Rendiconti *del* Seminario Matematico *della* Università di Padova

Fabio Conforto

Sulla nozione di corpi equivalenti e di corpi coincidenti nella teoria delle funzioni quasi abeliane

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 292-310

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__292_0>

SULLA NOZIONE DI CORPI EQUIVALENTI E DI CORPI COINCIDENTI NELLA TEORIA DELLE FUNZIONI QUASI ABELIANE

Nota (*) *di* FABIO CONFORTO (*a Roma*).

1. - Introduzione. - Nella presente Nota definisco come *equivalenti* due corpi K e K' di funzioni abeliane o quasi abeliane di π (≥ 1) variabili quando K' si ottenga da K eseguendo sulle variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ di questo una sostituzione lineare e non degenere di variabili, cioè una sostituzione del tipo:

$$u' = \Lambda u + \lambda \tag{1.1}$$

dove u, u', λ sono rispettivamente tre matrici a π righe e ad una colonna, che hanno come elementi le $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ (variabili indipendenti di K), le $u'_1, u'_2, \ldots, u'_\pi$ (variabili indipendenti di K') e le costanti complesse $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\pi$, mentre la Λ è una matrice (ad elementi complessi) d'ordine π e con determinante non nullo.

Se ω è una matrice di periodi primitivi per K, è ben noto che tutte e sole le matrici di periodi primitivi connesse a K si ottengono dalla ω moltiplicandola (a destra) per una qualunque matrice *unimodulare* A (cioè per una matrice ad elementi interi e con determinante uguale a ± 1). È ora ovvio che, nell'eseguire la 1.1, si passa dal corpo K con la matrice di periodi primitivi

(*) Pervenuta in Redazione il 23 Aprile 1949.

$\bar{\omega} = \omega A$ al corpo K' con la matrice di periodi $\Lambda \bar{\omega}$, onde tutte le matrici del tipo:

$$\omega' = \Lambda \omega A \tag{1.2}$$

sono matrici di periodi primitivi per K'. Le matrici del tipo 1.2 sono anzi, al variare della A tra tutte le matrici unimodulari, tutte e sole le matrici di periodi primitivi relative a K', perchè, scegliendo per K', anzichè la matrice ω', la matrice $\bar{\omega}' = \omega' B$ (con la B arbitraria matrice unimodulare) si ha:

$$\bar{\omega}' = \omega' B = \Lambda \omega A B = \Lambda \omega \cdot (AB),$$

sicchè anche la $\bar{\omega}'$ è del tipo 1.2 (per essere la AB unimodulare come prodotto di due matrici unimodulari).

In conclusione, *se K e K' sono due corpi di funzioni abeliane o quasi abeliane, che siano tra loro equivalenti mercè la* 1.1, *ed ω ed ω' sono due matrici di periodi primitivi rispettivamente per K e K', tra le matrici ω ed ω' intercorre una relazione del tipo* 1.2 *con la A matrice unimodulare.*

Giova anche osservare che tutti e soli i corpi equivalenti ad un prefissato corpo K si ottengono lasciando liberamente variare nella 1.1 le matrici Λ e λ, con la sola condizione che il determinante della Λ si mantenga non nullo.

Si osservi inoltre che, nella teoria delle funzioni abeliane, due matrici di Riemann ω ed ω', legate tra loro da una relazione del tipo 1.2 (con la Λ a determinante non nullo e la A unimodulare) si chiamano (con Scorza) esse stesse *equivalenti* ([1], cap. I, n. 11; [5], p. I, n. 2) (1), onde *due corpi di funzioni abeliane, che siano equivalenti nel senso dell'attuale definizione, hanno matrici di Riemann equivalenti nel senso di Scorza.*

Tutto ciò premesso, giova ricordare che nella teoria delle funzioni abeliane o quasi abeliane, quale è stata recentemente costruita da Severi nella sua fondamentale memoria [6], due

(1) I numeri tra parentesi quadre rimandano ad opere o a memorie indicate nella bibliografia in fondo alla Nota.

corpi equivalenti nel senso dell'attuale definizione si considerano spesso come lo *stesso* corpo.

In altre parole, corpi *equivalenti* si considerano praticamente come corpi *coincidenti.* Ciò è ampiamente giustificato dal fatto che corpi equivalenti hanno effettivamente numerose proprietà comuni.

