RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO BALDASSARRI

Sulle caratteristiche per le condizioni doppie e triple delle coniche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 54-67

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__54_0>

SULLE CARATTERISTICHE PER LE CONDIZIONI DOPPIE E TRIPLE DELLE CONICHE

Nota (*) di Mario Baldassarri (*a Padova*) (1).

Il Severi nella Memoria: «I fondamenti della geometria numerativa» (2), ha compiuta, in applicazione ed esplicazione dei metodi generali esposti, una delicata ed organica analisi delle caratteristiche delle coniche complete.

Essendomi proposto di fornire, mediante tali risultati, una risoluzione sistematica dei vari problemi di contatto di coniche rispetto una curva algebrica (3), mi sono incontrato con alcune difficoltà nel caso delle condizioni doppie e triple, che richiedevano evidentemente un approfondimento dello studio delle rispettive caratteristiche. A questo è dedicato il presente lavoro che partendo da un esame numerativo di alcune varietà, giunge sino *alla determinazione di una base minima per le condizioni doppie e triple.*

Dopo questi complementi mi sarà possibile, in un successivo lavoro compire la predetta sistemazione delle condizioni di contatto.

Avverto che i simboli usati sono (salvo esplicita notizia) gli stessi della Memoria citata del Severi.

(*) Pervenuta in Redazione il 3 novembre 1948.

(1) La presente Nota è stata oggetto di una Comunicazione al Congresso Matematico della U. M. I. dell'ottobre di questo anno.

(2) «*Annali di Matematica*», (4), 19 (1940), pagg. 153-242.

(3) Questi problemi sono molto antichi, risalendo i primi sino a Steiner. Nella loro risoluzione si trovano le prime esperienze di geom. numerativa. Senonchè le risoluzioni sono spesso parziali, quasi sempre prive di rigore e mai ispirate ad un metodo critico sistematico.

1. - L'insieme delle coniche complete di un piano π, definite come enti algebrici di ordine due entro la varietà delle coppie punto-retta incidenti del piano, ammette un modello birazionale, privo di punti multipli, in una varietà M_5 dello S_{35}, immagine delle coppie punto-iperpiano polari rispetto la M_4^3 relativa alla superficie G di VERONESE di un S_5 (4).

Le varietà E', F', H' (irriducibili) delle dimensioni rispettivamente 4, 4 e 3, immagini nella M_5 delle coniche complete degeneri di prima, seconda e terza specie, compaiono come varietà eccezionali della corrispondenza birazionale posta tra i punti della M_5 e dello S_5.

Una condizione doppia, imposta alle coniche complete del piano π ha per immagine nella M_5 una V_3', la quale ha per intersezioni normali con E', F', H' rispettivamente due superficie ed una curva. Analogamente, con gli ovvii cambi di dimensione, per le condizioni triple rappresentate da V_2' della M_5.

Il problema delle caratteristiche per le condizioni doppie e triple è così ricondotto al problema della determinazione di una base minima di fronte alla equivalenza razionale per le V_2' e le V_3' della M_5.

2. - Le V_3' della M_5 cui non si prescriva alcun particolare comportamento rispetto le varietà di degenerazione E', F', H', segano (virtualmente) H' secondo una curva, e la totalità di esse proviene: o da V_3 dello S_5 che incontrano G in un numero finito di punti, o da V_3 che tagliano genericamente G secondo una curva, o infine da V_3 passanti genericamente per G. Come modelli di questi tre tipi si possono assumere i seguenti:

a) Uno S_3 generico dello S_5. In particolare quello immagine delle ∞^3 coniche per due punti, per cui si indica con μ^2 la corrispondente condizione numerativa (5).

b) Lo S_3 immagine nello S_5 delle coniche-luogo tangenti ad una retta in un punto. Esso taglia infatti G in una conica. Simbolo: $\widehat{\mu\nu}$.

(4) F. SEVERI, Mem. cit., n. 50.

(5) Useremo talora espressioni, comode se pur non precise, come «lo S_3 μ^2», confondendo la varietà con la condizione relativa.

c) La V_3^4 intersezione di due forme quadratiche Q passanti semplicemente per G (6). Come forma Q si può assumere la forma immagine delle ∞^2 coniche-luogo tangenti ad una retta. Simbolo ν^2.

