

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

Un criterio di esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche piane

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 18 (1949), p. 68-114

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__68_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN CRITERIO DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI IN TRASFORMAZIONI TOPOLOGICHE PIANE

Memoria () di ENRICO MAGENES (a Pisa).*

Accanto al classico risultato di BROUWER sull'esistenza di almeno un punto unito in una trasformazione topologica di una bicella (insieme omeomorfo ad un cerchio) in sè (o in una sua parte), sono noti anche altri teoremi di punti uniti in trasformazioni topologiche di una bicella, particolarmente per opera di E. SPERNER, B. v. KERÉKJÁRTÓ e G. SCORZA DRAGONI (1). Non è stato invece molto studiato il caso che l'insieme piano che si considera non sia una bicella (2).

Nel presente lavoro considero appunto insiemi piani la cui frontiera sia costituita da una curva chiusa continua anche non semplice, soddisfacente ad opportune condizioni, e dimostro un teorema di esistenza di punti uniti in una trasformazione topologica di questo insieme, il quale si riduce, nel caso particolare che la curva frontiera dell'insieme stesso sia semplice, ad un noto teorema di G. SCORZA DRAGONI (3).

(*) Pervenuta in Redazione il 24 settembre 1948.

(1) Per la bibliografia sull'argomento rimando a G. SCORZA DRAGONI: *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [Ann. di Mat. pura e appl., (4) - XXV - 1946 - pagg. 43-65].

(2) A parte i noti studi intorno al celebre « ultimo teorema » di POINCARÉ, si conoscono risultati di BROUWER, KERÉKJÁRTÓ e FEIGL sulle trasformazioni topologiche in sè di domini n volte connessi la cui frontiera sia costituita da $n + 1$ curve chiuse semplici; ved. B. v. KERÉKJÁRTÓ: *Vorlesungen über Topologie* - Berlin, 1923 - pagg. 199-203; G. FEIGL: *Fixpunktsätze für n -dimensionale Mannigfaltigkeiten* [Math. Ann. - B. 98, (1927) - pagg. 355-358].

(3) - ved. luogo cit. in (1): teorema VI, pag. 57.

1. - Definizione di curva Γ .

Intenderemo per «curva Γ » una curva chiusa continua orientata del piano π soddisfacente alle seguenti condizioni:

I) *Sia composta di un numero finito μ_i ($i = 1, \dots, m$; $m \geq 2$) di archi semplici aperti consecutivi aventi due a due a comune al più un estremo.*

Secondo questa condizione I) esiste dunque una corrispondenza univoca e continua φ tra una circonferenza orientata k e la curva Γ , in modo che si possa dividere k in m archi consecutivi $\widehat{P_{i-1}, P_i}$ mediante i punti $P_0 \dots P_i \dots P_m = P_0$, susseguentesi secondo l'ordine fissato su k , cosicchè la φ su ogni arco interno a uno qualunque degli archi $\widehat{P_{i-1}, P_i}$ sia anche biunivoca e bicontinua (l'arco di k $\widehat{P_{i-1}, P_i}$ e l'arco μ_i di Γ sono dunque in corrispondenza topologica). La curva Γ potrà avere dei punti multipli, in numero finito negli estremi degli archi $\mu: A_\nu$ ($\nu = 1, \dots, h$). Se A_ν è secondo estremo di un certo arco μ_{i_r} , allora è anche primo estremo dell'arco μ_{i_r+1} ($\mu_{m+1} = \mu_1$), sicchè gli archi μ cui appartiene (come estremo) A_ν si possono dividere in coppie di archi consecutivi del tipo di (μ_{i_r}, μ_{i_r+1}) .

Sia \bar{I}_ν un intorno circolare chiuso di A_ν tale che in esso non cada nessun altro degli estremi degli archi μ cui appartiene A_ν e nessuno degli altri punti multipli di Γ . Allora il sottoarco $\bar{\mu}_{i_r}$ di μ_{i_r} avente per secondo estremo A_ν e costituito, tranne il primo estremo, di punti interni di \bar{I}_ν e il sottoarco $\bar{\mu}_{i_r+1}$ di μ_{i_r+1} , avente per primo estremo A_ν e costituito, tranne il secondo estremo, di punti interni di \bar{I}_ν , formano complessivamente una curva semplice aperta, che diremo γ_r^ν e che possiede A_ν come punto interno. Analogamente si faccia, e una volta per sempre, per tutte le coppie di archi μ del tipo (μ_{i_r}, μ_{i_r+1}) che hanno A_ν per estremo. Otterremo così, per ogni A_ν un numero finito p_ν di archi semplici aperti γ_r^ν ($r = 1, \dots, p_\nu$) per ciascuno dei

quali A_ν è punto interno. Supporremo allora che Γ soddisfi anche la seguente condizione:

II) *gli archi γ_r^ν ($r = 1, \dots, p_\nu$) cui appartiene A_ν si « tocchino » in A_ν a due a due.*

Intendiamo qui la definizione di « contatto » secondo G. SCORZA DRAGONI (4), per cui due archi semplici aperti c_0 e c_1 si toccano in un punto interno comune A , se esiste un intorno circolare I di A tale che, detti c'_0 e c'_1 gli archi di c_0 e c_1 contenenti A e costituiti tutti, tranne gli estremi, di punti interni di I , succede che tutti i punti di c'_1 (tranne A) appartengono ad una sola delle due regioni semplici di JORDAN (5) in cui c'_0 divide I e analogamente tutti i punti di c'_0 (tranne A) appartengono a una sola delle due regioni semplici di JORDAN in cui c'_1 divide I .

2. - Definizione di ρ — approssimazione $\Gamma(\rho)$ di Γ .

a) Poichè gli A_ν e i μ sono in numero finito, risulta, dalla definizione di « contatto » surriferita, che esiste un numero $R > 0$, che potremo senz'altro supporre minore della metà delle distanze dei punti A_ν a due a due tra di loro, tale che per ogni A_ν ($\nu = 1, \dots, h$) e per ogni coppia di archi $\gamma_r^\nu, \gamma_s^\nu$ che si toccano in A_ν , risulti:

I) *gli estremi γ_r^ν e γ_s^ν sono esterni al R — intorno circolare aperto I_R di A_ν ;*

II) *γ_r^ν e γ_s^ν hanno il solo punto A_ν a comune in I_R ;*

III) *detti $\bar{\gamma}_r^\nu$ e $\bar{\gamma}_s^\nu$ gli archi di γ_r^ν e γ_s^ν contenenti A_ν e costituiti di punti interni a I_R , tranne gli estremi che si trovano sulla frontiera j_R di I_R , succede che tutti i punti di $\bar{\gamma}_s^\nu$ (tranne A_ν) appartengono ad una sola delle due*

(4) G. SCORZA DRAGONI: *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* [Memorie Acc. d'Italia - Vol. IV (1933), pagg. 159-212], § 1, n. 4, pag. 163.

(5) Intendiamo per regione semplice di Jordan $J(\omega)$ interna a una curva chiusa semplice ω l'insieme dei punti che ω separa dall'infinito.

regioni semplici di Jordan in cui I_R è diviso da $\bar{\gamma}_r^y$ e reciprocamente tutti i punti di $\bar{\gamma}_r^y$ (tranne A_v) appartengono ad una sola delle due regioni semplici di Jordan in cui I_R è diviso da $\bar{\gamma}_s^y$.

Fissati ora un qualunque A_v e una qualunque coppia $\bar{\gamma}_r^y, \bar{\gamma}_s^y$; indichiamoli per brevità con A, γ_r, γ_s . Gli archi $\bar{\gamma}_r^y, \bar{\gamma}_s^y$, che indicheremo con $\bar{\gamma}_r, \bar{\gamma}_s$, abbiano per estremi i punti \bar{P}_r, \bar{Q}_r e \bar{P}_s, \bar{Q}_s (v. fig. 1). Preso $\rho > 0$ e $< R$, siano $P_r (P_s)$ e $Q_r (Q_s)$ rispettivamente il primo e l'ultimo punto che si incontrano su $\bar{\gamma}_r (\bar{\gamma}_s)$ appartenenti alla frontiera j_ρ del ρ — intorno circolare aperto I_ρ di A (ricordiamo che su Γ , mediante la φ , è fissato un verso corrispondente a quello fissato su K); e sia $\gamma_r(\rho) (\gamma_s(\rho))$ il sottoarco di $\bar{\gamma}_r (\bar{\gamma}_s)$ di estremi P_r e $Q_r (P_s$ e $Q_s)$.

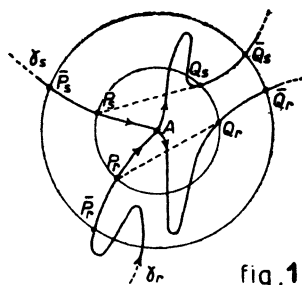


fig. 1

Diciamo $\rho_r (\rho_s)$ la massima distanza dei punti di $\gamma_r(\rho) (\gamma_s(\rho))$ da A .

È evidente che ρ_r e ρ_s dipendono da ρ e sono $< R$. Si può dimostrare che al tendere di ρ a zero, anche ρ_r e ρ_s tendono a zero; basta pensare che, in virtù della condizione I) del n. 1, la φ pone una condizione topologica tra $\bar{\gamma}_r$ e un opportuno arco di k (e analogamente per $\bar{\gamma}_s$).

Dico anche che sulla circonferenza j_ρ le due coppie di punti (P_r, Q_r) e (P_s, Q_s) non si separano.

Infatti, osserviamo che su j_R , in virtù di come si è scelto R , le coppie di punti (\bar{P}_r, \bar{Q}_r) e (\bar{P}_s, \bar{Q}_s) non si separano. Fissato quindi un verso delle rotazioni nel piano π , supponiamo che essi si susseguano su j_R nell'ordine $(\bar{P}_r, \bar{P}_s, \bar{Q}_s, \bar{Q}_r)$. Allora anche i punti P_r, Q_r, P_s, Q_s si susseguano su j_ρ nell'ordine (P_r, P_s, Q_s, Q_r) . Osserviamo infatti che, detti α_r e β_r gli archi di $\bar{\gamma}_r$ di estremi \bar{P}_r, P_r e Q_r, \bar{Q}_r e analogamente α_s e β_s gli

archi di $\bar{\gamma}_s$ di estremi \bar{P}_s, P_s e Q_s, \bar{Q}_s , in virtù delle proprietà II) e III), $\alpha_r, \beta_r, \alpha_s, \beta_s$ appartengono, tranne gli estremi, alla regione interna alla corona circolare di frontiera j_ρ e j_R e non hanno a due a due punti a comune. Supponiamo allora, per es., che su j_ρ i punti suddetti si susseguano nell'ordine (P_s, P_r, Q_s, Q_r) . Sia E la regione semplice di Jordan interna alla curva semplice chiusa costituita da α_r , dall'arco di j_ρ $\widehat{P_r Q_r}$, da β_r e dall'arco di j_R $\widehat{Q_r P_r}$ che non contiene i punti \bar{P}_s e \bar{Q}_s . L'arco α_s , avendone per estremo P_s e dovendo, gli estremi eccettuati, essere interno alla corona circolare suddetta, congiungerà per ciò il punto \bar{P}_s , che è esterno ad E , con punti interni a E . Ci sarà perciò almeno un punto S comune a α_s e alla frontiera di E e S dovrà essere distinto dagli estremi di α_s e perciò sarà interno alla corona circolare; ne segue che S apparterrà o a α_r o a β_r , ma ciò è assurdo.

In modo del tutto analogo si dimostra che non sono possibili gli ordinamenti dei quattro punti suddetti diversi da quello (P_r, P_s, Q_s, Q_r) .

b) Sia ora d_ν la distanza da A_ν dell'insieme dei punti di Γ che non sono interni a nessuno dei $\bar{\gamma}_r^\nu$ ($r = 1, 2, \dots, p_\nu$; v. a) III) risulterà $d_\nu > 0$, essendo il detto insieme chiuso. Sia allora ρ' il più piccolo dei d_ν ($\nu = 1, \dots, h$).

Per $\rho > 0$ e $< \rho'$, diciamo $\gamma_r^\nu(\rho)$ il sottoarco di $\bar{\gamma}_r^\nu$ ($\nu = 1, \dots, h$; $r = 1, \dots, p_\nu$) di estremi $P_r^\nu(\rho)$ e $Q_r^\nu(\rho)$, dove $P_r^\nu(\rho)$ e $Q_r^\nu(\rho)$ sono rispettivamente il primo e l'ultimo punto che s'incontrano su $\bar{\gamma}_r^\nu$ e che appartengono alla frontiera j_ρ del ρ — intorno circolare aperto I_ρ di A_ν . ($\gamma_r^\nu(\rho)$, $P_r^\nu(\rho)$, $Q_r^\nu(\rho)$ sono dunque l'arco e i punti che per semplicità in a) si erano indicati con $\gamma_r(\rho)$, P_r e Q_r). Per quanto si è dimostrato in a), le coppie $(P_r^\nu(\rho), Q_r^\nu(\rho))$ ($r = 1, \dots, p_\nu$) su j_ρ non si separano a due a due. Se quindi a ogni $\gamma_r^\nu(\rho)$ sostituiamo la corda di j_ρ di estremi $P_r^\nu(\rho)$ e $Q_r^\nu(\rho)$, le p_ν corde così ottenute non hanno due a due punti a comune.

Ripetendo questa operazione per ogni A_ν ($\nu = 1, \dots, h$) veniamo così a « sciogliere » i punti multipli di Γ e la nuova curva che così otteniamo da Γ , in virtù anche dal fatto che è $\rho' \leq d_\nu$ ($\nu = 1, \dots, h$) è priva di punti multipli ed è quindi una curva semplice chiusa, che indicheremo con $\Gamma(\rho)$ e diremo « ρ — approssimazione » di Γ ; potremo evidentemente considerare $\Gamma(\rho)$ in corrispondenza topologica φ_ρ con la circonferenza k , la φ_ρ coincidendo con le φ nei punti di k , cui non corrispondono, secondo la φ , su Γ punti degli archi $\gamma_r^\nu(\rho)$ ($\nu = 1, \dots, h$; $r = 1, \dots, p_\nu$).

Osserviamo ora che, se diciamo $R_r^\nu(\rho)$ la massima distanza dei punti di $\gamma_r^\nu(\rho)$ da A_ν , da quanto si è visto in *a*), risulta che $R_r^\nu(\rho)$ tende a zero con ρ . Diciamo $R(\rho)$ il più grande degli $R_r^\nu(\rho)$ ($r = 1, 2, \dots, p_\nu$; $\nu = 1, \dots, h$). È pure $\lim_{\rho \rightarrow 0} R(\rho) = 0$.

In virtù delle corrispondenze φ e φ_ρ i punti P e P_ρ corrispondenti ad uno stesso punto di k (e che considereremo quindi tra di loro corrispondenti) distano tra di loro per non più di $2R(\rho)$; ne segue allora che per ρ tendente a zero, $\Gamma(\rho)$ tende a Γ , nel senso che il massimo della distanza tra due punti P e P_ρ corrispondentisi tende a zero con ρ .