Tuttavia, come si vedrà nel corso di questa Nota, si presenta anche nella teoria delle funzioni quasi abeliane una questione, che si risolve subito nel caso abeliano e che consiglia invece, nel caso quasi abeliano, di tener bene distinti i due concetti di *equivalenza* e di *coincidenza.*

Di conseguenza, la *coincidenza* sarà nella presente Nota esclusivamente considerata *in senso stretto*, due corpi di funzioni quasi abeliane dicendosi *coincidenti* quando essi siano effettivamente costituiti dalle *stesse* funzioni, *salvo tutto al più la denominazione delle variabili indipendenti.*

La questione ora accennata è la seguente. Siano K e K' due corpi *equivalenti* di funzioni quasi abeliane (o anche abeliane). Quali sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè essi coincidano (in senso stretto)? È ovvio che perchè K e K' coincidano essi *debbono* potersi riportare ad avere la medesima tabella di periodi primitivi. Senonchè, *mentre nel caso abeliano l'equivalenza e l'uguaglianza dei periodi è anche sufficiente ad assicurare la coincidenza dei due corpi, ciò non succede più nel caso quasi abeliano.* In altre parole, *vi possono essere corpi equivalenti di funzioni quasi abeliane con gli stessi periodi, che siano tra loro distinti,* cioè *non* costituiti dalle stesse funzioni.

È appunto scopo della presente Nota il far constatare tale circostanza, spiegandone l'origine ed assegnando le condizioni necessarie e sufficienti atte ad assicurare la coincidenza di due corpi equivalenti di funzioni quasi abeliane (n. 6). Come si vedrà, il fatto segnalato è essenzialmente collegato alla possibile esistenza, già da me segnalata nella memoria [2], di trasformazioni lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie sulla V_π quasi abeliana di Picard collegata ad un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili, le quali non sono più birazionali ma *tra-*

scendenti; e s' intreccia d' altra parte con la circostanza che il corpo di *tutte* le funzioni meromorfe con una data matrice quasi abeliana ([2]) di periodi può riuscire *più ampio* ([3]) di un corpo di funzioni quasi abeliane, che abbia tale matrice come matrice di periodi primitivi.

2. - Il caso abeliano. - Per procedere nel modo più chiaro, considero preliminarmente il caso abeliano; ed enuncio nella seguente forma (sostanzialmente nota) la condizione necessaria e sufficiente perchè due corpi equivalenti di funzioni abeliane siano coincidenti:

Se due corpi di funzioni abeliane sono equivalenti mercè la sostituzione lineare e non degenere di variabili:

$$u' = \Lambda u + \lambda,$$

la condizione necessaria e sufficiente perchè essi coincidano è che, *essendo* ω *una matrice abeliana connessa ad uno di tali corpi*, *esista una matrice unimodulare* I, *per cui valga una relazione del tipo*:

2.1 $$\omega I = \Lambda \omega. \text{ ([4])}$$

Poichè ciò ha importanza per il seguito, giova brevemente richiamare come si possa arrivare alla dimostrazione della necessità e della sufficienza della 2.1 ai fini della coincidenza dei due corpi.

([2]) Ho introdotto la denominazione sintetica di *matrice quasi abeliana* per ogni matrice a π righe ed a $\pi' < 2\pi$ colonne, la quale si possa assumere quale matrice dei periodi primitivi di un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili, nella mia nota [4]. In accordo con tale denominazione uso talvolta la locuzione di *matrice abeliana* al posto di matrice di Riemann.

([3]) I primi esempî del fatto che il corpo di tutte le funzioni meromorfe con dati periodi può essere più ampio di un corpo di funzioni quasi abeliane con gli stessi periodi, sono stati segnalati da Severi (cfr. [6], n. 59).

([4]) Nella Memoria [6] di Severi questa relazione è in qualche passo implicitamente presupposta nell' uso del concetto di corpi equivalenti.

La 2.1 è certo *necessaria*. Se infatti K e K' sono due corpi equivalenti mercè la 1.1 ed ω ed ω' sono due matrici abeliane connesse rispettivamente a K ed a K', vale certamente (n. 1) la 1.2 con la A unimodulare. Se poi i due corpi *coincidono*, la ω' deve dar luogo ad un sistema di 2π periodi primitivi deducibile dal sistema di periodi (primitivi) rispondenti alla ω, e viceversa; onde deve esistere una matrice unimodulare B, per cui:

$$\omega' = \omega B.$$

Ma allora, per la 1.2, è:

$$\omega B = \Lambda \omega A$$

ossia:

$$\omega B A^{-1} = \Lambda \omega,$$

d' onde segue la 2.1 ponendo: $BA^{-1} = I$ (e si osservi cha la I è ben una matrice unimodulare, in quanto l' inversa A^{-1} di una matrice unimodulare A è ancora tale ed il prodotto di due matrici unimodulari, come B ed A^{-1}, è pure unimodulare).