Si noti, infatti, che le V_3' trasformate nella M_5 incontrano H' rispettivamente in:

a) Quattro curve ψ', immagini ciascuna delle ∞^1 coniche complete, che si ottengono associando ad un punto di G gli ∞^1 iperpiani tangenti singolari di E passanti per quel punto.

b) Una curva g' immagine delle ∞^1 coniche complete di terza specie, che si ottengono associando ad un iperpiano tangente singolare, gli ∞^1 punti della conica di G che gli appartiene.

c) Una curva g'.

La base di tali V_3' è quindi, come osserva il Severi (7), la trasformata della base delle V_3 dello S_5 aventi i comportamenti precisati, cioè appunto quella formata dai tipi a, b, c.

Analogamente le superficie della M_5 aventi comportamento normale, segano (virtualmente) H' secondo un numero finito di punti, e quindi provengono da V_2 dello S_5 che non incontrano G, o da V_2 che incontrano G in un numero finito di punti e toccano ivi o no E, o da V_2 seganti G in una curva, ma che non toccano E nei punti di quella curva.

Come tipi nello S_5 si possono quindi assumere:

a) Lo S_2 immagine delle coniche per tre punti. Simbolo: μ^3.

b) Un piano appoggiato genericamente in un punto a G, immagine quindi di una rete di coniche-luogo del piano π, luogo di ∞^1 fasci-schiera che si ottengono associando una retta doppia con le coniche di un fascio generico Φ. Fra i fasci-schiera vi sono due fasci di coniche iperosculatrici in corrispondenza alle due coniche di Φ tangenti alla retta doppia. Ed a questi appartengono due coniche complete degeneri di terza specie che si ottengono associando al punto di G considerato i due iperpiani singolari

(6) Si ricordi che 2 è l'ordine minimo delle forme passanti per G. Cfr. Severi, Mem. cit., n. 44.

(7) F. Severi, Mem. cit., n. 56, 66.

contenenti le due rette passanti per il punto di G, giacenti nello S_2 ed osculatrici di E, intersezioni dello S_2 col cono quadrico delle rette osculatrici ad E in quel punto di G. Simbolo: ξ.

c) Il Severi usa qui il piano π_g di una conica di G, che ha per immagine nella M_5 una V'_2 che taglia H' secondo una curva g'. Una tale scelta non si adatta però al nostro scopo di ottenere una base minima anche per V'_2 aventi comportamento non normale, come avremo poi modo di vedere chiaramente.

Sceglieremo invece la V_2 intersezione di una forma quadratica Q (del tipo già considerato) con un S_3 del tipo (b). Una tale V_2, di simbolo $\widehat{\mu\nu}\,\nu$, taglia G secondo una conica, ma la sua trasformata V'_2 nella M_5 non incontra H', perchè lo S_3 $\widehat{\mu\nu}$ dà una V'_3 che taglia H' secondo una curva g' e Q una Q' che taglia H' secondo ∞^1 curve g' formanti una superficie Ψ', e, com' è ovvio, si ha: $[g', \Psi'] = 0$, dato che, genericamente, la g' non stà in Ψ'.

Concludendo si ha, in modo analogo al caso delle V'_3, che i tipi a, b, c formano una base per le V'_2 considerate.

Il calcolo del discriminante simultaneo Δ delle V'_3 (μ^2, $\widehat{\mu\nu}$, ν^2) e V'_2 (μ^3, ξ, $\widehat{\mu\nu}\,\nu$) fornisce con calcoli immediati

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

il cui valore assoluto minimo garantisce a posteriori trattarsi di una base minima.

La base trovata per le V'_2 non offre certamente i vantaggi della simmetria autoduale (rispetto le reciprocità del piano π) che sono offerte da quella per le V'_3, il che costituisce un certo disagio per le applicazioni pratiche, ma non sembra facile associare i requisiti di base minima ed autoduale.

3. - Desiderando ora ampliare la portata della soluzione del problema, includendo anche le condizioni doppie e triple, soddisfatte rispettivamente da ∞^2 o ∞^1 coniche di terza specie, occorre estendere in corrispondenza la soluzione del problema della base alle V_3' ed alle V_2' incontranti H' secondo superficie ovvero curve, cioè a varietà in posizione *eccezionale* rispetto la varietà di degenerazione H'.