Diamo a ρ i valori $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$; per $n \geq \bar{n}$, in modo che risulti $\frac{1}{n} < \rho'$, le curve $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ daranno luogo ad una successione di « approssimazioni » della Γ , che per $n \rightarrow +\infty$, convergerà a Γ .

c) Sia ora t una trasformazione topologica del piano π in sè (o in una sua parte) che trasformi Γ in una curva Γ' . La curva Γ' sarà evidentemente dello stesso tipo di Γ (composta cioè di m archi μ'_i ($i = 1, \dots, m$) semplici aperti e soddisfacenti alle condizioni I) e II) del n. 1), in virtù del fatto che la nozione di « contatto » è invariante per trasformazioni topologiche ⁽⁶⁾. E, sempre perchè t è topologica, anche la trasformata $\Gamma'(\rho)$ di

⁽⁶⁾ Vcd. G. SCORZA DRAGONI: Memoria cit. in (4), § 1, n. 4, pag. 164.

una ρ — approssimazione $\Gamma(\rho)$ di Γ , è una curva semplice chiusa; e per ρ tendente a zero, $\Gamma(\rho)$ tende a Γ nel senso specificato in *b*), intendendo per corrispondenti su Γ e $\Gamma(\rho)$ due punti trasformati nella τ di due punti corrispondenti su Γ e $\Gamma(\rho)$.

3. — Domini contigui Δ di Γ .

a) Ogni curva Γ , essendo un insieme chiuso, determina nel piano π l'insieme dei suoi domini contigui, cioè dei componenti aperti e connessi del complementare di Γ rispetto a π .

Sia Δ uno di essi e sia δ la sua frontiera, che è quindi un sottoinsieme di Γ .

Dico che δ è un continuo limitato, composto da un numero finito di archi μ di Γ .

Osserviamo anzitutto che, poichè Γ è un continuo limitato, è certo che anche δ è un continuo limitato⁽⁷⁾.

Segue anche da qui che Δ è un dominio semplicemente connesso⁽⁸⁾.

Dimostriamo ora che se un arco μ ha un suo punto interno P (cioè diverso dagli estremi di μ) appartenente a δ , esso appartiene tutto a δ . Basterà per questo dimostrare che ogni altro punto Q interno a quel μ , appartiene a δ . Ora, poichè P è punto di accumulazione di Δ e per la definizione stessa di μ , potremo trovare un punto R di Δ e un arco semplice ν , di estremi Q e R , non avente punti a comune con Γ , ad eccezione di Q . Allora i punti di ν (Q eccettuato) appartengono a Δ e quindi anche Q appartiene a δ .

Per questa osservazione segue che, poichè ogni punto di Γ e quindi di δ appartiene a qualche arco μ e gli estremi dei μ stessi sono in numero finito, δ è formata da un certo numero finito di archi μ .

b) E' opportuno osservare che dal fatto che gli archi μ di Γ sono in numero finito e che uno stesso μ appartiene interamente alla frontiera di non più di 2 domini contigui Δ , si de-

⁽⁷⁾ Ved. ad es. B. v. ΚΕΡΕΚΛΑΡΤÓ: luogo cit. in ⁽²⁾, pag. 37.

⁽⁸⁾ Ved. ad es. luogo cit. in ⁽⁷⁾, pag. 105.

duce che Γ determina in π un numero finito di domini contigui Δ .

c) Considerando ora la trasformata Γ' di Γ secondo la trasformazione t introdotta nel n. 2 c), poichè Γ' è dello stesso tipo di Γ , possiamo dire che Γ' determina in π un numero finito di domini Δ' contigui a Γ' (trasformati dei Δ secondo la t) le cui frontiere δ' sono composte da un numero finito di archi μ' di Γ' .

4. - Regioni dei punti interni e dei punti esterni relativamente a Γ .

a) Diremo che un punto O , non appartenente a Γ , appartiene alla « regione dei punti interni a $\Gamma, J(\Gamma)$ » o alla « regione dei punti esterni a $\Gamma, E(\Gamma)$ » secondo l'ordine ⁽⁹⁾ di O rispetto a Γ è diverso o uguale a zero.

Una prima osservazione è la seguente: i punti appartenenti ad uno stesso dominio contiguo Δ di Γ hanno lo stesso ordine rispetto a Γ ⁽¹⁰⁾ e appartengono quindi tutti a $J(\Gamma)$ o a $E(\Gamma)$. Inoltre, se Γ' è la trasformata di Γ secondo la trasformazione t considerata nel n. 2 c), definite analogamente le regioni $J(\Gamma')$ e $E(\Gamma')$ risulta, in virtù del teorema dell'invarianza dell'ordine ⁽¹¹⁾, che t trasforma $J(\Gamma)$ in $J(\Gamma')$ ed $E(\Gamma)$ in $E(\Gamma')$. Indicheremo con $\bar{\Gamma}$ e $\bar{\Gamma}'$ gli insiemi $\Gamma + J(\Gamma)$ e $\Gamma' + J(\Gamma')$; $\bar{\Gamma}'$ risulterà perciò il trasformato di $\bar{\Gamma}$ secondo la t .

b) Sia data ora una successione $\left\{ \Gamma \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$ di « approssimazione » della curva Γ (v. n. 2 b)); per n sufficientemente grande, $\Gamma \left(\frac{1}{n} \right)$ è una curva chiusa semplice. Si potrà quindi parlare per essa di regione interna $J \left(\Gamma \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ e di regione esterna

⁽⁹⁾ Ved. ad es. luogo cit. in (7), pag. 83.

⁽¹⁰⁾ Ved. ad es. luogo cit. in (7), pag. 84.

⁽¹¹⁾ Ved. ad es. P. ALEXANDROFF - H. HOPF; *Topologie* - Berlin (1935), pag. 476.

$E\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ nel senso specificato dal teorema di Jordan; ma per un noto teorema ⁽¹²⁾, queste $J\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ ed $E\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ coincidono rispettivamente con la « regione dei punti interni a $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ » e con « quella dei punti esterni a $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ », definite in a) ricorrendo alla nozione di ordine rispetto ad una curva.

È ora facile dimostrare che per ogni punto P di $J(\Gamma)$ esiste un intorno I_p di P , tale che ogni punto di I_p appartiene sia a $J(\Gamma)$ che a $J\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, per n sufficientemente grande.

Infatti sia d la distanza di P da Γ . Sia I_p il cerchio di raggio $\frac{d}{2}$ e di centro P . Prendiamo n_p in modo che per $n \geq n_p$ risulti $R\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{d}{12}$ (ved. n. 2 b)). Allora le distanze di un qualunque punto Q di I_p da Γ e da $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ sono rispettivamente $\geq \frac{d}{2}$ e $\geq \frac{d}{3}$, mentre la distanza tra i punti di Γ e di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ corrispondentisi secondo le corrispondenze φ e $\varphi_{\frac{1}{n}}$ (ved. n. 2 b)) risulta $\leq 2R\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{d}{6}$. Allora l'ordine di Q rispetto a Γ e a $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ è lo stesso ⁽¹³⁾, e quindi Q appartiene sia a $J(\Gamma)$ che a $J\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

In modo del tutto analogo si dimostra che per ogni punto di $E(\Gamma)$ esiste un intorno che lo contiene, tale che ogni suo punto appartiene sia a $E(\Gamma)$ che a $E\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, per n sufficientemente grande.

⁽¹²⁾ Ved. ad es. luogo cit. in (1), pagg. 84-85.

⁽¹³⁾ Ved. ad es. luogo cit. in (8), pag. 84.

c) È opportuno per il seguito rilevare anche che la frontiera di $\bar{\Gamma} = \Gamma + J(\Gamma)$ è data da Γ .

Anzitutto è evidente che un punto di $J(\Gamma)$ non può essere un punto frontiera di $\bar{\Gamma}$, perchè $J(\Gamma)$ è un insieme aperto, tutti i punti di un certo intorno di un suo punto avendo lo stesso ordine rispetto a $\bar{\Gamma}$.

Dimostriamo quindi che ogni punto P di Γ è « di frontiera » per $\bar{\Gamma}$, cioè dimostriamo che preso un qualunque intorno I_ε circolare di raggio ε del punto P , ad I_ε appartengono sia punti di $J(\Gamma)$ che punti di $E(\Gamma)$ (14).

Supponiamo senz'altro che P sia un punto multiplo di Γ ; nel caso che P sia semplice per Γ le considerazioni che faremo varrebbero ancora e sarebbero anzi più semplici (15). Prendiamo allora una approssimazione $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ di Γ , con n tale che risulti $R\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{5}$ (supporremo anche che ε sia minore della metà della più piccola delle distanze dei punti multipli di Γ tra di loro a due a due).

Consideriamo poi i cerchi di centro P e di raggi rispettivamente $R\left(\frac{1}{n}\right)$, $4R\left(\frac{1}{n}\right)$, $5R\left(\frac{1}{n}\right)$. Nella corona circolare delimitata dalla circonferenza di raggio $R\left(\frac{1}{n}\right)$ e $5R\left(\frac{1}{n}\right)$, Γ e $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ coincidono, cioè i punti di Γ interni a questa corona circolare sono anche punti di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e viceversa. Ne viene che i punti non appartenenti a Γ (e quindi a $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$) e interni alla

(14) Osserviamo che indirettamente questo risultato serve anche ad assicurare l'esistenza delle regioni $J(\Gamma)$ e $E(\Gamma)$.

(15) Naturalmente si potrebbe anche, e più rapidamente, limitarsi a dimostrare l'affermazione nel caso che P sia semplice, dato che i punti multipli sono punti di accumulazione di punti semplici; ma preferisco mettere in rilievo il ragionamento del testo, perchè mi sarà utile anche nel seguito.

corona circolare delimitata dalle circonferenze di raggio $4R\left(\frac{1}{n}\right)$ e $5R\left(\frac{1}{n}\right)$ hanno, rispetto a Γ e $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, lo stesso ordine, poichè le distanze di uno di essi dai punti corrispondenti (secondo la φ e la $\varphi_{\frac{1}{n}}$; ved. n. 2 b)) su Γ e $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ è maggiore di quella dei due punti stessi di Γ e $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ considerati ⁽¹⁶⁾; ma nella corona circolare suddetta esistono certamente punti sia di $J\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ che di $E\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ e perciò, poichè $5R\left(\frac{1}{n}\right) < \epsilon$, concludiamo che in I_ϵ esistono punti sia di $J(\Gamma)$ che di $E(\Gamma)$.

d) I risultati di b) e c) valgono naturalmente anche per la trasformata Γ' di Γ , in quanto le nozioni ivi adoperate sono invarianti per trasformazioni topologiche.

5. - Involucro di Γ e Γ' rispetto ad un punto.

a) Siano sempre nel piano π la curva Γ e la trasformata Γ' di Γ secondo la t . Per quanto si è visto nel n. 4 a), $J(\Gamma)$ sarà composta da un certo numero finito di domini contigui di $\Gamma: \Delta_r (r = 1, \dots, \bar{l})$ le cui frontiere diremo $\delta_r (r = 1, \dots, \bar{l})$. Corrispondentemente $J(\Gamma')$ risulterà composto dello stesso numero di domini contigui di $\Gamma': \Delta'_r$, corrispondenti ai Δ_r , le cui frontiere diremo δ'_r .

Supponiamo ora che $J(\Gamma)$ e $J(\Gamma')$ abbiano un punto O comune. O apparterrà ad un certo Δ_r e ad un certo Δ'_s (r e s in generale diversi).

Sia J l'insieme dei punti che si possono congiungere con O mediante una curva semplice aperta e priva di punti comuni con δ_r e δ'_s .

Sia j la frontiera di J .

(16) Ved. luogo cit. in (7) pag. 84.

Diremo j l'involucro di Γ e Γ' rispetto a O e J l'involucro di $J(\Gamma)$ e di $J(\Gamma')$ rispetto ad O . Porremo poi $\bar{J} = J + j$.

b) Anzitutto poichè il dominio J è determinato da δ_* e δ'_* , che sono continui limitati, j è un continuo limitato (17) e quindi J è un dominio semplicemente connesso (18).

Introduciamo ora una definizione: intenderemo per «arco β » un arco aperto semplice, il quale:

o sia un sottoarco di un arco $\bar{\mu}$ (indicheremo d'ora innanzi con $\bar{\mu}$ gli archi μ che compongono δ_ e con $\bar{\mu}'$ quelli μ' che compongono δ'_*) avente tutti i suoi punti interni (cioè diversi dagli estremi del β stesso) non appartenenti a δ'_* , e non contenuto in un altro arco dello stesso tipo:*

o sia un sottoarco di un arco $\bar{\mu}'$, avente i suoi punti interni non appartenenti a δ_ e non contenuto in un altro arco dello stesso tipo;*

o sia un sottoarco comune sia a un $\bar{\mu}$ che a un $\bar{\mu}'$, non contenuto in un altro dello stesso tipo.

Gli archi β , poichè sono privi due a due di punti interni a comune, sono al più un'infinità numerabile.

c) Se un arco β ha un suo punto interno (cioè diverso dagli estremi) appartenente ad j , esso appartiene interamente ad j .

La dimostrazione è la stessa sviluppata nel n. 3 a) per l'analoga proprietà degli archi μ .

d) Dimostriamo ora che gli archi β sono ovunque densi su j , nel senso che non è vuoto l'insieme E' dei punti interni ai β che appartengono ad j e E' è ovunque denso su j (19).

Dimostriamo per ciò che preso un qualunque punto P di j e un qualunque intorno circolare I di P , ad I appartengono punti

(17) ved. luogo cit. in (7) pag. 37; si ricordi anche che la somma di due continui con un punto a comune è un continuo.

(18) Ved. luogo cit. in (7), pag. 105.

(19) Questo risultato non è essenziale per il seguito e può quindi essere tralasciato.

che sono interni a qualcuno dei β e che appartengono ad j . Incominciamo col supporre che all'interno di I esista almeno un punto P_1 di j , il quale appartenga a δ_r e non δ'_r .

Poichè δ'_r è un insieme chiuso, esisterà allora un intorno circolare, I_1 di P_1 , contenuto in I , nel quale non cadano punti di δ'_r . Allora P_1 come punto di δ_r , o è un interno ad uno (e uno solo) arco $\bar{\mu}$, oppure è estremo di un numero finito di $\bar{\mu}$.

Nel primo caso, per la definizione stessa di « arco β »; P_1 appartiene senz'altro ad un arco β , il quale quindi, per quanto si è visto in c), appartiene tutto a j ; ne segue che in I esistono punti interni ad un β ed appartenenti ad j .

Nel secondo caso P_1 è estremo di un numero finito \bar{h} di archi $\bar{\mu} : \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_i, \dots, \bar{\mu}_{\bar{h}}$ (ved. n. 1) aventi a comune a due a due l'estremo P_1 e al più un altro estremo. È possibile allora, come si è osservato nel n. 2 a), determinare un intorno circolare aperto I_2 di P_1 di raggio r in modo che

1) I_2 sia interno a I_1 ;

2) r sia $\leq R$ (R ha il significato assegnatogli in 2 a); r potrebbe essere lo stesso R);

3) gli estremi dei $\bar{\mu}_i$ diversi da P_1 siano esterni a I_2 ;

4) detto $\bar{\mu}_i^*$ il sottoarco di $\bar{\mu}_i$ avente un estremo in P_1 e l'altro sulla frontiera di I_2 e costituito tutto di punti interni a I_2 (tranne l'estremo diverso da P_1), risulti che i $\bar{\mu}_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, \bar{h}$) abbiano a due a due solo il punto P_1 a comune. I_2 risulta con ciò diviso dai $\bar{\mu}_i^*$ in regioni semplici di Jordan a due a due senza punti a comune.

Osserviamo ora che i punti di Γ diversi da P_1 e che non siano interni a nessuno degli archi $\bar{\mu}_i^*$ ($i = 1, 2, \dots, \bar{h}$) formano un insieme chiuso che avrà quindi da P_1 una distanza positiva η .