Per dimostrare la *sufficienza* della 2.1, si osservi che, tenuto conto della 2.1, la 1.2 si scrive:

$$\omega' = \omega I A = \omega B$$

con la B unimodulare. Da qui segue subito che il reticolo dei periodi costituito dalle combinazioni lineari a coefficienti interi delle colonne della ω, coincide con l' analogo reticolo costruito a partire dalla matrice ω'. Ogni funzione meromorfa di π variabili con la tabella di periodi ω è perciò anche una funzione meromorfa di π variabili con la tabella di periodi ω'; e viceversa.

Se ne conclude immediatamente che *i corpi K e K', essendo costituiti da tutte le funzioni meromorfe di π variabili con le rispettive tabelle di periodi ω ed ω', debbono essere coincidenti.*

3. - Il caso quasi abeliano. - Nel caso quasi abeliano, lo stesso ragionamento nel n. 2 vale a dimostrare che una relazione del tipo 2.1 è ancora *necessaria* perchè coincidano due corpi equivalenti mercè la 1.1. Si può quindi senz' altro enunciare:

Se due corpi di funzioni quasi abeliane sono equivalenti mercè la sostituzione lineare non degenere di variabili:

$$u' = \Lambda u + \lambda,$$

affinchè essi coincidano è necessario che, essendo ω *una matrice quasi abeliana connessa ad uno dei corpi, esista una matrice unimodulare* I*, per cui valga una relazione del tipo:*

$$\omega I = \Lambda \omega.$$

Il ragionamento tendente a dimostrare la sufficienza della 2.1 viene invece a cadere nel caso quasi abeliano perchè, mentre si può tuttora asserire che l' insieme dei periodi costituito da tutte le combinazioni lineari a coefficienti interi delle colonne di ω coincide con l' analogo insieme costruito a partire dalla ω', *non si puo più asserire che il corpo* K (*o* K') *sia costituito da tutte le funzioni meromorfe con la tabella* ω (*od* ω') *di periodi primitivi:* ed era precisamente il verificarsi di questa circostanza che permetteva nel caso abeliano del n. 2 di trarre la conseguenza $K \equiv K'$. Invero, mentre un corpo di funzioni abeliane di π variabili *nasce* (5) come insieme di *tutte* le funzioni meromorfe, che ammettono una tabella a π righe ed a 2π colonne come tabella di periodi primitivi, un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili è invece un corpo costituito da funzioni meromorfe di π variabili dotate di un sistema di $\pi' < 2\pi$ periodi primitivi, per il quale vale un teorema (algebrico) di addizione nel senso di WEIERSTRASS (6): ed, in base a quest' ultima definizione, non si è affatto autorizzati a ritenere

(5) Cfr. [1], cap. I, n. 51.
(6) Cfr. [6], Introduzione.

che, essendo K un corpo di funzioni quasi abeliane rispondente ad una matrice quasi abeliana ω, il corpo K^* di *tutte* le funzioni meromorfe con la tabella di periodi ω coincida con il corpo K. Ciò che si può in ogni caso dire è soltanto che il corpo K e sempre un *sottocorpo* del corpo K^*.

Tuttavia, l' osservazione che precede non dimostra a stretto rigore che la 2.1 non sia sufficiente anche nel caso quasi abeliano ad assicurare la coincidenza dei due corpi, ma soltanto che per dimostrare tale sufficienza non ci si può servire della stessa argomentazione usata al n. 2 per il caso abeliano. Si vedrà però al successivo n. 6 che la sufficienza di cui trattasi effettivamente *non* sussiste.

Prima di arrivare a ciò, è tuttavia opportuno premettere una digressione, nella quale si dimostra come il corpo K^* sia di fatto in molti casi più ampio del corpo K: ciò che mette in evidenza come la difficoltà incontrata nel cercare di dimostrare la sufficienza della 2.1 per la stessa via tenuta nel caso abeliano sia comunque di natura intrinseca e non eliminabile.