Interviene qui una idea originale del SEVERI, secondo cui la nuova base si trova aggiungendo alla base già trovata nel caso normale, altre V_3' e V_2' passanti risp. per le V_2' e le V_1' formanti sopra H' la base minima per le varietà delle rispettive dimensioni (8).

Tale base è costituita da due superficie G' e Ψ' luogo risp. delle ∞^1 curve ψ' associate ai punti di una conica di G, e delle ∞^1 curve g' associate agli iperpiani tangenti singolari passanti per un punto di G, e per le curve da due g' e ψ'.

Come V_3' e V_2' il SEVERI sceglie la sezione iperpiana generica di E e una sua trasformata mediante una reciprocità piana; una sezione con un S_3 di E e, analogamente, una sua reciproca, trasportate tutte sulla M_5.

4. - Vogliamo ora approfondire lo studio delle varietà incontrate. La sezione iperpiana di E può rappresentarsi col simbolo $\delta\mu$, essendo qui μ preso come simbolo di un iperpiano generico I. I punti di I rappresentano le coniche di un sistema lineare ∞^4, γ, entro cui i punti della V_3 restano caratterizzati dalle coniche degeneri.

Le coniche di γ sono coniugate di un unico inviluppo $[\Gamma]$ formato dalle tangenti ad una conica Γ, e il punto P immagine di Γ in S_5 ha per polare rispetto E, l'iperpiano I.

I punti della V_3 sono quindi immagini delle coppie di rette coniugate rispetto Γ. Fra queste le rette doppie sono quelle stesse di $[\Gamma]$ che pertanto corrispondono ai punti della quartica k in cui la V_3 taglia G.

Sia d una di queste rette, omologa del punto D di k, ed M un suo punto. Le ∞^1 coppie di rette coniugate rispetto Γ passanti per M sono le immagini dei punti d'una retta m della V_3 appoggiata a k in D. Ogni punto di m diverso da D è per-

(8) Le basi teoriche del metodo sono nei nn. 37, 38 della Mem. cit. Cfr. anche n. 67.

tanto immagine d'una conica degenere di prima specie, la quale, quando quel punto tende a D, tende alla conica degenere di terza specie (d, M).

Si conclude che alla V_3 considerata come immagine di coniche complete appartengono tutte le ∞^2 coniche degeneri di terza specie rappresentate (come luoghi) dai punti di k. In altre parole, nella M_5, la V_3' trasformata della V_3 ed immagine della condizione $\delta\mu$ *giace tutta in* E' *e taglia* H' *secondo una superficie* $2\,G'$.

Si può far spezzare la $2\,G'$ in due effettive G' distinte, scegliendo I in modo che k si spezzi in due coniche di G. Allora l'inviluppo $[\Gamma]$ si spezza in due fasci e P va a cadere su G nella intersezione delle due coniche. Se queste addirittura coincidono, la $2G'$ è proprio una G' contata due volte (e P è indeterminato sulla conica di contatto di I).

Si avverta infine che la V_3 è determinata dalla condizione di passare doppiamente per k, poichè ciò implica che essa giaccia nello S_4 di k, e contenga tutte le corde di k che la ricoprono.

Passiamo ora alla V_2 sezione di E con un S_3, J, di simbolo $\delta\mu^2$, essendo al solito μ interpretato in senso largo.

La V_2 è intanto una superficie cubica con quattro punti doppi A, B, C, D.

I punti di J rappresentano le coniche d'un sistema lineare ∞^3, e quelli di V_2 le coniche degeneri di T; in particolare A, B, C, D le rette doppie di T.

Gl'inviluppi coniugati a tutte le coniche di T formano una schiera ∞^1 che può individuarsi con due dei suoi inviluppi $[\rho]$ e $[\sigma]$ aderenti a due coniche ρ, σ. Le coniche degeneri di T sono le coppie di rette coniugate rispetto ρ e σ, e di queste ne passa una ben determinata per ogni punto del piano (ossia V_2 è incontrata in un punto dal piano di ogni conica di G); fra queste vi sono, come rette doppie, le quattro tangenti a, b, c, d comuni a ρ e σ alle quali corrispondono i punti A, B, C, D.