Prendiamo allora un intorno circolare aperto I_3 di P_1 , di raggio minore di η e quindi contenuto in I_2 . I punti di Γ che appartengono a I_3 devono appartenere ad uno degli archi $\bar{\mu}_i^*$; inoltre in I_3 , poichè P_1 è un punto di j , ci sarà almeno un punto B di J . B apparterrà ad una ed una sola delle regioni in

cui I_2 è diviso dai $\bar{\mu}_i^*$; poichè non appartiene a nessuno degli stessi $\bar{\mu}_i^*$. Sia essa I' . Esiste allora l'involucro Ω di I' e di I_3 rispetto a B ⁽²⁹⁾. Ω è una regione semplice di Jordan i cui punti appartengono anche ad J ; infatti ad J appartiene per ipotesi B e inoltre ad Ω non possono appartenere nè punti di I' (Ω essendo contenuto in I_3) nè punti di Γ (poichè appartiene contemporaneamente ad I' e a I_3); dalla definizione stessa di J e di Ω segue dunque che Ω appartiene ad J .

Osserviamo ora che se $\bar{\mu}_{i_1}^*$ e $\bar{\mu}_{i_2}^*$ sono gli archi che delimitano I' in I_3 (e che quindi fanno parte della frontiera di I') la frontiera ω di Ω dovrà almeno contenere un arco λ appartenente a $\bar{\mu}_{i_1}^*$ o a $\bar{\mu}_{i_2}^*$. Infatti, se ciò non fosse, ω coinciderebbe con la stessa frontiera di I_3 e quindi I_3 dovrebbe appartenere ad I' ; ma ciò è assurdo perchè esistono punti della frontiera di I' (appartenenti a $\bar{\mu}_{i_1}^*$ o a $\bar{\mu}_{i_2}^*$) interni ad I_3 . L'arco λ fa dunque parte anche di j e appartenendo a $\bar{\mu}_{i_1}^*$ o a $\bar{\mu}_{i_2}^*$ è certamente un sottoarco di un arco β . Anche in questo caso risulta quindi che in I esistono punti interni ai β e appartenenti a j .

Supponiamo ora che in I esista almeno un punto P_1 di j , il quale appartenga a δ'_i e non a δ_i . In modo del tutto analogo a quanto si è ora fatto, si dimostra allora che in I esistono punti interni ai β ed appartenenti ad j .

Rimane quindi da considerare il caso che i punti di j interni a I siano contemporaneamente punti di δ_i e di δ'_i .

In questo caso, poichè i punti di δ_i e di δ'_i che siano estremi di archi $\bar{\mu}$ e $\bar{\mu}'$ sono in numero finito esisterà in I certamente un punto P_1 di j , che sia interno contemporaneamente a un $\bar{\mu}$

(29) Date le curve semplici e chiuse j_1 e j_2 e considerate le regioni $J(j_1)$ e $J(j_2)$ dei punti interni a j_1 e a j_2 , la definizione di involucro di $J(j_1)$ e $J(j_2)$ rispetto ad un punto O comune ad entrambi è quella stessa data nel n. 5 a), cioè l'insieme J dei punti che si possono unire ad O mediante una curva semplice aperta priva di punti comuni con j_1 e j_2 ; questa definizione è in accordo con quella posta da G. SCORZA DRAGONI nella memoria citata in (1) § 1, n. 5. Osserviamo però che G. SCORZA DRAGONI indica con J l'insieme, da noi chiamato con \bar{J} , cioè l'involucro J più la sua frontiera.

(diciamolo $\bar{\mu}_r$) e a un $\bar{\mu}'$ (diciamolo $\bar{\mu}'_s$) e di conseguenza a quelli soli. Si potrà inoltre trovare un intorno circolare I_1 di P_1 interno ad I e tale che i punti di Γ e Γ' ad esso appartenenti stiano su $\bar{\mu}_r$ e su $\bar{\mu}'_s$ (basta pensare che P_1 è interno sia a $\bar{\mu}_r$ che a $\bar{\mu}'_s$). In I_1 vi sono infiniti punti di j e questi devono essere, per l'ipotesi fatta, comuni a δ_r e a δ'_s e quindi a $\bar{\mu}_r$ e a $\bar{\mu}'_s$.

Sia $\bar{\mu}_r$ il sottoarco di $\bar{\mu}_r$ contenente P_1 , avente gli estremi sulla frontiera di I_1 e tutti gli altri punti interni ad I_1 . Sia E l'insieme dei punti di j appartenenti a $\bar{\mu}_r$; E non è vuoto, poichè ad esso appartiene certamente P_1 ed è inoltre chiuso.

Dico che E è ovunque denso su $\bar{\mu}_r$. Infatti, se ciò non fosse esisterebbero almeno due (poichè P_1 è interno a $\bar{\mu}_r$) archi contigui α_1 e α_2 di E su $\bar{\mu}_r$, non contenenti all'interno quindi nessun punto di j . Fissato un certo ordine su $\bar{\mu}_r$ (per es. quello già stabilito per Γ dalla corrispondenza φ) l'insieme E_1 dai punti di E compresi tra un punto interno di α_1 e un punto interno di α_2 non sarebbe vuoto e sarebbe chiuso. Ma anche l'insieme $j - E_1$ sarebbe chiuso, poichè i punti di j contenuti in I_1 devono appartenere a $\bar{\mu}_r$ e α_1 e α_2 sono due sottoarchi distinti di $\bar{\mu}_r$. Si è così scomposto j in due insiemi chiusi disgiunti; e ciò è assurdo, essendo j un continuo. Ne viene quindi che E è ovunque denso su $\bar{\mu}_r$; ma allora, poichè i punti di E appartengono anche a $\bar{\mu}'_s$, ne segue che $\bar{\mu}_r$ appartiene anche a $\bar{\mu}'_s$ ed è quindi un sottoarco di un arco β ; ma P_1 è interno a $\bar{\mu}_r$, dunque (ved. n. 5 c)) questo arco β appartiene per intero ad j e anche in questo caso in I esistono punti interni di β e appartenenti ad j .

6. - Insiemi \bar{K} , \bar{H} , $\bar{H}[\theta]$ relativi al punto 0.

a) Indichiamo con F l'insieme dei punti di j che o appartengono ad un arco β (di j), i cui punti interni appartengono solo a δ_r (indicheremo d'ora innanzi questi archi con $\bar{\beta}$) oppure siano punti multipli di Γ o di Γ' [questi ultimi saranno in nu-

mero finito e li indicheremo con Q_i ($i = 1, \dots, l^*$) intendendo che, se un punto multiplo di Γ e uno di Γ' coincidono, siano indicati con un solo Q_i . Relativamente ad F costruiremo ora degli insiemi \overline{K} nel modo seguente.

Per ogni $\overline{\beta}$ consideriamo l'insieme $K(\overline{\beta})$ dei punti di $\overline{\Gamma} - \overline{J}$ che possono unirsi con ogni punto P interno a $\overline{\beta}$ mediante una curva aperta continua, composta di un numero finito di archi semplici aperti consecutivi, appartenente a $\overline{\Gamma} - \overline{J}$ e avente con j il solo punto P a comune (diremo, anche nel seguito, « curva α » una curva aperta continua di questo tipo) ⁽²¹⁾. Sia poi $\overline{K}(\overline{\beta})$ il continuo formato da $K(\overline{\beta})$ e dai suoi punti di accumulazione. *Considereremo $\overline{K}(\overline{\beta})$ associato a $\overline{\beta}$.*

Sia poi Q_i uno dei punti multipli di Γ o Γ' appartenenti a j . Consideriamo l'insieme $K(Q_i)$ dei punti di $\overline{\Gamma} - \overline{J}$ che possono unirsi con punti vicini a Q_i di quanto si vuole (cioè, per ogni $\varepsilon > 0$ distanti da Q_i per meno di ε) mediante curve aperte continue, composte di un numero finito ⁽²²⁾ di archi semplici aperti consecutivi, appartenenti interamente a $\overline{\Gamma} - \overline{J}$ (diremo « curva α' » una curva aperta continua di questo tipo ⁽²³⁾); sia poi $\overline{K}(Q_i)$ il continuo formato da $K(Q_i)$ e dai suoi punti di accumulazione; *considereremo $\overline{K}(Q_i)$ associato a Q_i .*

Avremo con ciò ottenuto un'infinità numerabile al più di insiemi \overline{K} (infatti i $\overline{\beta}$ sono al più un'infinità numerabile ed i Q_i sono in numero finito). Ma osserviamo che due insiemi \overline{K} possono anche coincidere od essere uno appartenente all'altro.

(21) Si può osservare allora che in virtù di un noto risultato (ved. luogo cit. in (7), pag. 103, ogni punto di $K(\overline{\beta})$ è congiungibile con P mediante una curva semplice aperta; sicchè potremmo nella definizione stessa supporre la curva α aperta e semplice; ma per il seguito ci è più comoda la definizione data.

(22) Potremmo anche qui supporre di considerare un solo arco semplice per la stessa osservazione fatta in (21).

(23) Nel seguito diremo brevemente che i punti di $K(\overline{\beta})$ o di $K(Q_i)$ sono « raggiungibili da F » mediante curve α o α' , intendendo naturalmente di dare a queste espressioni il senso specificato nelle definizioni ora poste.

Chiameremo « massimo » un \bar{K} che non appartenga interamente a nessun altro \bar{K} (cioè di cui non tutti i punti appartengono a un altro \bar{K}) non coincidente con esso.

Secondo questa definizione due o più \bar{K} coincidenti e non appartenenti ad un altro \bar{K} più ampio danno luogo a due o più \bar{K} massimi; converremo però in questo caso di considerarli come un unico \bar{K} massimo, associato indifferentemente a tutti gli elementi di F (punti Q_i o archi $\bar{\beta}$) cui sono associati i \bar{K} suddetti. Sicchè due \bar{K} massimi sono tali che non tutti i punti dell'uno appartengono all'altro e *viceversa*.

Classificheremo i \bar{K} massimi in tre specie, dicendo che \bar{K} è:
 di I^a specie, se non contiene punti multipli nè di Γ nè di Γ' ,

di II^a specie, se contiene punti multipli di Γ o Γ' , ma essi non appartengono ad j .

di III^a specie, se contiene punti multipli di Γ o di Γ' appartenenti ad j (ved. fig. 2).

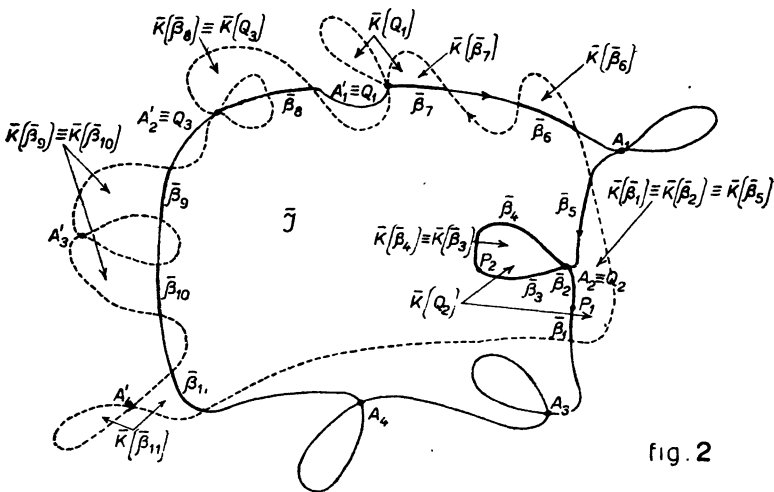


fig. 2

— Γ , - - - Γ' . Sono "Massimi" $\bar{K}(Q_2), \bar{K}(\bar{\beta}_6), \bar{K}(Q_1), \bar{K}(\bar{\beta}_8) \equiv \bar{K}(Q_3), \bar{K}(\bar{\beta}_9) \equiv \bar{K}(\bar{\beta}_{10}), \bar{K}(\bar{\beta}_{11})$
 Di I. specie $\bar{K}(\bar{\beta}_6)$ Di II specie $\bar{K}(\bar{\beta}_9) \equiv \bar{K}(\bar{\beta}_{10}), \bar{K}(\bar{\beta}_{11})$. Di III specie $\bar{K}(Q_2), \bar{K}(Q_1), \bar{K}(Q_3) \equiv \bar{K}(\bar{\beta}_8)$

b) Detta $f(\overline{K})$ la frontiera di un \overline{K} , osserviamo anzitutto che la parte di $f(\overline{K})$ che non appartiene a j , cioè l'insieme $f(\overline{K}) - j \cdot f(\overline{K})$ è costituita di punti appartenenti a Γ' .

Infatti ogni punto B di $f(\overline{K}) - j \cdot f(\overline{K})$ appartiene a $\overline{\Gamma'}$, ma non può essere un punto di $J(\Gamma')$, perchè altrimenti sarebbe interno a \overline{K} (tutti i punti di un opportuno intorno di B sarebbero infatti «raggiungibili da F » mediante curve α o α'); quindi B appartiene a Γ' .

Dico inoltre che ogni punto B di $f(\overline{K}) - j \cdot f(\overline{K})$ è raggiungibile da F mediante curve α o α' . Infatti B apparterrà ad un numero finito di archi $\mu: \mu'_1, \dots, \mu'_{\overline{h}}$ e precisamente $\overline{h} = 1$, sarà interno a μ'_1 , se $\overline{h} > 1$ sarà estremo comune di $\mu'_1, \dots, \mu'_{\overline{h}}$.

Prendiamo in considerazione questo ultimo caso (il caso $\overline{h} = 1$ si tratta in modo analogo ed anche più semplice). Sfrutteremo un ragionamento già svolto nel n. 5 d).

Incominciamo col determinare, per le stesse considerazioni del n. 1, un intorno circolare aperto I_1 di B , di raggio r in modo che:

1) gli estremi diversi da B dei μ'_i ($i = 1 \dots \overline{h}$) siano esterni ad I_1 ;

2) r sia minore delle distanze dei punti multipli A'_i di Γ' a due a due tra di loro, e della distanza di B da \overline{J} ;

3) detto μ_i^* il sottoarco di μ'_i , avente un estremo in B e l'altro sulla frontiera di I_1 e costituito tutto di punti interni a I_1 (tranne l'estremo diverso da B), risulti che i μ_i^* ($i = 1, \dots, \overline{h}$) abbiano a due a due il solo punto B a comune.

I_1 risulta con ciò diviso dai μ_i^* in \overline{h} regioni semplici di Jordan, a due a due senza punti a comune. Inoltre i punti di Γ' diversi da B , che non sono interni a nessuno dei μ_i^* , formano un insieme chiuso, che avrà quindi da B una distanza $\eta > 0$.

Sia allora I_2 un intorno circolare aperto di B di raggio minore di η e quindi di r . I punti di Γ' che appartengano a I_2 devono appartenere ad uno degli archi μ_i^* . In I_2 poi, poichè B

è punto frontiera di \overline{K} ci sarà almeno un punto A , «raggiungibile da F » mediante una curva del tipo α o α' , che indicheremo con α_1 (quindi α_1 o unisce A con un punto di F o lo unisce con un punto «opportunamente» vicino ad un punto di F). Se A appartiene a $f(\overline{K})$ e quindi a $f(\overline{K}) - j \cdot f(\overline{K})$, per quanto si è detto all'inizio, A deve appartenere a Γ' e quindi a uno dei μ_i^* , per es. $\mu_{i_1}^*$. Per ciò ogni punto del sottoarco \widehat{AB} (e in particolare B), di estremi A e B , di $\mu_{i_1}^*$ è «raggiungibile da F », poichè la curva $\alpha_1 + \widehat{AB}$ è del tipo α o α' .

