P(r, 0))$ e $t_2(P(r, 0))$ in $t_1(P(r, 0))$.

Si osservi infine anche che il ragionamento del numero precedente non è applicabile a questo esempio, appunto perchè i domini H_r (che qui si riducono ad uno solo: il cerchio stesso privato dell'origine e della frontiera) non si possono considerare come limiti di una successione di bicelle.