Ad un punto M del piano corrisponde un punto di V_2 immagine della conica degenere di prima specie (m, n) costituita dalle due rette per M coniugate rispetto a ρ e σ; se M tende ad un punto Q di a le m, n tendono a coincidere con a, e la (m, n) tende alla conica degenere di terza specie (a, Q).

Pertanto alla V_2, come immagine di coniche complete, appartengono i quattro sistemi ∞^1 di coniche degeneri di terza specie rappresentate, come luoghi, dai punti A, B, C, D; ossia la V'_2, immagine sulla M_5 di $\delta\mu^2$, *giace tutta in* E' *e taglia* H' *in quattro curve* ψ'. Poichè una ψ' ed una G' non si tagliano, la V'_3 e la V'_2 non hanno intersezioni comuni in H'.

Che in V_2 debbano includersi come limiti tutte le coniche di terza specie legate ai punti A, B, C, D risulta dall'essere il cono Γ tangente a V_2 in A, la intersezione dello S_3, J, col cono tangente ad E in A. Quindi, se t è una delle tangenti a V_2 in A, quando un punto x di V_2 tende ad A in direzione di quella tangente, il suo iperpiano polare X tende ad uno degl'iperpiani tangenti al cono Γ variabile con t.

5. - Determiniamo ora il valore di $[V'_3\ V'_2]$, ossia di $\delta\mu\cdot\delta\mu^2$. La V_2 e la V_3 si tagliano in una cubica η, intersezione di E col piano $\tau=(I, J)$ che è in definitiva un piano generico; quindi i punti comuni a V'_2 e V'_3 riempiono una curva della quale occorrerà valutare l'equivalenza entro la varietà $E'-H'$, ossia nella E' cui si dia come contorno la H'. Osserviamo che in J le $\overline{V}_2$ cubiche coi quattro punti doppi A, B, C, D formano un sistema lineare ∞^3 (di equazione: $a\,x_1x_2x_3+b\,x_1x_2x_4+c\,x_1x_3x_4+d\,x_1x_2x_3=0$) avente come linea base la sestupla di rette-spigoli del tetraedro $A\,B\,C\,D$ che, stando in E, tagliano la V_3 in sei punti $P_1,\ldots, P_6$ posti sulla cubica η. Questi sei punti sono pertanto comuni alla V_3 ed a tutte le $\overline{V}_2$ col comportamento indicato.

Le $\overline{V}_2$ tagliano il piano τ in un sistema lineare ∞^3 di cubiche coi punti base $P_1,\ldots, P_6$ e quindi η, e di conseguenza V_3, in nove punti dei quali i sei predetti fissi, e gli altri variabili in una g_3^2 su η.

Se $\overline{V}_2$ tende alla nostra V_2 i sei punti P_i restano fissi, e gli altri tre variano tendendo ad un limite determinato dipendente dal modo con cui $\overline{V}_2$ tende a V_2. Si hanno pertanto nove interserzioni limiti e quindi, tenendo conto che nessuna di esse è in H' (cfr. n. precedente), si ha: $\delta\mu\cdot\delta\mu^2=9$.

È da notare che nel passaggio da V_2 a $\overline{V}_2$ le quattro curve

$\psi'_A, \ldots \psi'_D$ non restano più in H', ma sono sostituite da quattro curve $\psi''_A, \ldots, \psi''_D$ di F' ciascuna delle quali taglia H' in quattro punti giacenti sull'omologa ψ' (in quanto i due coni tangenti, ad es., in A hanno quattro generatrici in comune), senza però pregiudizii alla conclusione.

6. – Passiamo ora a procurarci in modo diretto l'espressione della *condizione d'iperosculazione* β *rispetto una conica fissa*, che ci permetterà poi di calcolare il discriminante simultaneo relativo alla base che c'interessa.

Le coniche soddisfacenti a β formano ∞^1 fasci ciascuno dei quali è individuato dalla conica fissa k e da una sua tangente t contata due volte. La superficie dello S_5 rappresentante β è quindi un cono col vertice nel punto P immagine della conica k.