Supponiamo ora invece che A sia interno a \overline{K} ; allora A è interno a $\overline{\Gamma}$, cioè appartiene a $J(\Gamma')$, e quindi appartiene ad una delle regioni in cui I_2 è diviso dai μ_i^* , regione che diremo I' . Esiste allora l'involucro Ω di I' e di I_2 rispetto ad A . Ω è una regione semplice i cui punti appartengono a \overline{K} ; infatti A è interno ad Ω e a \overline{K} e inoltre ad Ω non appartengono nè punti di Γ' , nè punti di \overline{J} (poichè il raggio di I_2 è minore η e della distanza di B da \overline{J}) e quindi tutti i punti di Ω sono «raggiungibili da F » mediante curve α o α' . Anche i punti della frontiera ω di Ω appartengono perciò a \overline{K} e sono anche «raggiungibili da F » mediante curve α o α' . Ma ad ω deve appartenere almeno un punto (anzi almeno un sottoarco) di uno dei due archi $\mu_{i_1}^*$ e $\mu_{i_2}^*$, che delimitano I' in I_1 ; infatti, se ciò non fosse I_2 dovrebbe appartenere ad I' e ciò è assurdo, perchè esistono punti della frontiera di I' (appartenenti agli archi di $\mu_{i_1}^*$ e $\mu_{i_2}^*$) interni a I_2 . Sia allora C un punto, per es. di $\mu_{i_1}^*$, appartenente a ω ; uniamo A con C mediante una curva semplice e aperta σ interna ad Ω (tranne l'estremo C). La curva $\alpha_1 + \sigma + \widehat{CB}$ (dove con \widehat{CB} si indica il sottoarco di $\mu_{i_1}^*$ di estremi C e B) è una curva del tipo α o α' e quindi B è «raggiungibile da F ».

Soffermiamoci ora in particolare sul caso che \overline{K} sia massimo e di I^a specie. \overline{K} sarà associato a un certo $\overline{\beta}$ (seguirà da quanto dimostreremo che è associato ad un solo $\overline{\beta}$). Poichè \overline{K} non contiene punti multipli nè di Γ , nè di Γ' ed è chiuso, ricordando la definizione di «approssimazione» di Γ e di Γ' (ved. n. 2 b)

e c), potremo costruire, per n sufficientemente grande, una approssimazione $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, tale che $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e Γ coincidano in \bar{K} e così pure $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ e Γ' (cioè i punti di Γ o Γ' in \bar{K} sono anche punti di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ o $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ e viceversa).

Sia ora P un punto interno di $\bar{\beta}$ e quindi appartenente a $J(\Gamma')$. Per il n. 4 d) potremo determinare un intorno I_p di P , tale che, per n sufficientemente grande, ogni punto di I_p appartenga a $J(\Gamma')$ e a $J\left(\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Potremo prendere I_p in modo anche che ogni punto di Γ appartenente a I_p appartenga a $\bar{\beta}$. Sia poi Q un punto J interno a I_p (Q appartiene allora a $J(\Gamma)$ e a $J(\Gamma')$). Allora $\bar{\beta}$ appartiene a $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e i suoi estremi appartengono a $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$. Siano dunque ν_1 e ν_2 gli archi in cui $\bar{\beta}$ divide $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ e sia ν_1 quello che unitamente a $\bar{\beta}$ costituisce una curva semplice chiusa, cui Q è esterno (cioè Q appartiene a $E(\nu_1 + \bar{\beta})$).

Dico che la bicella $\nu_1 + \bar{\beta} + J(\nu_1 + \bar{\beta})$ coincide con \bar{K} e quindi che $f(\bar{K}) - j \cdot f(\bar{K})$ coincide con ν_1 (esclusi gli estremi). Infatti ciò segue immediatamente dalla definizione stessa di \bar{K} , se si pensa che in \bar{K} Γ coincide con $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e Γ' con $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$.

Resta con ciò provato che ogni \bar{K} massimo e di 1^a specie è associato ad un solo arco di $\bar{\beta}$, che è una bicella e che $f(\bar{K}) - j \cdot f(\bar{K})$ è formato dai punti interni di un arco semplice aperto ν , appartenente a Γ' e avente gli estremi su j .

c) Dimostriamo ora che *gli insiemi \overline{K} massimi di I^a e II^a specie non hanno due a due punti a comune che non appartengano ad j .*

Osserviamo anzitutto che i \overline{K} massimi di I^a e II^a specie sono associati ad archi $\overline{\beta}$, cioè sono dei $\overline{K}(\overline{\beta})$. Siano allora due di essi \overline{K}_1 associato a $\overline{\beta}_1$, e \overline{K}_2 associato a $\overline{\beta}_2$ ($\overline{K}_1 = \overline{K}(\overline{\beta}_1)$, $\overline{K}_2 = \overline{K}(\overline{\beta}_2)$) e sia, per assurdo, A un punto di $\overline{I}^v - \overline{J}$ comune a \overline{K}_1 e \overline{K}_2 . Siano poi P_1 un qualunque punto interno di $\overline{\beta}_1$ e α_1 una « curva α » che unisce A con P_1 (per l'esistenza di α_1 si ricordi quanto si è dimostrato in *b*) all'inizio) e siano P_2 un qualunque punto interno a $\overline{\beta}_2$ e α_2 una « curva α » che unisce A con P_2 (anche per α_2 si tenga presente il n. 6 *b*)). Prendiamo un qualunque punto S di $\overline{K}(\overline{\beta}_2)$ e dimostriamo che appartiene a $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$; ne seguirà che \overline{K}_2 è contenuto in \overline{K}_1 (anzi $\overline{K}_2 = \overline{K}_1$, il ragionamento potendosi analogamente ripetere scambiando i ruoli di \overline{K}_1 e di \overline{K}_2).

Per questo è opportuno introdurre, seguendo la definizione di B. v. KERÉKJÁRTÓ (24), il concetto di « bande di un arco semplice aperto nella vicinanza di un suo punto interno », applicandolo all'arco $\overline{\beta}_2$. Prendiamo un cerchio χ di centro P_2 e di raggio sufficientemente piccolo perchè gli estremi B_1 e B_2 di $\overline{\beta}_2$ siano esterni a χ . Sia ϕ la circonferenza frontiera di χ ; si potrà trovare un arco σ di ϕ , il quale abbia solo gli estremi su $\overline{\beta}_2$ e precisamente uno di essi sull'arco $\widehat{B_1 P_2}$ di $\overline{\beta}_2$ e l'altro sull'arco $\widehat{P_2 B_2}$ di $\overline{\beta}_2$ (25). Diciamo σ' l'arco di $\overline{\beta}_2$ avente gli stessi estremi di σ . $\sigma + \sigma'$ formano una curva chiusa semplice

(24) Ved. luogo cit. in (7) pag. 68.

(25) Infatti ϕ e $\overline{\beta}_2$ si intersecheranno in un insieme perfetto I , che non potrà essere ovunque denso su ϕ , altrimenti $\overline{\beta}_2$ contenebbe ϕ , il che è impossibile; esisterà allora un arco almeno di ϕ contiguo a I , i cui estremi siano uno su $\widehat{B_1 P_2}$ e l'altro $\widehat{P_2 B_2}$, altrimenti I sarebbe costituito tutto di punti appartenenti ad uno solo dei due archi $\widehat{B_1 P_2}$ e $\widehat{P_2 B_2}$, e ciò è assurdo, perchè sia B_1 che B_2 sono esterni a χ , mentre P_2 è interno a χ .

cui appartiene P_2 ; essa è « liscia » in P_2 sia per l'interno che per l'esterno ⁽²⁶⁾; potremo allora, in virtù anche del fatto che P_2 è interno a $\bar{\beta}_2$, che $f(\bar{K}_2) - j \cdot f(\bar{K}_2)$ è costituito di punti di Γ' e che A e S appartengono a $\bar{F}' - \bar{J}'$, determinare due punti \bar{Q}_2 e Q_2 interni a $\bar{\beta}_2$, separati su $\bar{\beta}_2$ da P_2 , e due archi semplici aperti σ_2 e $\bar{\sigma}_2$, aventi gli estremi in Q_2 e \bar{Q}_2 , costituiti, (tranne gli estremi) l'uno di punti interni a $\bar{K}(\bar{\beta}_2)$ e l'altro di punti « esterni » (cioè non appartenenti) a $\bar{K}(\bar{\beta}_2)$ e tali che, detto σ^* il sottoarco di $\bar{\beta}_2$ di estremi Q_2 e \bar{Q}_2 , la regione $J(\sigma^* + \sigma_2)$, determinata dalla curva semplice chiusa $\sigma^* + \sigma_2$, sia formata da punti interni a $\bar{K}(\bar{\beta}_2)$ e non contenga nè A e nè S , mentre quella $J(\sigma^* + \bar{\sigma}_2)$ determinata dalla curva semplice chiusa $\sigma^* + \bar{\sigma}_2$, sia formata da punti non appartenenti a $\bar{K}(\bar{\beta}_2)$. $J(\sigma^* + \sigma_2)$ costituisce allora la « banda di β_2 interna a $\bar{K}(\bar{\beta}_2)$ nella vicinanza di P_2 » e $J(\sigma^* + \bar{\sigma}_2)$ quella « esterna ».

Fatto questo, osserviamo che S è « raggiungibile » da P_2 mediante una curva α , del tipo α , la quale incontrerà quindi certamente la curva chiusa semplice $\sigma_2 + \bar{\sigma}_2$, cui P_2 è interno; ma, poichè i punti di $\bar{\sigma}_2$ non appartengono a $\bar{K}(\bar{\beta}_2)$ (tranne gli estremi), α , incontrerà allora l'arco σ_2 ; sia A_1 il primo punto di σ_2 che si incontra su α , a partire da S (A_1 è certamente diverso da Q_2 e \bar{Q}_2 non potendo appartenere a j). Per la stessa ragione α_2 incontra σ_2 in un punto A_2 (il primo che s'incontra su α_2 a partire da A). Allora la curva $\alpha_1 + \widehat{AA_2} + \widehat{A_2A_1} + \widehat{A_1S}$, dovè $\widehat{AA_2}$ è l'arco di α_2 di estremi A e A_2 , $\widehat{A_2A_1}$ quello di σ_2 di estremi A_2 e A_1 , $\widehat{A_1S}$ quello di α_1 di estremi A_1 e S , costituisce una curva del tipo α che unisce S con P_1 . Quindi S appartiene a $\bar{K}(\bar{\beta}_1)$.

Resta con ciò dimostrato che \bar{K}_2 appartiene a \bar{K} ; e in modo analogo si può dimostrare che \bar{K}_1 appartiene a \bar{K}_2 ; quindi $\bar{K}_1 = \bar{K}_2$.

(26) Per queste definizioni e per le applicazioni che se ne fanno nel testo ved. ad es. luogo cit. in (7), pag. 65, teor. V.

d) Dal risultato precedente si deduce immediatamente che i \overline{K} massimi di II^a specie sono in numero finito.

Infatti tali sono i punti multipli di Γ e Γ' ed uno di essi, che non stia su j , può appartenere ad uno solo dei \overline{K} massimi di II^a specie.

e) Diciamo ora qualcosa dei \overline{K} massimi di III^a specie. Essendo Q_1, \dots, Q_{l^*} i punti multipli di Γ e Γ' appartenenti ad j , si son definiti in a) gli insiemi $\overline{K}(Q_1) \dots \overline{K}(Q_{l^*})$. Essi possono anche non essere tutti massimi; quelli massimi sono di III^a specie.

Dico che non esistono altri \overline{K} massimi di III^a specie. Dimostriamo infatti che un \overline{K} , che non contenga punti multipli di Γ o Γ' appartenenti ad j , deve appartenere ad uno dei $\overline{K}(Q_i)$.

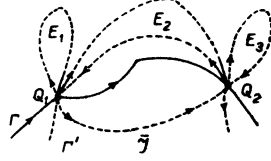
Infatti questo \overline{K} dovrebbe essere « associato » a un arco $\overline{\beta}$, che diremo $\overline{\beta}_1$; cioè $\overline{K} = \overline{K}(\overline{\beta}_1)$. Ma, per l'ipotesi fatta, deve esistere almeno un Q_i sulla frontiera di $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$ e precisamente appartenente all'insieme $j \cdot f(\overline{K}(\overline{\beta}_1))$ e in ogni intorno di Q_i devono esistere punti di $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$, non appartenenti ad j , raggiungibili mediante curve del tipo α da un qualunque punto interno P_1 di $\overline{\beta}_1$.

È facile allora ricavare che $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$ appartiene a $\overline{K}(Q_i)$. Infatti sia S un qualunque punto di $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$ e sia α_s una curva unente P_1 con S . In ogni intorno di Q_i esiste almeno un punto S' di $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$, non appartenente ad j , che può congiungersi, (si tenga presente anche il n. 6 b)) con P_1 mediante una curva $\alpha_{s'}$ del tipo α .

Ma allora con costruzioni del tutto analoghe a quelle del n. 6 c), sfruttando la nozione di « banda di $\overline{\beta}_1$ interna a $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$ nella vicinanza di P_1 », possiamo trovare una curva del tipo α' che unisce S' con S , il che dimostra che S appartiene a $\overline{K}(Q_i)$. Ne segue che $\overline{K}(\overline{\beta}_1)$ fa parte di $\overline{K}(Q_i)$.

Quindi i \overline{K} massimi di III^a specie sono in numero finito.

f) Osserviamo ora che a differenza di quanto succede per i \bar{K} massimi di I^a e II^a specie, può avvenire che due \bar{K} massimi di III^a specie abbiano a comune dei punti non appartenenti ad j (v. fig. 3). Però si può dimostrare facilmente che un \bar{K} massimo di III^a specie e uno di I^a o II^a specie non possono avere punti a comune non appartenenti ad j .



$$\begin{aligned}\bar{K}(Q_1) &\equiv E_1 + E_2 \\ \bar{K}(Q_2) &\equiv E_2 + E_3 \\ \bar{H} &\equiv E_1 + E_2 + E_3\end{aligned}$$

fig. 3

Infatti, supposto per assurdo l'esistenza di un \bar{K}_1 di III^a specie e di un \bar{K}_2 di I^a o II^a specie distinti tra di loro, aventi un punto a comune, non appartenente ad j , si ricava come nel n. 6 c), che \bar{K}_2 fa parte di \bar{K}_1 e quindi non è massimo.

g) L'osservazione precedente ci consiglia, per il seguito, di introdurre dei nuovi insiemi, partendo dai \bar{K} massimi.

Poniamo dunque in uno stesso insieme, che diremo \bar{H} , tutti i \bar{K} massimi tali che per due qualunque di essi \bar{K}_i e \bar{K}_j , esiste una catena di un numero finito di \bar{K} massimi (appartenenti allo stesso insieme \bar{H}) $\bar{K}_1 = \bar{K}_i, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_r, \dots, \bar{K}_s = \bar{K}_j$, in modo che ogni \bar{K}_r abbia a comune con \bar{K}_{r+1} e \bar{K}_{r-1} almeno un punto non appartenente ad j se ($r = 1$ si considera solo $r + 1$, se $r = s$ solo $r - 1$).

Per quanto si è visto in c) e in f) ogni \bar{K} di I^a o II^a specie dà luogo ad un solo \bar{H} , che diremo ancora di I^a o II^a specie.

Infine diremo \bar{H} di III^a specie quelli provenienti da uno o anche più \bar{K} di III^a specie. Gli \bar{H} di III^a specie e così pure quelli di II^a specie sono in numero finito.

Sarà ancora opportuno osservare per il seguito che ogni \bar{H} è un insieme chiuso, in quanto somma al più di un numero finito di insiemi chiusi e inoltre che due \bar{H} qualunque non possono avere punti a comune che non appartengano ad j .

h) Diciamo ora G l'insieme dei punti che appartengono ad almeno un \bar{H} . Vogliamo dimostrare che l'insieme $\bar{J} + G$ coincide con l'insieme $\bar{\Gamma}'$.