4. - **Un' osservazione preliminare.** - Per realizzare il programma indicato nelle ultime righe del n. 3, si rammenti anzitutto che quando K e K' sono due corpi equivalenti di funzioni quasi abeliane (o anche abeliane) di π variabili, con le rispettive matrici di periodi primitivi ω ed ω', si può sempre passare dalle funzioni di K a quelle di K' eseguendo una sostituzione di variabili lineare e non degenere del tipo:

$$u' = \Lambda u + \lambda. \tag{4.1}$$

Più in generale se la 4.1 si applica a tutte le funzioni del corpo K^*, a priori più ampio di K, costituito da tutte le funzioni meromorfe con la tabella di periodi ω, si ottiene il corpo K'^* di tutte le funzioni meromorfe con la tabella di periodi ω', a priori più ampio di K'. È anzi facile vedere che la 4.1 pone tra la totalità delle funzioni di K (o di K^*) e la totalità delle funzioni di K' (o di K'^*) una corrispondenza biunivoca che, trasformando ovviamente la somma ed il prodotto di due funzioni di K o di K^* nella somma e nel prodotto delle trasformate in K' (o in K'^*), risulta un *isomorfismo* tra i corpi K e K' ed i corpi K^* e K'^*.

Inversamente, è ovvio che, trasformando le funzioni quasi abeliane (o anche abeliane) di un corpo K mediante un'arbitraria sostituzione lineare non degenere sulle variabili del tipo 4.1 si ottiene un secondo corpo K', equivalente ed isomorfo a K.

Da tutto ciò, si può ricavare l'enunciato seguente:

La sostituzione lineare non degenere di variabili, che muta l'uno nell'altro due corpi equivalenti K e K' di funzioni quasi abeliane, trasforma anche l'uno nell'altro, inducendo tra essi un isomorfismo, i corpi K^* e K'^*, a priori più ampî di K e di K', costituiti da tutte le funzioni meromorfe che hanno gli stessi periodi delle funzioni di K e di K'. L'isomorfismo tra K^* e K'^* subordina tra K e K' l'isomorfismo prodotto dalla considerata sostituzione lineare non degenere delle variabili.

5. - Digressione. - Sia ora K un corpo di funzioni quasi abeliane con una matrice quasi abeliana di periodi primitivi ω; e K^* il corpo di tutte le funzioni meromorfe con i periodi dati dalla matrice ω. In base all'ultimo enunciato del n. 4, è senz'altro chiaro che l'indagine se il corpo K^* sia più ampio o coincidente con K si può condurre, senza venir meno alla generalità, anzichè su K su qualunque corpo equivalente a K.

Si potrà perciò tener conto che ogni corpo K di funzioni quasi abeliane è equivalente (7) ad un corpo con la matrice di periodi nella *forma normale di Severi* del tipo:

5.1 $$\omega = \begin{Vmatrix} A & \Omega & 0 \\ 0 & \Omega_1 & B \\ 0 & \Omega_2 & 0 \end{Vmatrix};$$

e riferirsi soltanto ai corpi K, per i quali la matrice dei periodi ha la forma 5.1.

(7) Salvo nel caso che non si verifichi una certa ipotesi a priori limitativa indicata da Severi come «ipotesi L» (cfr. [6]. nn. 45 e 47), sulla quale non è qui il caso di trattenersi.

Per quanto riguarda il significato dei simboli nella 5.1, basterà qui dire che la A e la Ω sono matrici d'ordine p, tali che la matrice:

$$\| A \ \Omega \|$$

costituisca una matrice abeliana normale; la B è una matrice d'ordine δ_1 (≥ 0) con gli elementi tutti nulli, tranne quelli sulla diagonale principale, che valgono $2\pi i$; le Ω_1 ed Ω_2 sono due matrici *qualsiasi* a p colonne e rispettivamente a δ_1 ed a δ_2 (≥ 0) righe.

Un corpo K di funzioni quasi abeliane con la matrice di periodi 5.1 è costituito da funzioni di $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ variabili.

Gli interi p, δ_1, δ_2 possono essere interi positivi o nulli (purchè non tutti e tre nulli) qualsiasi.