L'iperpiano π, polare di P, è immagine dell'inviluppo aderente a k; ed i suoi punti delle coniche coniugate a quell'inviluppo. Fra queste vi sono tutte le rette doppie t (e non ve ne sono altre), quindi la loro immagine è la quartica k intersezione di π colla superficie di Veronese G. Si conclude che il cono β è quello che da P proietta k, e pertanto è del quarto ordine.

Ogni conica del sistema β è determinata sia come luogo, sia come inviluppo. Finchè la sua immagine x non cade su k, si tratta di una conica irriducibile, e quando x, muovendosi sopra una generatrice, tende ad un punto x di k, la conica corrispondente tende ad una conica di terza specie degenere, come luogo, nella retta doppia t, e, come inviluppo, nel fascio doppio avente per centro il punto di contatto T di t con k. In corrispondenza, nello S_5, l'iperpiano immagine dell'inviluppo aderente, tende ad un limite determinato, che è l'iperpiano tangente a G lungo la conica immagine di T, che ovviamente è quella tangente a k nel punto τ (9) corrispondente di T.

Pertanto, nella M_5, la immagine del cono β è una superficie β' che taglia H' secondo una curva k' e non incontra altrove nè E' nè F'.

(9) Tenendo conto che la retta $(P\tau)$ immagine del fascio-schiera individuato da k e dalla retta t è *tangente* ad E in τ, si vede che l'iperpiano limite non cambia anche se x tende al limite sul cono in direzione diversa da quella della generatrice.

Per decomporre opportunamente la condizione β, si faccia tendere P, lungo una retta generica r, ad un punto Q di G. Tanto vale far variare k in un fascio-schiera R determinato da k e da una retta doppia q^2.

Il fascio-schiera R sia:

$$(1) \qquad x_3^2 - t\, x_1\, x_2 = 0,$$

potendosi supporre che k corrisponda al valore 1 di t. La retta q sarà il lato $A_1\, A_2$ del triangolo delle coordinate.

Con riferimento ad una generica conica di R scriviamo le equazioni delle coniche che riempiono il sistema $\infty^2\ \beta$. Potremo indicare ancora con k quella conica generica e rappresentarla parametricamente con le:

$$(2) \qquad x_3 = t\,\tau \qquad x_1 = t\,\tau^2 \qquad x_2 = 1,$$

essendo τ il parametro lungo k.

La tangente m nel punto M di parametro τ è:

$$x_1 + t\,\tau^2\, x_2 - 2\,\tau\, x_3 = 0;$$

quindi l'equazione del fascio-schiera ϑ determinato da quella tangente e da k è:

$$(3) \qquad (2\,\tau\, x_3 - t\,\tau^2\, x_2 - x_1)^2 + \mu\,(x_3^2 - t\, x_1\, x_2) = 0,$$

che, al variare di τ e μ, rappresenta il sistema β aderente a k. Si tratta di cercare quali sono i limiti delle sue coniche, quando t tende a zero (disponendo opportunamente di τ e μ).

Procuriamoci intanto le equazioni delle coniche di β come inviluppi, il che è facile tenendo conto dell'autodualità di β.

Intanto l'equazione plückeriana della nostra conica è:

$$(4) \qquad t\, u_3^2 - 4\, u_1\, u_2 = 0,$$

e quella di M di coordinate date dalle (2):

$$(5) \qquad t\,\tau^2\, u_1 + u_2 + t\,\tau\, u_3 = 0;$$

quindi il fascio di coniche inviluppo aderente a ϑ è:

$$(6)\qquad (t\tau^2 u_1 + u_2 + t\tau u_3)^2 - \mu' (t u_3^2 - 4 u_1 u_2) = 0 .$$