Anzitutto è evidente per la definizione stessa di \bar{J} e di G che ogni punto di $\bar{J} + G$ appartiene a $\bar{\Gamma}'$.

Viceversa sia B un punto di $\bar{\Gamma}'$; dimostriamo che, se non appartiene ad \bar{J} , appartiene a G , cioè ad un \bar{H} .

B apparterrà ad almeno uno degli insiemi $E'_r = \Delta'_r + \delta'_r$ ($r = 1, \dots, \bar{l}$) dove Δ'_r sono i domini contigui di Γ' appartenenti a $J(\Gamma')$ e δ'_r le frontiere dei Δ'_r (ved. n. 5 a).

Supponiamo dapprima che B appartenga a E'_r , essendo Δ'_r il dominio cui appartiene O .

Se B appartiene a Δ'_r , esiste senz'altro, come è noto, una curva semplice aperta σ che unisce B con O ed è tutta interna a Δ'_r ; ma allora avendo supposto che B non appartenga a \bar{J} , mentre O appartiene a J , la curva σ deve incontrare j ⁽²⁷⁾; sia A il primo punto che si incontra su σ percorrendola da B a O , appartenente ad j ; A , dovendo essere interno a Δ'_r , farà parte di Γ e precisamente di un arco $\bar{\mu}$ che compone δ'_r (ved. n. 5 a) e b)). Se è interno a questo $\bar{\mu}$, allora per la definizione stessa dei $\bar{\beta}$, è interno ad un arco $\bar{\beta}$; e in questo caso l'arco \widehat{BA} di σ è una curva del tipo α e B appartiene dunque a un $\bar{K}(\bar{\beta})$ ⁽²⁸⁾ e quindi ad un \bar{H} .

Se invece A è un estremo di $\bar{\mu}$ allora o è un punto multiplo Q_i di Γ e allora B appartiene senz'altro a $\bar{K}(Q_i)$ e quindi ad un \bar{H} , oppure è un punto semplice di Γ ed allora è estremo

⁽²⁷⁾ Ved. luogo cit. in (7), pag. 31.

⁽²⁸⁾ Si osservi infatti che dal fatto che B può unirsi mediante una curva del tipo α con un punto A interno a $\bar{\beta}$, si ricava facilmente, per es. ricorrendo alla nozione di « banda di un arco semplice aperto nella vicinanza di un suo punto interno » introdotta nel n. 6 c), che B può unirsi con ogni punto interno di $\bar{\beta}$ mediante una curva α e quindi che B appartiene a $\bar{K}(\bar{\beta})$, secondo la definizione posta nel n. 6 a).

comune di *due* archi $\bar{\beta}$, sicchè si vede immediatamente che si può sostituire all'arco \widehat{BA} di σ un arco \widehat{BA}' semplice, con A interno a uno di questi due $\bar{\beta}$, in modo che \widehat{BA}' sia una curva del tipo α e quindi ancora B faccia parte di un \bar{H} .

Se invece B appartiene a δ'_i , allora appartiene a un arco $\bar{\mu}'$ di δ'_i (ved. n. 3 c); se è interno a $\bar{\mu}'$ potremo ancora considerare la curva σ aperta e semplice, unente B con O , avente i suoi punti, tranne B , in Δ'_i , poichè ogni punto interno di $\bar{\mu}'$ è « raggiungibile » da un punto interno di Δ'_i , essendo δ'_i « liscia » in ogni tal punto per Δ'_i (29).

Se invece B è estremo di $\bar{\mu}'$, allora basta considerare un opportuno punto B' interno di $\bar{\mu}'$, unire B' con O mediante una curva semplice σ in modo che $\sigma + \widehat{B'B}$ (dove $\widehat{B'B}$ è l'arco di $\bar{\mu}'$ di estremi B' e B) sia una curva aperta semplice unente O con B , avente un primo arco $\widehat{B'B}$, tutto esterno a \bar{J} , a comune con $\bar{\mu}'$ e per il resto interno a Δ'_i .

Anche in questi casi quindi si può concludere con il ragionamento fatto sopra, che B appartiene ad un \bar{H} .

Supponiamo ora che B appartenga ad un E'_r con $r \neq s$. In virtù degli stessi ragionamenti or ora accennati, possiamo dire che due punti qualunque di un E'_r (siano o no sulla frontiera δ'_i di E'_r) possono unirsi con un arco semplice aperto appartenente a E'_r . Ma allora si può trovare una curva α_B , composta di successivi archi semplici di questo tipo (cioè congiungenti due punti di un E'_r e appartenenti allo stesso E'_r) che unisca B ad un punto B' di δ'_i e precisamente ad un punto multiplo di Γ' appartenente a δ'_i [perchè due E'_r hanno a comune al più punti multipli di Γ' , in virtù del fatto che Γ' è la frontiera di $\bar{\Gamma}'$ (ved. n. 4 d) e quindi un $\bar{\mu}'$ non può appartenere contemporaneamente a due δ'_i]; e la curva α_B abbia il solo punto B' a comune con E'_r .

Di qui segue che, se B appartiene a j allora coincide con

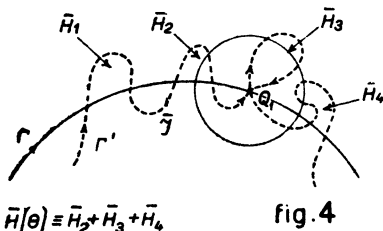
(29) Ved. luogo cit. in (26).

uno dei punti Q_i e la curva α_B è del tipo α' , sicchè B appartiene ad un \bar{H} di III^a specie.

Se invece B' non appartiene ad j , basta continuare partendo da B' in modo analogo a quanto si è fatto all'inizio, nel caso che B appartenesse a E'_i , per concludere ancora che B appartiene ad un \bar{H} .

È quindi dimostrato che $\bar{J} + G \equiv \bar{\Gamma}'$.

2) Sia ora θ un qualunque numero positivo e sia \bar{H} un qualunque insieme di III^a specie. Ad \bar{H} apparterranno un certo numero di punti Q_i : $Q_{i_1}, \dots, \dots, Q_{i_H}$. Diciamo allora $\bar{H}[\theta]$ l'insieme dei punti che appartengono ad almeno uno degli \bar{H} (di I^a, II^a e III^a specie) che hanno almeno un punto interno a uno almeno dei cerchi di raggio θ e di centri rispettivamente i punti $Q_{i_1}, \dots, \dots, Q_{i_H}$ (ved. fig. 4).



Per ognuno degli insiemi \bar{H} di III^a specie abbiamo così definito un insieme $\bar{H}[\theta]$.

1) Un insieme $\bar{H}[\theta]$ può contenere anche infiniti insiemi \bar{H} ; però ne conterrà un numero finito di II^a o III^a specie, perchè si è visto che gli \bar{H} di II^a e III^a specie sono complessivamente in numero finito. $\bar{H}[\theta]$ potrà quindi contenere al più un'infinità numerabile di \bar{H} di I^a specie.

In questo ultimo caso, come somma di un'infinità numerabile di insiemi chiusi, $\bar{H}[\theta]$ può anche non essere un insieme chiuso; però possiamo dimostrare che $\bar{H}[\theta]$ contiene ogni suo punto di accumulazione B , che non appartenga ad j .

È chiaro anzitutto che, se B è di accumulazione per almeno uno degli \bar{H} che appartengono ad $\bar{H}[\theta]$, allora B appartiene a questo \bar{H} , che è chiuso, e quindi ad $\bar{H}[\theta]$.

Se ciò non è, in ogni intorno di B devono esistere punti appartenenti ad un'infinità numerabile di insiemi \bar{H} , appartenenti ad $\bar{H}[\theta]$, i quali, per l'osservazione fatta all'inizio, potranno supporre senz'altro essere tutti di I^a specie.

In ogni intorno di B esistono dunque punti appartenenti ad uno degli insiemi: $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_n, \dots$ di I^a specie e possiamo anzi precisare che esistono anche punti appartenenti alla frontiera $f(\bar{H}_n)$ di ognuno degli \bar{H}_n . Ricordiamo ora che (ved. n. 6 b)) per ogni \bar{H}_n l'insieme $f(\bar{H}_n) - j \cdot f(\bar{H}_n)$ è composto di un arco semplice aperto ν_n avente gli estremi su j . Otterremo così una successione di archi ν_n semplici aperti e non sovrappontesi di F' . Ma in una tale successione il diametro dell'arco è infinitesimo per $n \rightarrow \infty$ ⁽³⁰⁾.

Preso quindi un $\epsilon > 0$ e minore della metà della distanza di B da j , possiamo determinare un \bar{n} tale che per $n \geq \bar{n}$, ogni ν_n ha un diametro $\leq \epsilon$. Ne segue che ogni \bar{H}_n , con $n \geq \bar{n}$, non può avere punti di $f(\bar{H}_n) - j \cdot f(\bar{H}_n)$ appartenenti all'intorno circolare di raggio ϵ di B , poichè $f(\bar{H}_n) - j \cdot f(\bar{H}_n)$ è composto dell'arco ν_n avente gli estremi su j e di diametro $\leq \epsilon$.

Ne segue che è assurdo supporre B non appartenente ad almeno un \bar{H} e quindi ad $\bar{H}[\theta]$.

Possono però esserci su j dei punti di accumulazione di $\bar{H}[\theta]$ non appartenenti ad $\bar{H}[\theta]$. Noi considereremo per il seguito questi punti come aggiunti ad $\bar{H}[\theta]$, sicchè potremo concludere che ogni $\bar{H}[\theta]$ è un insieme chiuso.

(30) La cosa è già stata messa in rilievo, nel caso che F' sia una curva chiusa semplice da G. SCORZA DRAGONI: *Qualche teorema sulle curve di Jordan* [Rend. Acc. Lincei - (VI) - Vol. XXIII (1936), pagg. 181-186] lemma 2. Anche qui essa si ricava immediatamente, osservando che il fatto è vero per una successione di archi non sovrappontesi di una circonferenza e ricordando (ved. n. 1 e n. 2 c) che F' è la trasformata della circonferenza k secondo la trasformazione $t \cdot \varphi$, che è topologica su ciascuno degli archi (in numero finito) (P_{i-1}, P_i) di k (ved. n. 1).

m) Introduciamo ora alcune ultime definizioni relative agli insiemi \overline{H} .

Sia dato un \overline{H} di I^a specie; esso è pure per definizione un \overline{K} massimo di I^a specie e sarà dunque « associato » ad un arco $\overline{\beta}$ di Γ (ved. n. 6 b)); diremo $\overline{\beta}$ *insieme* $\lambda(\overline{H})$ *associato ad* \overline{H} .

Diremo poi *insieme* $\lambda'(\overline{H})$ *associato allo stesso* \overline{H} l'arco ν di Γ' i cui punti interni costituiscono l'insieme $f(\overline{H}) - j \cdot f(\overline{H})$ (ved. n. 6 b)).

Per ogni \overline{H} di II^a o di III^a specie diremo invece rispettivamente *insiemi* $\lambda(\overline{H})$ e $\lambda'(\overline{H})$ *associati ad* \overline{H} , gli insiemi dei punti di Γ e di Γ' appartenenti ad \overline{H} .

Così pure per ogni $\overline{H}[\theta]$ diremo rispettivamente *insiemi* $\lambda(\overline{H}[\theta])$ e $\lambda'(\overline{H}[\theta])$ *associati ad* $\overline{H}[\theta]$, gli insiemi dei punti di Γ e di Γ' appartenenti ad $\overline{H}[\theta]$.

Osserviamo che tutti gli insiemi λ e λ' ora definiti sono chiusi.

n) Ci sarà utile nel seguito avere introdotto anche la seguente definizione di involucro $j(\omega, \gamma)$ di una circonferenza ω e di un arco semplice e aperto γ , avente gli estremi su ω e almeno un punto interno al cerchio delimitato da ω .

Consideriamo per ciò l'insieme dei punti del piano che possono unirsi con l'infinito mediante una semilinea semplice (immagine topologica di una semiretta) che non abbia punti a comune nè con ω nè con γ , e diciamolo $E(\omega, \gamma)$. *L'involucro* $j(\omega, \gamma)$ *di* ω *e* γ *sarà la frontiera di* $E(\omega, \gamma)$.

Si può dimostrare che $j(\omega, \gamma)$ è una curva semplice chiusa, con gli stessi ragionamenti usati da G. SCORZA DRAGONI per la definizione di involucro di due curve semplici chiuse ⁽³¹⁾. Mi limito perciò ad accennarli.

Se γ non ha punti all'esterno del cerchio delimitato da ω , è immediato concludere che $j(\omega, \gamma)$ coincide con ω .

(31) Ved. luogo cit. in (3.).

Escluso questo caso, sia P un punto di $j(\omega, \gamma)$ appartenente a γ ed esterno al cerchio delimitato da ω (esiste almeno un tale P) e sia ν il massime arco di γ , che contenga P e tale che i suoi punti interni siano esterni al cerchio delimitato da ω .

Si dimostra che ν appartiene interamente a $j(\omega, \gamma)$.

Gli archi del tipo ν hanno al più a comune un estremo e sono al più un'infinità numerabile: $\nu_1, \dots, \nu_p, \dots$.

Gli estremi di ν_p determinano su ω due archi di cui diremo ω_p , quello in cui i punti interni sono separati dall'infinito mediante la curva semplice chiusa formata da ν_p e dall'altro arco di ω .

Gli archi ω_p sono un'infinità numerabile al più e a due a due sono privi di punti interni comuni.

L'involucro $j(\omega, \gamma)$ si ottiene sostituendo in ω l'arco ω_p col corrispondente arco ν_p ; e si dimostra di qui che $j(\omega, \gamma)$ è una curva chiusa semplice.

Tutto questo segue dai ragionamenti citati da G. SCORZA DRAGONI.

A noi interessa inoltre osservare che $j(\omega, \gamma)$, oltre agli archi ν_p di γ , contiene anche almeno un arco α di ω , i cui punti interni appartengono solamente ad ω e i cui estremi appartengono anche a γ ; infatti, se ciò non fosse, tutti i punti di $j(\omega, \gamma)$ risulterebbero appartenere a γ e quindi γ conterrebbe ω , il che è assurdo. È evidente poi che gli archi di $j(\omega, \gamma)$ del tipo α sono senza punti interni comuni e quindi sono al più un'infinità numerabile. Infine indicheremo per il seguito con $J(\omega, \gamma)$ la regione dei punti interni $j(\omega, \gamma)$.

7. - Teorema.

a) Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA. - *Sia data una trasformazione topologica t del piano π in se stesso (o in una sua parte), che trasformi la curva Γ nella curva Γ' ; se esiste un punto O appartenente sia a Γ che a Γ' tale che, detto j l'involucro di Γ e Γ' rispetto ad O e costruiti gli insiemi \bar{H} relativi ad O , definiti nel n. 6 g), t trasformi i punti di ciascuno*

degli insiemi $\lambda(\overline{H})$ associati agli \overline{H} (ved. n. 6 m)) in punti non appartenenti al corrispondente insieme $\lambda'(\overline{H})$, allora la trasformazione subordinata da t tra $\overline{\Gamma} = \Gamma + J(\Gamma)$ e $\overline{\Gamma}' = \Gamma + J(\Gamma)$ ammette almeno un punto unito.