Accanto ai tre *caratteri interi* p, δ_1, δ_2, SEVERI ha anche introdotto (8) un quarto carattere intero ρ (≥ 0) che rappresenta la caratteristica della matrice Ω_2, onde sarà sempre:

$$\rho \leq p, \quad \rho \leq \delta_2.$$

Introdotto il carattere ρ, si può subito costruire una matrice equivalente alla 5.1, che ha la stessa forma della 5.1, ma per la quale la Ω_2 ha l'aspetto:

5.2 $$\Omega_2 = \begin{Vmatrix} C & \Omega'_2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

dove C è la matrice diagonale d'ordine ρ, i cui termini sulla diagonale principale valgono tutti $2\pi i$, ed Ω'_2 è una matrice qualunque a ρ righe ed a $p - \rho$ colonne.

Tutto ciò premesso, ecco come si può subito costruire una categoria abbastanza vasta di corpi K di funzioni quasi abeliane, per i quali il corpo K^* è di fatto più ampio di K.

(8) Cfr. [6], n. 55.

Si consideri anzitutto un qualsiasi corpo $\overline{K}$, per il quale sia $\rho = \delta_2$, sicchè, tenuto conto delle 5.1 e 5.2, la sua matrice dei periodi sia del tipo 5.1 con la Ω_2 della forma:

$$\Omega_2 = \| \; C \; \Omega_2' \; \| \; .$$

Il corpo $\overline{K}$ sarà costituito da funzioni meromorfe delle $\pi = p + \delta_1 + \rho$ variabili $u_1, u_2, \ldots, u_{p+\delta_1+\rho}$. Facendo tutte le possibili combinazioni razionali delle funzioni di $\overline{K}$ con $\delta_2 - \rho$ nuove variabili $u_{p+\delta_1+\rho+1}, u_{p+\delta_1+\rho+2}, \ldots, u_{p+\delta_1+\delta_2}$, dove ora δ_2 è un intero qualunque maggiore di ρ, si otterrà un corpo K di funzioni quasi abeliane di $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ variabili, per il quale la matrice dei periodi ha l'aspetto 5.1 con la Ω_2 della forma più generale 5.2.

Per tale corpo, il corpo K^* è certo più ampio del corpo K stesso, perchè il corpo K^* contiene ovviamente il corpo costituito da tutte le funzioni meromorfe delle sole variabili $u_{p+\delta_1+\rho+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \delta_2 - \rho)$, mentre una funzione meromorfa e *non razionale* di queste variabili non può certo appartenere a K, perchè nelle funzioni di K tali variabili intervengono solo in forma razionale.

Si ha dunque l'esempio di un corpo K, che è effettivamente un sottocorpo di K^* e per il quale p, δ_1, δ_2, ρ sono qualsiasi con la sola condizione $\rho < \delta_2$.

Un altro facile esempio si ha per certi corpi per i quali $\rho = \delta_2 = 0$, p e δ_1 sono qualsiasi e la matrice Ω_1 è identicamente nulla. In base alla 5.1, la matrice dei periodi ha l'aspetto:

5.3 $$\omega = \left\| \begin{matrix} A & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & B \end{matrix} \right\| .$$

Si consideri precisamente il corpo K, che si ottiene facendo tutte le possibili combinazioni razionali delle funzioni abeliane delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_p$ con la matrice di periodi

$\| A \ \Omega \|$ e degli esponenziali e^{u_k} $(k = p + 1,\ p + 2, \ldots$ $\ldots, p + \delta_1)$.

Tale corpo ha evidentemente la tabella di periodi 5.3. Ma il corpo K^* di tutte le funzioni meromorfe con tale tabella di periodi è certo più ampio di K, perchè ad esso non appartiene in modo ovvio la funzione, che è addirittura una trascendente intera:

$$e^{\left(e^{u_{p+1}+u_{p+2}+\ldots+u_{p+\delta_1}}\right)}$$

la quale ha pure i periodi corrispondenti alla tabella 5.3.

Agli esempî sopra riportati si può aggiungere qualche considerazione generale, che vale ad illuminare la possibilità che il corpo K^* di *tutte* le funzioni meromorfe con una data matrice quasi abeliana di periodi risulti più ampio di un corpo di funzioni quasi abeliane con questa stessa matrice di periodi.