I due sistemi (3) e (6) sono in corrispondenza biunivoca ed i relativi elementi legati ai valori $0, \infty$ di μ e μ' sono associati, dunque dev'essere: $\mu' = \lambda \mu$, e colla verifica su un caso particolare si ha precisamente:

$$(7)\qquad \mu' = \frac{1}{4} \mu t .$$

Introduciamo ora qualche notazione più opportuna per i passaggi al limite. Posto:

$$(8)\qquad \frac{1}{\tau} = \xi, \qquad t\tau = \eta \qquad (\text{e quindi: } \xi\eta = t)$$

$$\frac{\mu}{\tau^2} = \nu , \qquad \frac{\mu'}{\tau^2} = \nu' = \frac{\nu t}{4} ,$$

le (3) e (6) divengono:

$$(3')\qquad (2 x_3 - \eta x_2 - \xi x_1)^2 + \nu (x_3^2 - t x_1 x_2) = 0$$

$$(6')\qquad (\eta u_1 + \xi u_2 + t u_3)^2 - \nu' (t u_3^2 - 4 u_1 u_2) = 0 .$$

Al limite, sempre per $t \to 0$, si hanno i seguenti tipi:

I. $\xi \to 0$ (η e ν restano finiti e si possono supporre costanti) e quindi $\nu' \to 0$.

La conica luogo (3′) si spezza in due rette (arbitrarie) del fascio A_1 e, come inviluppo (6′), nel fascio doppio $u_1^2 = 0$ (di centro A_1).

II. $\eta \to 0$ (ξ e ν finiti), e ancora $\nu' \to 0$.

Si hanno due rette (arbitrarie) per A_2 e fascio doppio $u_2^2 = 0$ di centro A_2.

III. $\eta \to 0$, $\xi \to 0$, ma $\frac{\eta}{\xi}$ tende ad un limite finito e ν pure.

Scrivendo la (6′) nella forma:

$$\left(\frac{\eta}{\xi} u_1 + u_2 + \eta u_3\right)^2 - \frac{1}{4} \nu \frac{\eta}{\xi} (t u_3^2 - 4 u_1 u_2) = 0 ,$$

si riconosce che l'inviluppo si spezza in due fasci coi centri arbitrari sulla retta $x_3 = 0$, e la conica luogo (3') nella retta doppia $x_3^2 = 0$.

IV. Si sviluppi la (3') scrivendola:

$$\xi^2 x_1^2 + \eta^2 x_2^2 + 2\,\eta\,\xi\, x_1 x_2 - 4\,\xi\, x_1 x_3 - 4\,\eta\, x_2 x_3 +$$
$$+ (\nu + 4)\, x_3^2 - \nu\, t\, x_1 x_2 = 0\,,$$

indi si ponga: $\xi = \omega\,\xi_1$, $\eta = \omega\,\eta_1$, e quindi: $t = \omega^2\,\xi_1\,\eta_1$.

Sostituendo:

$$\omega\,\xi_1^2 x_1^2 + \omega\,\eta_1^2 x_2^2 + 2\,\omega\,\xi_1\,\eta_1\, x_1 x_2 - 4\,\xi_1\, x_1 x_3 - 4\,\eta_1\, x_2 x_3 +$$
$$+ \frac{\nu + 4}{\omega} x_3^2 - \nu\,\omega\,\xi_1\,\eta_1\, x_1 x_2 = 0\,.$$

Si tengano ora ξ_1, η_1 fissi, e si faccia tendere a zero ω.

Allora anche $t \to 0$, e si faccia $\nu \to -4$ in modo che $\lim \frac{\nu + 4}{\omega} = k$.

Si otterrà al limite la conica:

$$k\, x_3^2 - 4\,\xi_1\, x_1 x_3 - 4\,\eta_1\, x_2 x_3 = 0\,,$$

spezzata nella retta q ($x_3 = 0$), ed in una retta arbitraria r del piano. Evidentemente l'imviluppo tende al fascio doppio col centro nel punto $(r\,q)$, come conferma la (6') che, tenendo conto delle posizioni si riduce al limite alla:

$$(\eta_1\, u_1 - \xi_1\, u_2)^2 = 0\,.$$

Il calcolo effettuato ha messo in evidenza che al limite, quando $P \to Q$, il cono immagine di β viene, come luogo, a contenere i punti di due piani passanti ciascuno per una conica di G e i punti di un piano tangente a G, che dovrà essere contato due volte, essendo il cono del quarto ordine.

Dal punto di vista delle coniche complete il cono, al limite, contiene anche *le* ∞^2 *coniche complete di seconda specie* immagini degli iperpiani tangenti ad E in un punto di G, e poichè il cono, per l'autodualità della condizione, è di quarta classe, questo insieme andrà contato quattro volte.