È opportuno anzitutto trasformare l'enunciato del teorema, dimostrando che dalle ipotesi dello stesso segue l'esistenza di un θ positivo tale che, costituiti gli insiemi $\overline{H}[\theta]$ relativi ad O (ved. n. 6 i), t trasforma i punti di ciascuno degli insiemi $\lambda(\overline{H}[\theta])$ (ved. n. 6 m) in punti non appartenenti al corrispondente insieme $\lambda'(\overline{H}[\theta])$.

Infatti sia \overline{H}_l uno qualunque degli \overline{H} di III^a specie relativi ad O , che sono in numero finito ($l = 1, \dots, g$). Prendiamo una successione $\{\theta_n\}$ di numeri positivi tendente a zero, e costruiamo secondo la definizione del n. 6 i), la successione degli insiemi $\overline{H}_l[\theta_n]$. Può accadere che, da un certo \bar{n} in poi, $\overline{H}_l[\theta_n]$ coincida con \overline{H}_l ed allora (ved. n. 6 n) anche $\lambda(\overline{H}_l[\theta_n])$ e $\lambda'(\overline{H}_l[\theta_n])$ coincidono rispettivamente con $\lambda(\overline{H}_l)$ e $\lambda'(\overline{H}_l)$ e quindi la t non trasforma i punti di $\lambda(\overline{H}_l[\theta_n])$ in punti di $\lambda'(\overline{H}_l[\theta_n])$.

Se invece, qualunque sia n , ciò non succede, allora vuol dire che, qualunque sia n , $\overline{H}_l[\theta_n]$ contiene oltre ad \overline{H}_l , anche infiniti insiemi \overline{H} distinti da \overline{H}_l (in virtù della definizione stessa di \overline{H} e di $\overline{H}[\theta]$), e poichè gli \overline{H} di II^a e III^a specie sono in numero finito, ne segue che per n sufficientemente grande (n maggiore o uguale a un certo \bar{n}), $\overline{H}_l[\theta_n]$ contiene \overline{H}_l e una successione $\{\overline{H}_{n,m}\}$ ($m = 1, 2, \dots$) di insiemi \overline{H} di I^a specie.

Osserviamo ora che la successione $\{\overline{H}_{n,m}\}$ ($m = 1, 2, \dots$) contiene la successione $\{\overline{H}_{n+1,m}\}$ ($m = 1, 2, \dots$) ed inoltre che il diametro degli $\overline{H}_{n,m}$ tende a zero, per m tendente all'infinito, come si può facilmente dimostrare con un ragionamento analogo a quello usato nel n. 6 l). Se ne ricava facilmente allora, che, fissato un $\rho > 0$, possiamo determinare un $\bar{n} > \bar{n}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ l'insieme $\overline{H}_l[\theta_n]$ sia contenuto nell'insieme costituito da

\overline{H}_i e dai cerchi di raggio ρ e di centri rispettivamente i punti Q_i (multipli per Γ o per Γ') che appartengono a \overline{H}_i .

Osserviamo ora che dall'ipotesi del teorema risulta che, poichè $\lambda(\overline{H}_i)$ e $\lambda'(\overline{H}_i)$ sono insiemi chiusi e la t è una trasformazione topologica, si possono determinare per ogni l ($l = 1, \dots, g$) due numeri positivi ρ_l e ρ'_l , tali che tutti i punti dell'intorno (ρ_l) di $\lambda(\overline{H}_i)$ ⁽²²⁾ non vengano trasformati dalla t in punti appartenenti all'intorno (ρ'_l) di $\lambda'(\overline{H}_i)$.

Indichiamo con $Q^l(r)$ ($r = 1, \dots, r_l$) i punti Q_i che appartengono ad \overline{H}_i .

Per un certo l , siano $Q^l(r_1), \dots, Q^l(r_{K_l})$ quelli dei $Q^l(r)$ che appartengono a Γ (v. fig. 5) e siano $Q^l(\overline{r}_1), \dots, Q^l(\overline{r}_{\overline{K}_l})$ i rimanenti ($K_l + \overline{K}_l = r_l$).

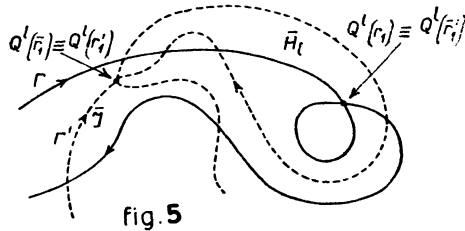


fig. 5

Se un punto $Q^l(r)$ non appartiene a Γ , allora appartiene certamente a $J(\Gamma)$ (essendo un punto di \overline{J} non può appartenere a $E(\Gamma)$); si può quindi determinare un intorno circolare di $Q^l(r)$ di raggio $\pi^l(r)$ tutto costituito di punti di $J(\Gamma)$. Siano dunque, per un certo l , $\pi^l(\overline{r}_1), \dots, \pi^l(\overline{r}_{\overline{K}_l})$ le misure dei raggi $\pi^l(r)$ relativi ai punti $Q^l(\overline{r}_1), \dots, Q^l(\overline{r}_{\overline{K}_l})$ sopra nominati. Analogamente, per lo stesso l , siano $Q^l(r'_1), \dots, Q^l(r'_{K'_l})$ quelli tra i punti $Q^l(r)$ che appartengono a Γ' e $Q^l(\overline{r}'_1), \dots, Q^l(\overline{r}'_{\overline{K}'_l})$ i rimanenti ($K'_l + \overline{K}'_l = r_l$). Se un $Q^l(r)$ non appartiene a Γ' appartiene allora a $J(\Gamma')$, e perciò esiste un intorno circolare di $Q^l(r)$ di raggio $\pi^l(r)$ tutto costituito di punti di $J(\Gamma')$. Siano dunque $\pi^l(\overline{r}'_1), \dots, \pi^l(\overline{r}'_{\overline{K}'_l})$ le misure dei raggi relativi ai punti

⁽²²⁾ Per intorno (ρ) di un insieme I intendiamo l'insieme di punti che hanno da I distanza $\leq \rho$.

$Q^t(\bar{r}_1), \dots, Q^t(\bar{r}_{\bar{K}_l})$. Indichiamo ora con ρ il più piccolo dei $\rho_l, \rho'_l, \pi^t(\bar{r}_1), \dots, \pi^t(\bar{r}_{\bar{K}_l}), \bar{\pi}^t(\bar{r}_1), \dots, \bar{\pi}^t(\bar{r}_{\bar{K}_l})$ ($l = 1, 2, \dots, g$).

Per quanto si è visto sopra, possiamo determinare un $\theta > 0$ in modo che l'insieme $\bar{H}_l[\theta]$ ($l = 1, \dots, g$) sia contenuto nell'insieme costituito da \bar{H}_l e dai cerchi di raggio ρ e centri i punti $Q^t(r)$ ($r = 1, \dots, r_l$). Allora l'insieme $\lambda(\bar{H}_l[\theta])$ appartiene all'insieme $\lambda_\rho(\bar{H}_l)$ costituito da $\lambda(\bar{H}_l)$ e dai cerchi di raggio ρ e centro i punti $Q^t(r_1), \dots, Q^t(r_{K_l})$, poichè i punti di $\bar{H}_l[\theta]$ appartenenti ai rimanenti cerchi, di raggio ρ e centri i punti $Q^t(\bar{r}_1), \dots, Q^t(\bar{r}_{\bar{K}_l})$, appartengono a $J(\Gamma)$ e quindi non fanno parte di $\lambda(\bar{H}_l[\theta])$.

D'altra parte l'insieme $\lambda'(\bar{H}_l[\theta])$ appartiene all'insieme $\lambda'_\rho(\bar{H}_l)$ costituito da $\lambda'(\bar{H}_l)$ e dai cerchi di raggio ρ e centri i punti $Q^t(r'_1), \dots, Q^t(r'_{K'_l})$ poichè i punti di $\bar{H}_l[\theta]$ appartenenti ai rimanenti cerchi di raggio ρ e centri i punti $Q^t(\bar{r}_1), \dots, Q^t(\bar{r}_{\bar{K}_l})$ appartengono a $J(\Gamma')$ e quindi non fanno parte di $\lambda'(\bar{H}_l[\theta])$.

Ma allora i punti di $\lambda(\bar{H}_l[\theta])$ non possono essere trasformati dalla t in punti di $\lambda'(\bar{H}_l[\theta])$, poichè $\lambda_\rho(\bar{H}_l)$ e $\lambda'_\rho(\bar{H}_l)$ [e quindi anche $\lambda(\bar{H}_l[\theta])$ e $\lambda'(\bar{H}_l[\theta])$] appartengono rispettivamente agli intorni (ρ_l) e (ρ'_l) di $\lambda(\bar{H}_l)$ e $\lambda'(\bar{H}_l)$.

Osserviamo poi che pur di prendere ρ (e quindi θ) sufficientemente piccolo, gli insiemi $\bar{H}_l[\theta]$ avranno, tra di loro e con gli \bar{H} non appartenenti agli $\bar{H}_l[\theta]$ stessi, a comune al più punti che appartengono ad j (per la definizione stessa di $\bar{H}_l[\theta]$ e i numeri 6 c) e f)).

b) Fissato così il θ , veniamo alla dimostrazione del teorema. Incominciamo col fare alcune osservazioni.

Siano $\bar{H}_1[\theta], \dots, \bar{H}_g[\theta]$ gli insiemi $\bar{H}[\theta]$ relativi ad O ed

a θ e siano poi $\overline{H}_1 \dots \overline{H}_f$ gli insiemi \overline{H} di II^a specie relativi ad O , che abbiamo visto si possono supporre non appartenenti a nessuno degli $\overline{H}[\theta]$. Li indicheremo complessivamente per semplicità, con $G_1, \dots, G_i, \dots, G_{f+g}$; e siano poi λ_i e λ'_i gli insiemi $\lambda(\overline{H})$, $\lambda(\overline{H}[\theta])$, $\lambda'(\overline{H})$, $\lambda'(\overline{H}[\theta])$ ad essi associati ($i = 1, \dots, f + g$).

Dall'ipotesi del teorema a da quanto si è dimostrato in *a*), risulta che i punti di λ_i ($i = 1, \dots, f + g$) non sono trasformati in punti di λ'_i dalla t . Allora poichè λ_i e λ'_i sono insiemi chiusi (ved. n. 6 *m*) e la t è una trasformazione topologica, si possono determinare, per ogni i ($i = 1, \dots, f + g$) due numeri positivi ρ_i e ρ'_i , tali che tutti i punti dell'intorno (ρ_i) di λ_i non vengano trasformati dalla t in punti dell'intorno (ρ'_i) di λ'_i .

Siano poi $B_1^i, \dots, B_{\overline{r}}^i, \dots, B_{\overline{r}_i}^i$ i punti multipli di Γ o di Γ' non appartenenti ad j , contenuti in G_i (se un punto multiplo di Γ coincide con uno di Γ' , considereremo i due punti come un unico $B_{\overline{r}}^i$). L'insieme dei $B_{\overline{r}}^i$ ($i = 1, \dots, f + g$; $\overline{r} = 1, \dots, \overline{r}_i$) ha una distanza positiva da \overline{J} ; la indicheremo con $\overline{\rho}_1$. Indicheremo poi con $\overline{\rho}_2$ la minore delle distanze di due qualsiasi $B_{\overline{r}}^i$ tra di loro.

Osserviamo ora che ciascun $B_{\overline{r}}^i$, appartenendo a un G_i ha una distanza positiva da ciascuno degli $\overline{H}[\theta]$ e degli \overline{H} , non appartenenti agli $\overline{H}[\theta]$, che siano distinti dal G_i stesso (ved. n. 7 *a*) osservazione finale) cui appartiene $B_{\overline{r}}^i$. Diciamo allora, per $B_{\overline{r}}^i$, $\rho_{\overline{r}}^i$ il confine inferiore dell'insieme di queste distanze; si può dimostrare facilmente che $\rho_{\overline{r}}^i > 0$. Infatti se fosse $\rho_{\overline{r}}^i = 0$, in ogni intorno di $B_{\overline{r}}^i$ esisterebbero punti appartenenti ad un'infinità numerabile di \overline{H} (di I^a specie) distinti da G_i ; ma allora lo stesso ragionamento nel n. 6 *l*), fa vedere che ciò è impossibile; perciò è $\rho_{\overline{r}}^i > 0$.

Diciamo allora $\overline{\rho}_3$ il più piccolo dei $\rho_{\overline{r}}^i$ ($i = 1, \dots, f + g$; $\overline{r} = 1, \dots, \overline{r}_i$).

Diciamo poi ancora $\overline{\rho_4}$ la distanza di O dall' insieme dei punti multipli di Γ e Γ' .

Infine indichiamo con $\overline{\rho_5}$ la più piccola delle distanze dei punti multipli di Γ o Γ' appartenenti ad j , che abbiamo indicato con Q_i ($i = 1, \dots, l^*$) (ved. n. 6 a) a due a due tra di loro.

c) Nel n. 2 a) e b) abbiamo definite le « approssimazioni » $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ di Γ e abbiamo introdotto un numero $R\left(\frac{1}{n}\right)$ funzione di n e tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} R\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ (ved. in particolare n. 2 b)).

Osserviamo che l'intorno circolare aperto $I_\nu\left(R\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ di raggio $R\left(\frac{1}{n}\right)$, di un punto multiplo di Γ , A_ν ($\nu = 1, \dots, h$), è trasformato dalla t in una regione semplice di Jordan, che conterrà nel suo interno il trasformato A'_ν di A_ν ; il diametro di questa regione, in virtù del fatto che t è topologica, tenderà a zero per $n \rightarrow \infty$. Fissato che sia n , diciamo $R'\left(\frac{1}{n}\right)$ il massimo dei diametri delle suddette regioni di Jordan (che sono in numero di h) relative ai punti multipli di Γ' . Sarà pure $\lim_{n \rightarrow +\infty} R'\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Osserviamo ancora che, in virtù della costruzione di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ fatta nel n. 2 a) e b), i punti di Γ che sono esterni agli intorni $I_\nu\left(R\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ dei punti di A_ν ($\nu = 1, \dots, h$) sono anche punti di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e viceversa i punti di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ esterni agli $I_\nu\left(R\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ sono anche punti di Γ . Così pure i punti di Γ' che sono esterni agli intorni circolari aperti $I'_\nu\left(R'\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ di raggio

$R' \left(\frac{1}{n} \right)$, dei punti A'_ν , multipli di Γ' ($\nu = 1, \dots, h$) sono anche punti di $\Gamma' \left(\frac{1}{n} \right)$ e viceversa, in virtù del fatto che Γ' e $\Gamma' \left(\frac{1}{n} \right)$ sono le trasformate di Γ e $\Gamma \left(\frac{1}{n} \right)$.

Diciamo ora \overline{R}_n il $\max \left[4 R \left(\frac{1}{n} \right); 4 R' \left(\frac{1}{n} \right) \right]$; è evidentemente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{R}_n = 0$.

Sarà bene per il seguito indicare con la lettera D uno qualunque dei punti multipli di Γ e Γ' ; otterremo un numero finito h' di punti nel piano D_l ($l = 1, \dots, h'$), ogni D_l essendo un A_ν o un A'_ν (oppure l'uno e l'altro) e quindi h' essendo $\leq 2h$. Per ogni D_l consideriamo l'intorno circolare aperto $I_l(\overline{R}_n)$ di raggio \overline{R}_n e di centro D_l ; diciamo $\omega_l(\overline{R}_n)$ la frontiera di $I_l(\overline{R}_n)$.

Supponiamo che in D_l si presenti il caso più generale, cioè che D_l sia contemporaneamente punto multiplo sia per Γ che per Γ' (i ragionamenti che faremo, varranno in forma anche più semplice se D_l è multiplo solo per Γ o solo per Γ').