All'uopo, essendo K un corpo di funzioni quasi abeliane delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ con una matrice di periodi ω, si consideri la varietà quasi abeliana di Picard associata a K. Si tratta di una V_π algebrica, definita a meno di trasformazioni birazionali, i cui punti sono in corrispondenza (generalmente) biunivoca con i gruppi di valori (finiti) delle variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ presi *modulo* ω, per guisa che a due gruppi di tali valori, che differiscano tra loro per una combinazione lineare a coefficienti interi delle colonne di ω, corrisponda uno stesso punto della V_π. Come conseguenza di ciò, una funzione uniforme delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ con la tabella di periodi ω diviene una funzione *uniforme* sulla V_π quando si concepisca come una funzione del punto mobile della V_π mercè la corrispondenza esistente tra i punti della V_π ed i gruppi $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ presi modulo ω; mentre una funzione uniforme del punto della V_π diviene una funzione uniforme, con la matrice di periodi ω, quando si concepisca come funzione delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$.

In particolare le funzioni (meromorfe) del corpo K si rispecchiano in tal modo in tutte e sole le funzioni *razionali* sulla V_π.

Si rammenti ora che le $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ considerate come funzioni del punto mobile sulla V_π si trasformano sulla V_π in π integrali semplici di differenziale totale linearmente indipendenti, che son da considerare come *virtualmente di prima specie*, ma che nel fatto individuano complessivamente sulla V_π una varietà W luogo dei loro punti singolari e d'indeterminazione. I gruppi di valori *finiti* delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sono rappresentati dai punti della V_π che stanno *fuori* della varietà W.

Ciò posto, si immagini che sulla V_π esista una funzione uniforme, la quale presenti *singolarità essenziali* sulla varietà W, riuscendo però *meromorfa* sul resto della V_π. Tale funzione, concepita come funzione delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, non può certo essere una funzione di K, perchè le funzioni di K divengono le funzioni razionali sulla V_π e le funzioni razionali sopra un ente algebrico sono caratterizzate dall'essere uniformi e dotate di sole singolarità polari. Tuttavia, per essere la nominata funzione soltanto meromorfa fuori di W, essa diviene, considerata come funzione delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, una funzione meromorfa (al finito) con la matrice di periodi ω. Ne segue che essa, non potendo appartenere a K, deve appartenere al corpo K^*, *più ampio di* K, di *tutte* le funzioni meromorfe con la tabella di periodi ω.

Se dunque sulla V_π esiste una funzione uniforme con singolarità essenziali sulla W e meromorfa fuori di W, il corpo K^* è più ampio del corpo K. Inversamente, se K^* è più ampio di K, una funzione di K^* che non appartenga a K deve mutarsi sulla V_π in una funzione meromorfa su tutta la V_π dalla quale si escluda la W, mentre sulla W *debbono* presentarsi singolarità essenziali (chè altrimenti sulla V_π si avrebbe una funzione ovunque meromorfa, e quindi razionale, che proverrebbe da una funzione di K).

Si può dunque concludere:

Dato un corpo K di funzioni quasi abeliane delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ con la tabella di periodi ω, detta V_π la varietà di P i c a r d *associata a K e W la varietà della V_π che* *è il luogo dei punti singolari degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ da considerarsi come virtualmente di prima specie, la condizione necessaria e sufficiente perchè il corpo K^* di tutte le funzioni meromorfe delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ con la tabella di periodi ω sia più ampio del corpo K è che esistano sulla V_π funzioni uniformi con singolarità essenziali sulla W ed ovunque meromorfe sul resto della V_π.*

Val la pena di rilevare che se K è in particolare un corpo di funzioni *abeliane,* gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sono *effettivamente* di prima specie sulla V_π, onde la varietà W viene a mancare ed il corpo K^* deve perciò sempre coincidere col corpo K, come è ben noto.

Merita anche osservare la seguente condizione *sufficiente* perchè K^* sia più ampio di K:

Il corpo K^* è certo più ampio del corpo K se esiste sulla V_π qualche funzione razionale, la cui varietà dei poli sia totalmente contenuta nella W.

Se invero $\varphi(P)$ è una tal funzione razionale, la funzione $e^{\varphi(P)}$ è sulla V_π uniforme ed ovunque olomorfa, tranne che nella varietà dei poli della $\varphi(P)$, che giace però sulla W, dove si presentano singolarità essenziali.

In base a tutto quanto si è esposto in questo n., non sembra forse azzardato prevedere che il corpo K^* costituito da *tutte* le funzioni meromorfe con una tabella di periodi quasi abeliana ω sia *sempre* più ampio di un corpo K di funzioni quasi abeliane con la stessa tabella di periodi ω. Ma la validità o meno di questo teorema potrà essere considerata altrove. Basta qui aver fatto vedere la natura e l' interesse del problema.