Indichiamo ora con ζ la condizione perchè una conica si spezzi in due rette per un punto, e con ζ_1 la duale; con σ la condizione perchè una conica si spezzi in due rette di cui una fissa e σ_1 la duale.

Le conclusioni precedenti si esprimono allora evidentemente nella formula:

$$\beta = 2\zeta + 2\sigma + 4\zeta_1 . \tag{9}$$

7. - Tenendo ancora presente l'autodualità di β si ha subito:

$$2\zeta + 2\sigma + 4\zeta_1 = 2\zeta_1 + 2\sigma_1 + 4\zeta ,$$

ossia:

$$\sigma + \zeta_1 = \sigma_1 + \zeta . \tag{10}$$

D'altra parte si ha evidentemente nella $M_5 - H'$:

$$\beta \cdot \delta\mu = 0 , \quad \sigma_1 \cdot \delta\mu = 0 , \quad \zeta_1 \cdot \delta\mu = 0 , \tag{11}$$

e quindi, per la (9):

$$\delta\mu \cdot \zeta = 0 ,$$

nonchè, per la (10), $\delta\mu \cdot \sigma = 0$.

Segue di qui con qualche altro calcolo immediato, che il discriminante simultaneo della base considerata al n. 3, è dato dal determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

che non corrisponde al valore minimo. Pertanto le corrispondenti caratteristiche sono certo indipendenti, ma la loro base non è minima.

8. - La base minima si trova invece in corrispondenza ai simboli di chiaro significato:

$$V_2' \, (\mu^3, \xi, \widehat{\mu\nu}\,\nu, \zeta, \zeta_1)$$

$$V_3' \, (\mu^2, \widehat{\mu\nu}, \nu^2, \delta\mu, \eta\nu) .$$

Un calcolo immediato pei risultati precedenti, fornisce per questa:

$$\Delta = 1 ,$$

il che conferma trattarsi di una base minima.

9. - Vale infine la pena di esaurire definitivamente la condizione d'iperosculazione (9) esprimendola in funzione delle condizioni base, e generalizzandola ad una *curva algebrica d'ordine* n, *classe* m *e genere* p.

Diciamo ancòra β la condizione. Calcoliamo intanto il valore dei simboli: $\beta\mu^2, \beta\widehat{\mu\nu}, \beta\nu^2, \beta\delta\mu, \beta\eta\nu$.

Il primo è dato dal numero dei gruppi di una g_{2n}^3 aventi un punto triplo, ed è:

$$\beta\mu^2 = 4 \, (2n + 3p - 3) = 6m - 4n .$$

Il secondo differisce dal primo per le coniche di terza specie che passano per il punto e sono tangenti alla C^n, e quindi:

$$\beta\widehat{\mu\nu} = \beta\mu^2 - m = 5m - 4n .$$

Per l'autodualità: $\beta\nu^2 = \beta\mu^2$.

Infine: $\beta\delta\mu = \beta\eta\nu = 0$.

Se allora:

$$\beta = a\mu^3 + b\xi + c\widehat{\mu\nu}\,\nu + d\zeta + e\zeta_1 ,$$

si trova calcolando a, b, c, d, e:

$$\beta = 7(t - m)\mu^3 + 9(m - t)\xi + 3(t - m)\widehat{\mu\nu}\,\nu + (4m - 3t)\zeta + (6t - 5m)\zeta_1 , \tag{14}$$

in cui si è posto:

$$t = 6m - 4n . \tag{15}$$

Se, d'altra parte, ci si calcola direttamente σ tenendo presente la (13) si trova:

$$\sigma = 7\,\mu^3 - 9\,\xi + 3\,\widehat{\mu\nu}\,\nu - 3\,\zeta + 5\,\zeta_1 . \tag{16}$$

Pertanto la (14) può scriversi:

$$\beta = (5\,m - 4\,n)\,\sigma + m\,\zeta + (6\,m - 4\,n)\,\zeta_1 , \tag{17}$$

che fornisce una interessante generalizzazione della (9), sopratutto quando, ed in modo suggestivo, si ravvisi nella composizione di β il tipo di degenerazione al limite.