Allora D_l è interno ad un certo numero di archi semplici di Γ (ved. n. 1), che indicheremo con γ_r^l ($r = 1, \dots, p_l$) e analogamente è interno ad un certo numero di archi di Γ' , $\gamma'_s{}^l$ ($s = 1, \dots, p'_l$).

Per ogni γ_r^l , se n è sufficientemente grande (in modo che gli estremi dei γ_r^l ($r = 1, \dots, p_l$) siano esterni a $I_l(\overline{R}_n)$), potremo considerare il sottoarco $\gamma_r^l(\overline{R}_n)$ di γ_r^l , di estremi il primo e l'ultimo punto che si incontrano su γ_r^l (percorrendolo nel senso fissato su Γ) appartenenti a $\omega_l(\overline{R}_n)$. Analogamente per ogni $\gamma'_s{}^l$, sia $\gamma'_s{}^l(\overline{R}_n)$ il sottoarco di $\gamma'_s{}^l$ di estremi il primo e l'ultimo punto che si incontrano su $\gamma'_s{}^l$ (percorrendolo nel senso fissato su Γ' dalla t) appartenenti a $\omega_l(\overline{R}_n)$.

Con gli stessi ragionamenti e lo stesso simbolismo del n. 2 a) e b) (basterà porre $\rho = \overline{R}_n$ e $\nu = l$), ricaviamo allora l'esistenza di un numero $R(\overline{R}_n)$ funzione di n , tale che ogni $\gamma_r^l(\overline{R}_n)$

($l = 1, \dots, h'$; $r = 1, \dots, p_l$) non ha punti esterni al cerchio di centro D_l e di raggio $R(\overline{R}_n)$ ed inoltre è $\lim_{n \rightarrow +\infty} R(\overline{R}_n) = 0$.

Definiamo poi in modo analogo ⁽³³⁾ il numero $R'(\overline{R}_n)$, cioè ogni γ'_s ($l = 1, \dots, h'$; $s = 1, \dots, p'_l$) non abbia punti esterni al cerchio di raggio $R'(\overline{R}_n)$ e di centro D_l e sia $\lim_{n \rightarrow +\infty} R'(\overline{R}_n) = 0$.

Poniamo allora infine $R_n^* = \max [R(\overline{R}_n), R'(\overline{R}_n)]$.

Risulta $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^* = 0$.

Per ogni D_l sia poi $I_l(R_n^*)$ l'intorno circolare aperto di centro D_l e di raggio R_n^* ($l = 1, \dots, h'$).

d) Fatte queste premesse, fissiamo n sufficientemente grande (\geq di un certo \overline{n}) in modo che, oltre alle proprietà precedenti, sia anche soddisfatta la :

$$R_n^* < \frac{1}{2} \min [\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2, \overline{\rho}_3, \overline{\rho}_4, \overline{\rho}_5; \theta; \rho_1, \dots, \rho_{l+r}; \rho'_1, \dots, \rho'_{l+r}] = \eta,$$

e inoltre in modo che i punti di Γ e Γ' appartenenti agli intorni $I_l(\overline{R}_n)$ ($l = 1, \dots, h'$) appartengono tutti agli archi γ_r^l e γ'_s ($r = 1, \dots, p_l$; $s = 1, \dots, p'_l$) ⁽³⁴⁾.

Osserviamo che, poichè è $\overline{R}_n \leq R_n^*$, risulta anche $\overline{R}_n < \eta$.

⁽³³⁾ Come si è fatto nel n. 2 a) e b) per ogni l e ogni s si consideri dunque la massima distanza dei punti di $\gamma'_s(\overline{R}_n)$ dal punto D_l e si dica $R'_{l,s}(\overline{R}_n)$; poichè è $\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{R}_n = 0$, segue come nel n. 2 a) che è anche

$\lim_{n \rightarrow +\infty} R'_{l,s}(\overline{R}_n) = 0$; sia allora $R'(\overline{R}_n)$ il più grande dei $R'_{l,s}(\overline{R}_n)$ ($l = 1, \dots, h'$; $s = 1, \dots, p'_l$).

⁽³⁴⁾ Circa la possibilità di questa ultima affermazione, si ricordi che per ogni l ($l = 1, \dots, h'$) l'insieme dei punti di Γ e di Γ' che non sono interni ai γ_r^l e γ'_s ($r = 1, \dots, p_l$; $s = 1, \dots, p'_l$) ha una distanza positiva da D_l .

Ritorniamo ora agli insiemi G_i definiti nel n. 7 b) ($i = 1, \dots, f+g$).

Ad ogni G_i appartengono alcuni punti D_i ; siano essi D_{l_r} ($r = 1, \dots, r_i$).

Andiamo a costruire nel seguente modo i nuovi insiemi

$$G_i^{\overline{R}_n} = G_i + \sum_{r=1}^{r_i} \overline{I}_{l_r}(\overline{R}_n) ; G_i^{R_n^*} = G_i + \sum_{r=1}^{r_i} \overline{I}_{l_r}(R_n^*)$$

$$\lambda_i^{R_n^*} = \lambda_i + \sum_{r=1}^{r_i} {}^* \overline{I}_{l_r}(R_n^*) ; \lambda_i^{l_n^*} = \lambda_i' + \sum_{r=1}^{r_i} {}^{**} \overline{I}_{l_r}(R_n^*)$$

($i = 1, \dots, f+g$)

dove con $\overline{I}_{l_r}(\overline{R}_n)$ e $\overline{I}_{l_r}(R_n^*)$ abbiamo indicato gli intorni ottenuti dagli $I_{l_r}(\overline{R}_n)$ e $I_{l_r}(R_n^*)$, aggiungendovi la circonferenza fron-

tiera, $\sum_{r=1}^{r_i} {}^*$ va estesa per ogni i solo a quei l_r per cui D_{l_r} appar-

tiene a Γ (e quindi a λ_i) e $\sum_{r=1}^{r_i} {}^{**}$ va invece estesa, per ogni i , solo a quei l_r per cui D_{l_r} appartiene a Γ' (e quindi a λ_i'); notiamo che anche i nuovi insiemi $G_i^{\overline{R}_n}$, $G_i^{R_n^*}$, $\lambda_i^{R_n^*}$, $\lambda_i^{l_n^*}$ sono chiusi.

Osserviamo poi che i punti dell'insieme $\lambda_i^{R_n^}$ non sono trasformati dalla t in punti dell'insieme $\lambda_i^{l_n^*}$, poichè R_n^* è minore di ρ_i e di ρ_i' ($i = 1, \dots, f+g$) (ved. n. 7 b).*

Inoltre gli \overline{H} di I^a specie, non appartenenti agli $\overline{H}[\theta]$ e gli insiemi $G_i^{\overline{R}_n}$ (o $G_i^{R_n^*}$) ora definiti hanno a due a due tra di loro a comune al più punti appartenenti ad j , che sono inoltre di frontiera per entrambi. Ciò segue immediatamente dall'osservazione finale del n. 7 a) e dal fatto che \overline{R}_n (o R_n^*) è minore della metà di θ e di $\overline{\rho}_3$ (ved. n. 7 b)).

Sarà anche bene osservare che gli intorni $\overline{I}_l(R_n^*)$ ($l = 1, \dots, h'$)

sono a due a due senza punti a comune poichè $R_n^* \bar{\rho}_1 < \frac{1}{2} \bar{\rho}_5$
 e $< \frac{1}{2} \bar{\rho}_2$.

e) Sempre supponendo n fissato e $\geq \bar{n}$, veniamo ora a studiare gli insiemi $\bar{\Gamma} \left(\frac{1}{n} \right) = \Gamma \left(\frac{1}{n} \right) + J \left(\Gamma \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ e $\bar{\Gamma}' \left(\frac{1}{n} \right) = \Gamma' \left(\frac{1}{n} \right) + J \left(\Gamma' \left(\frac{1}{n} \right) \right)$.

Dimostriamo anzitutto che ogni punto P di $\bar{\Gamma} \left(\frac{1}{n} \right)$, che sia esterno ad ognuno degli intorni $\bar{I}_l(\bar{R}_n)$ ($l = 1, \dots, h'$), appartiene a $\bar{\Gamma}$.

Da quanto si è visto nel n. 7 c), all'inizio, se P appartiene a $\Gamma \left(\frac{1}{n} \right)$, risulta immediatamente che appartiene a Γ .

Se invece P è un punto di $J \left(\Gamma \left(\frac{1}{n} \right) \right)$, allora lo stesso ragionamento richiamato nel n. 4 c), ci assicura, poichè $\bar{R}_n \geq 4 R \left(\frac{1}{n} \right)$, che l'ordine di P rispetto a Γ e a $\Gamma \left(\frac{1}{n} \right)$ è lo stesso; quindi P appartiene anche a $J(\Gamma)$.

Ne segue che $\bar{\Gamma} \left(\frac{1}{n} \right)$ è contenuto nell'insieme $\bar{\Gamma} + \sum_{i=1}^{h'} \bar{I}_i(\bar{R}_n)$.

Per gli stessi ragionamenti, poichè $\bar{R}_n \geq 4 R' \left(\frac{1}{n} \right)$, anche ogni punto di $\bar{\Gamma}' \left(\frac{1}{n} \right)$, esterno ad ognuno degli intorni $\bar{I}_i(\bar{R}_n)$ appartiene a $\bar{\Gamma}'$ e quindi $\bar{\Gamma}' \left(\frac{1}{n} \right)$ appartiene all'insieme $\bar{\Gamma}' + \sum_{i=1}^{h'} \bar{I}_i(\bar{R}_n)$.

Ne segue allora, in virtù del n. 6 h) e della definizione

dei $G_i^{\bar{R}_n}$ che:

$$\bar{\Gamma}'\left(\frac{1}{n}\right) \subset \bar{J} + \sum_{i=1}^{r+g} G_i^{\bar{R}_n} + \Sigma' \bar{H}$$

dove la $\Sigma' \bar{H}$ è estesa agli \bar{H} di Γ^a specie che non appartengono a nessuno degli $\bar{H}[0]$.

Naturalmente, a maggior ragione poichè $G_i^{\bar{R}_n} < G_i^{R_n^*}$, si ha

$$\bar{\Gamma}'\left(\frac{1}{n}\right) \subset \bar{J} + \sum_{i=1}^{r+g} G_i^{R_n^*} + \Sigma' \bar{H}.$$

f) Le considerazioni or ora richiamate (che sono poi quelle usate nel n. 4 c) ci permettono anche di dire che il punto O , il quale appartiene a $J(\Gamma)$ e a $J(\Gamma')$ per ipotesi, ha lo stesso ordine rispetto a Γ e $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e rispetto a Γ' e $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ (basta ricordare che \bar{R}_n è minore di $\bar{\rho}_4$); quindi O appartiene sia a $J\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ che a $J\left(\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Esiste perciò l'involucro j_n di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ rispetto ad O e quello J_n di $J\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ e di $J\left(\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ rispetto ad O ; e J_n è una regione semplice di Jordan la cui frontiera è la curva semplice chiusa j_n .

Vogliamo ora dimostrare che ogni punto di J , il quale sia esterno agli intorni $\bar{I}_i(R_n^*)$ dei punti D_i , che appartengono ad j , appartiene anche a J_n .

Diciamo $J^{R_n^*}$ l'insieme di questi punti. Anzitutto O appartiene a $J^{R_n^*}$ (poichè appartiene ad J e poichè R_n^* è minore di $\bar{\rho}_4$) e appartiene anche a J_n .

Sia allora P un punto di $J^{R_n^*}$, distinto da O , e sia γ una spezzata di un numero finito di lati unente O con P e tutta interna a J . Se γ non possiede punti che siano interni agli in-

torni $\bar{I}_l(\bar{R}_n)$ dei punti D_l appartenenti ad J , allora ogni punto di γ (e quindi anche P) appartiene a J_n ; infatti percorrendo γ da O (che appartiene a J_n) verso P non si possono incontrare punti nè di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ nè di $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$, poichè i punti di γ appartengono a J e sono esterni agli intorni $I_l\left(R\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ e $I_l\left(R'\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, di raggi rispettivamente $R\left(\frac{1}{n}\right)$ e $R'\left(\frac{1}{n}\right)$, di tutti i punti D_l (si ricordi che si è determinato \bar{R}_n , e quindi $R\left(\frac{1}{n}\right)$ e $R'\left(\frac{1}{n}\right)$, minore di $\bar{\rho}_1$ e si tenga presente quanto si è dimostrato all'inizio del n. 7 c)).

Supponiamo dunque che non sia verificato il caso suddetto e sia allora (ved. fig. 6) $\bar{I}_l(\bar{R}_n)$ il primo degli intorni $\bar{I}_l(\bar{R}_n)$, che si incontra percorrendo γ da O a P e nel cui interno γ « penetra » (il che significa che γ ha punti a comune con $I_l(\bar{R}_n)$). Indichiamo per semplicità con $\omega_{l,n}$ la frontiera $\omega_l(\bar{R}_n)$ di $\bar{I}_l(\bar{R}_n)$.

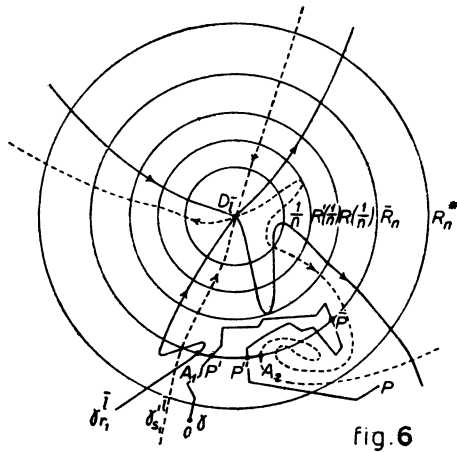


fig. 6

Ogni arco $\gamma_r^l(\bar{R}_n)$ ($r = 1, \dots, p_l$) dà luogo con $\omega_{l,n}$ ad un involucro $j(\omega_{l,n}, \gamma_r^l(\bar{R}_n))$ (ved. n. 6 n) che indicheremo per semplicità con $j_{l,r}^n$, e al quale appartengono, come si è fatto notare nel n. 6 n), degli archi i cui punti interni appartengono a $\omega_{l,n}$ e non a $\gamma_r^l(\bar{R}_n)$, ma i cui estremi appartengono anche a $\gamma_r^l(\bar{R}_n)$; indichiamo per ogni r da 1 a p_l con $\{\alpha_r^m\}$ questi archi, che saranno al più un'infinità numerabile ($m = 1, 2, \dots$).

Così pure ogni arco $\gamma'_s(\overline{R_n})$ ($s = 1, \dots, p'_r$) darà luogo all'involucro $j(\omega_{l,n}, \gamma'_s(\overline{R_n}))$, che indicheremo anche con $j'_{l,s}$ e al quale apparterrà un'infinità numerabile al più di archi, che diremo $\{\alpha'_m\}$ ($m = 1, 2, \dots$) i cui punti interni appartengono a $\omega_{l,n}$ e non a $\gamma'_s(\overline{R_n})$ mentre gli estremi appartengono anche a $\gamma'_s(\overline{R_n})$.

Delle $p_r + p'_r$ curve chiuse semplici $j^n_{l,r}$ e $j'^n_{l,s}$ ($r = 1, \dots, p_r$; $s = 1, \dots, p'_r$) potremo considerare l'involucro nel senso specificato dal teorema fondamentale della nota citata in ⁽³⁰⁾ di G. SCORZA DRAGONI, ⁽³⁵⁾ cioè quella curva chiusa semplice, che indicheremo

con j_{R_n} , contenuta nell'insieme $E = \sum_{r=1}^{p_r} j^n_{l,r} + \sum_{s=1}^{p'_r} j'^n_{l,s}$, che separa dall'infinito i punti di E che non le appartengono, mentre non separa dall'infinito tutti e soli i punti che si possono unire con l'infinito mediante una semilinea semplice priva di punti comuni con E , a meno eventualmente dell'origine.

Sia $J(j_{R_n})$ la regione dei punti interni j_{R_n} ; osserviamo che $I_r(\overline{R_n})$ appartiene a $J(j_{R_n})$ mentre $J(\overline{R_n})$ è contenuto in $\overline{I_r}(R_n^*)$, sicchè O e P sono esterni a $J(j_{R_n})$.

Percorriamo ora γ partendo da O (fisseremo per il seguito su γ il verso da O a P) e sia P' il primo punto di $\omega_{l,n}$ che si incontra su γ , tale che in ogni suo intorno esistano punti di γ interni $I_r(\overline{R_n})$ (diremo anche che in P' γ «penetra» in $I_r(\overline{R_n})$). Poichè P' appartiene a J esisterà un arco $\bar{\alpha}$ di $\omega_{l,n}$ tutto costituito, tranne gli estremi A_1 e A_2 , di punti di J e contenente P' come punto interno; A_1 e A_2 apparterranno a Γ o a Γ' e l'arco $\bar{\alpha}$ apparterrà a j_{R_n} .

Osserviamo anche che l'arco di γ $\widehat{OP'}$ non contiene punti interni a $I_r(\overline{R_n})$ e nemmeno a $J(j_{R_n})$.

⁽³⁵⁾ Si osservi all'uopo che le suddette curve hanno a due a due punti interni a comune, e precisamente almeno tutti i punti $I_r(\overline{R_n})$.

Proseguendo da P' verso P su γ , «penetreremo» in $I_{\bar{\gamma}}(\bar{R}_n)$ e quindi anche in $J(j_{\bar{R}_n})$. D'altra parte, poichè P è esterno a $J(j_{\bar{R}_n})$, γ dovrà incontrare di nuovo $j_{\bar{R}_n}$.

Dico che γ incontra $j_{\bar{R}_n}$ in almeno un altro punto P'' seguente P' su γ e interno ad $\bar{\alpha}$. Infatti supponiamo che A_1 appartenga a Γ e A_2 a Γ' (in modo del tutto analogo si potrebbe ragionare se A_1 e A_2 appartenessero tutti e due a Γ o a Γ' oppure A_2 appartenesse a Γ e A_1 a Γ'); allora A_1 appartiene a un certo arco $\gamma_{r_1}^{\bar{r}_1}(\bar{R}_n)$ e A_2 a un certo arco $\gamma_{s_1}^{\bar{s}_1}(\bar{R}_n)$. Sia $\alpha_{r_1}^{\bar{m}}$ quello degli archi $\{\alpha_{r_1}^m\}$ determinati da $\gamma_{r_1}^{\bar{r}_1}(\bar{R}_n)$ su $\omega_{i,n}$, che contiene $\bar{\alpha}$ ($\alpha_{r_1}^{\bar{m}}$ esiste certamente in virtù del fatto che i punti interni a $\bar{\alpha}$ non appartengono a Γ); e così pure sia $\alpha_{s_1}^{\bar{m}}$ quello degli archi $\{\alpha_{s_1}^m\}$ determinati da $\gamma_{s_1}^{\bar{s}_1}(\bar{R}_n)$ su $\omega_{i,n}$ che contiene $\bar{\alpha}$; li diremo per semplicità rispettivamente α_1 e α'_1 .

Sia poi $\bar{\gamma}_{r_1}$ il sottoarco di $\gamma_{r_1}^{\bar{r}_1}(\bar{R}_n)$ avente gli stessi estremi di α_1 e $\bar{\gamma}_{s_1}$ il sottoarco di $\gamma_{s_1}^{\bar{s}_1}(\bar{R}_n)$ aventi gli stessi estremi di α'_1 . Allora $\alpha_1 + \bar{\gamma}_{r_1}$ formano una curva semplice chiusa e così pure $\alpha'_1 + \bar{\gamma}_{s_1}$. I punti di γ opportunamente vicini a P' e seguenti P' sono interni sia a $J(\alpha_1 + \bar{\gamma}_{r_1})$ che a $J(\alpha'_1 + \bar{\gamma}_{s_1})$; sia C uno di essi. Esiste allora l'involucro $\bar{\omega}$ di $\alpha_1 + \bar{\gamma}_{r_1}$ e $\alpha'_1 + \bar{\gamma}_{s_1}$ rispetto a C e la regione dei punti interni a ω , $J(\bar{\omega})$ appartiene sia a $J(\alpha_1 + \bar{\gamma}_{r_1})$ che a $J(\alpha'_1 + \bar{\gamma}_{s_1})$; e $\bar{\alpha}$, poichè appartiene sia a α_1 che a α'_1 , appartiene anche ad $\bar{\omega}$.

L'arco γ «penetra» in $J(\bar{\omega})$ nel punto P' ; ma deve «uscirne» perchè P è esterno a $\bar{I}_{\bar{\gamma}}(\bar{R}_n)$ cui appartiene $J(\bar{\omega})$.

Ci saranno perciò su γ altri punti, seguenti P' , comuni con $\bar{\omega}$. Dico che ce n'è almeno uno interno ad $\bar{\alpha}$.

Infatti un eventuale punto \bar{P} comune a γ e a $\bar{\omega}$, non può appartenere nè a $\bar{\gamma}_{r_1}$ nè a $\bar{\gamma}_{s_1}$, perchè, come punto di γ , non appartiene nè a Γ nè a Γ' . Potrebbe allora essere interno ad un

eventuale sottoarco $\bar{\alpha}_1$ di α_1 , che fosse appartenente ad $\bar{\omega}$ e sotteso ⁽³⁶⁾ rispetto a C alla curva $\alpha'_1 + \bar{\gamma}'_{s_1}$. Si sa allora che $\bar{\alpha}_1$ e il sottoarco $\bar{\gamma}'_{s_1}$ di $\bar{\gamma}'_{s_1}$, avente gli stessi estremi di $\bar{\alpha}_1$, formano una curva chiusa semplice, il cui interno è una regione semplice di Jordan $J(\bar{\alpha}_1 + \bar{\gamma}'_{s_1})$ non avente punti comuni con $J(\bar{\omega})$ e tutta contenuta in $I_{\bar{\Gamma}}(R_n^*)$. Perciò se γ « penetra » dopo \bar{P} in $J(\bar{\alpha}_1 + \bar{\gamma}'_{s_1})$, poichè P è esterno a $I_{\bar{\Gamma}}(R_n^*)$, deve « uscirne » e non potendo avere punti a comune con l'arco $\bar{\gamma}'_{s_1}$, che appartiene a Γ' , incontrerà di nuovo $\bar{\alpha}_1$ e « penetrerà » quindi di nuovo in $J(\bar{\omega})$.

In modo del tutto analogo si ragionerebbe se P fosse interno ad un eventuale arco $\bar{\alpha}'_1$ di α'_1 , appartenente a $\bar{\omega}$ e sotteso rispetto a C alla curva $\alpha_1 + \bar{\gamma}_{r_1}$.

Ma allora ne ricaviamo, sempre perchè P è esterno a $I_{\bar{\Gamma}}(R_n^*)$ che deve esistere almeno un punto di γ appartenente (anzi interno) ad $\bar{\alpha}$ e seguente P' .

Sia allora P'' l'ultimo di questi punti; sostituiamo l'arco di γ di estremi P' e P'' con l'arco $\widehat{P'P''}$ di $\bar{\alpha}$. Otterremo così una curva γ' unente O con P e ancora tutta appartenente ad J e inoltre tale che il suo arco di estremi O e P'' appartiene pure a J_n , in quanto non incontra punti appartenenti nè a $\Gamma(\frac{1}{n})$ nè a $\Gamma'(\frac{1}{n})$. Proseguendo ora da P'' su γ' , (sempre nel verso assegnato da O a P) per la definizione stessa di P'' « usciremo » da $J(j_{\bar{R}_n})$, cioè i punti di γ' sufficientemente vicini a P'' e seguenti P'' , saranno esterni a $J(j_{\bar{R}_n})$ (e quindi anche a $I_{\bar{\Gamma}}(\bar{R}_n)$). Siamo allora nelle stesse condizioni iniziali, sicchè se γ' dovesse avere ancora punti interni a $I_{\bar{\Gamma}}(\bar{R}_n)$, essa vi « penetrerebbe » attraverso un arco del tipo di $\bar{\alpha}$; in modo

(36) Per le definizioni di archi massimi sottesi o sottesi di due curve semplici chiuse si veda la memoria cit. in (1) § 1.

del tutto analogo potremo quindi sostituire agli archi di γ' del tipo di $\widehat{P'P''}$ archi interni a J_n ; e l'operazione così ripetuta, essendo gli intorni \bar{I}_i (\bar{R}_n) in numero finito e γ una spezzata di un numero *finito* di lati avrà termine, dopo un certo numero finito di volte, in modo da ottenere alla fine una curva semplice e aperta di estremi O e P tutta appartenente ad J_n .

In ogni caso quindi P appartiene a J_n ; quindi J^{R_n} appartiene a J_n .

g) Consideriamo ora sull'involucro j_n di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ rispetto ad O , gli archi massimi di $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ $\{\mu_p^n\}$ ($p = 1, 2, \dots$) sottesi a $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ rispetto ad O e i corrispondenti archi massimi di $\Gamma'\left(\frac{1}{n}\right)$ $\{\nu_p^n\}$ sottesi a $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ rispetto ad O . Sappiamo che $\nu_p^n + \mu_p^n$ delimitano una bicella; diciamo V_p^n la regione semplice dei punti ad essa interni.

Vogliamo dimostrare che ogni V_p^n appartiene ad uno ed ad uno solo degli insiemi $G_i^{R_n}$ ($i = 1, \dots, f+g$) o degli insiemi \bar{H} (di I^a specie) che non appartengono agli $\bar{H}[\theta]$.

Infatti, anzitutto i punti di ogni V_p^n sono esterni a J_n , ma appartengono a $\bar{\Gamma}'\left(\frac{1}{n}\right)$. Perciò, in virtù del n. 7 e) e del n. 7 f), essi appartengono certamente all'insieme $T_n = \sum_{i=1}^{f+g} G_i^{R_n} + \Sigma' \bar{H}$, essendo la $\Sigma' \bar{H}$ estesa agli \bar{H} (di I^a specie) non appartenenti agli $\bar{H}[\theta]$.

Supponiamo allora che V_p^n non appartenga ad uno solo dei $G_i^{R_n}$ o degli \bar{H} considerati, che compongono T_n . Siano allora P_1 e P_2 due punti di V_p^n appartenenti a due distinti di questi insiemi, che diremo per semplicità H_1 e H_2 (potendo H_1 e H_2 essere dei $G_i^{R_n}$ o degli \bar{H} di I^a specie di T_n).

P_1 e P_2 possono unirsi, essendo V_p^n una regione semplice

di Jordan, mediante una curva σ appartenente a V_p^n . Ma σ unisce un punto di H_1 con un punto di H_2 e poichè gli insiemi $G_i^{R_n^*}$ e gli \overline{H} di I^a specie considerati, possono avere al più a comune dei punti frontiera, appartenenti ad j (ved. n. 7 d)) e d'altra parte σ deve appartenere a T_n , otteniamo che σ deve possedere almeno un punto \overline{P} appartenente ad j e alla frontiera di due degli insiemi $G_i^{R_n^*}$ e \overline{H} considerati. Allora \overline{P} non è interno a nessuno degli intorni $I_l (R_n^*)$ ($l = 1, \dots, h'$) e appartiene a j . Ma poichè V_p^n è un insieme aperto, esisterebbe allora un intorno circolare di \overline{P} costituito tutto di punti di V_p^n e ne verrebbe che esisterebbero punti di V_p^n appartenenti all'insieme $J^{R_n^*}$ il che è assurdo, poichè $J^{R_n^*}$ appartiene a J_n (ved. n. 7 f)).

h) Abbiamo dunque stabilito che V_p^n appartiene ad uno solo degli insiemi $G_i^{R_n^*}$ o degli \overline{H} di I^a specie non appartenenti agli $\overline{H}[\theta]$; poichè i $G_i^{R_n^*}$ e gli \overline{H} sono chiusi, anche $V_p^n + \mu_p^n + \nu_p^n$ appartiene a questo insieme.

Supponiamo dapprima che esso sia un $G_i^{R_n^*}$. Allora μ_p^n appartiene certamente a $\lambda_i^{R_n^*}$, per la definizione stessa di $\lambda_i^{R_n^*}$; e così pure ν_p^n appartiene a $\lambda_i^{R_n^*}$. Perciò (ved. n. 7 d)) i punti di μ_p^n non sono trasformati da t in punti di ν_p^n .

Nel caso poi che V_p^n appartenga ad uno degli \overline{H} di I^a specie non appartenenti agli $\overline{H}[\theta]$, allora la bicella $V_p^n + \mu_p^n + \nu_p^n$ coincide addirittura con \overline{H} , poichè \overline{H} è una bicella relativa ad un certo arco $\overline{\beta}$ (ved. n. 6 b)) la quale non può che essere la $V_p^n + \mu_p^n + \nu_p^n$, essendo in \overline{H} coincidenti Γ con $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ e Γ' con $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$. Ne segue che anche in questo caso i punti di μ_p^n , che coincide con $\overline{\beta} = \lambda(\overline{H})$, non possono essere trasformati da t in punti di ν_p^n , che coincide con $\lambda'(\overline{H})$.

Ma allora è possibile applicare a $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ il teorema VI^o di

G. SCORZA DRAGONI, citato in ⁽³⁾ (27), in virtù del quale esiste dunque un punto unito nella t appartenente sia a $\bar{\Gamma}\left(\frac{1}{n}\right)$ che a $\bar{\Gamma}'\left(\frac{1}{n}\right)$. Sia esso P_n (28). La successione dei P_n ($n \geq \bar{n}$; ved. n. 7 d) ha almeno un punto di accumulazione P_0 , che è evidentemente unito nella t . P_0 appartiene a $\bar{\Gamma}$ (e quindi anche a $\bar{\Gamma}'$); infatti se ciò non fosse, P_0 e tutti i punti di un opportuno intorno di P_0 apparterrebbero a $E(\Gamma)$ e, da un certo n_{p_0} in poi, (ved. n. 4 b) apparterrebbero anche a $E\left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right)$; perciò P_0 non sarebbe punto di accumulazione dei P_n .

Il teorema è con ciò dimostrato.

OSSERVAZIONE. - Nel caso che Γ sia una curva chiusa semplice il teorema si riduce al teorema VI° di G. SCORZA DRAGONI; infatti non esistono allora gli \bar{H} di II° e III° specie; inoltre gli \bar{H} di I° specie risultano essere le « lunule » delimitate dagli archi massimi di Γ sottesi a F' rispetto ad O e dai corrispondenti archi massimi di Γ' sottesi a Γ rispetto ad O , e questi archi massimi sono poi rispettivamente gli insiemi $\lambda(\bar{H})$ e $\lambda'(\bar{H})$ dell' enunciato.

(37) Il teorema VI° si enuncia nell'ipotesi che i punti interni di μ_p^* non siano trasformati in punti di $V_p^* + \nu_p^*$; ma in realtà, essendo la t topologica basta dire che i punti di μ_p^* non siano trasformati in punti di ν_p^* .

(38) È ovvio come si possa evitare il postulato di ZERMELO in questo ragionamento.