6. – Il teorema conclusivo. – È ormai tempo di ritornare alla questione lasciata in sospeso alla fine del n. 3.

Siano ancora K e K' due corpi di funzioni quasi abeliane che risultino equivalenti mercè la 1.1; abbiano inoltre K e K' le rispettive matrici di periodi ω ed ω' che saranno legate tra loro dalla **1.2.** Si è già osservato al n. 3 che perchè K coincida con K' è *necessario* che sia soddisfatta la relazione:

$$6.1 \qquad \omega I = \Lambda \omega$$

con la I matrice unimodulare.

Il nuovo elemento, che conviene ora introdurre per trovare le condizioni *necessarie* e *sufficienti* per la coincidenza dei due corpi K e K', è la sostituzione lineare e non degenere di variabili:

$$6.2 \qquad u' = \Lambda u + \lambda,$$

che muta le funzioni del corpo K in quelle del corpo K' ed induce (n. 4) tra i due corpi un *isomorfismo.*

Essendo soddisfatta la 6.1, con la *I unimodulare* e la Λ a determinante *non nullo*, è noto (9) che la 6.2 si può interpretare come una trasformazione (analitica e generalmente) biunivoca sulla varietà di PICARD V_π (n. 5), associata al corpo K, nella quale il punto della V_π, in cui gli integrali virtualmente di prima specie assumono i valori $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, si muta nel punto, in cui detti integrali assumono i valori $u'_1, u'_2, \ldots, u'_\pi$ legati ai valori $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ dalla 6.2.

Suppongasi ora che i due corpi K e K' *coincidano.* L'isomorfismo indotto dalla 6.2 tra K e K' riducesi allora ad un *automorfismo* entro al corpo K. Ma (10) ogni automorfismo di K nasce da una trasformazione *birazionale* della V_π in sè. Di conseguenza, la trasformazione della V_π in sè, rappresentata dalla 6.2, deve essere una trasformazione *birazionale, se K coincide con K'.*

Inversamente, suppongasi che la 6.2 rappresenti una trasformazione *birazionale* della V_π in sè. La trasformazione 6.2 muta allora in sè il corpo delle funzioni razionali della V_π, inducendo un automorfismo in tale corpo. Ma, il corpo delle funzioni razionali della V_π non è altro (n. 5) che il corpo K, sicchè la

(9) Cfr. [4], n. 7.
(10) Cfr. [3], n. 4.

6.2 muta il corpo K in sè. Siccome poi la 6.2 muta il corpo K nel corpo K', ne scende che il corpo K coincide col corpo K'.

Riassumendo si può dunque enunciare:

Se due corpi di funzioni quasi abeliane sono equivalenti mercè la sostituzione lineare e non degenere di variabili:

$$u' = \Lambda u + \lambda ,$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè essi coincidano sono le seguenti:

a) *deve esistere una matrice unimodulare I, per la quale valga la relazione*:

$$\omega I = \Lambda \omega$$

essendo ω una matrice quasi abeliana connessa ad uno dei corpi;

b) *la sostituzione lineare e non degenere di variabili soprascritta, che muta il primo nel secondo corpo, deve potersi interpretare come una trasformazione birazionale in sè della varietà di* P i c a r d *associata al primo corpo.*

Nel caso abeliano (n. 2) la condizione b) si è visto essere superflua. Nel caso quasi abeliano, la condizione b) è invece *essenziale*, perchè, come ho mostrato nella memoria [2], n. 7, può effettivamente darsi che la 6.2 rappresenti sulla varietà di Picard associata a K una trasformazione biunivoca non più birazionale ma *trascendente.*

Va tuttavia rilevato che, sia nel caso abeliano che in quello quasi abeliano, la condizione a) è automaticamente soddisfatta quando lo sia la condizione b). Nella nota [4], n. 7, ho infatti osservato che il sussistere di una relazione del tipo della 6.1 (con la I unimodulare e la Λ a determinante non nullo) è anche condizione necessaria (oltre che sufficiente) perchè la 6.2 rappresenti una trasformazione biunivoca della V_π di Picard associata a K: la dimostrazione al posto citato si riferisce al caso quasi abeliano, ma nel caso abeliano si tratta di un fatto ben noto. Occorre soltanto aggiungere che nel caso abeliano è *superfluo* esigere esplicitamente che la 6.2 sia una trasformazione *birazionale*, perchè sopra la varietà di PICARD relativa ad un corpo di funzioni abeliane ogni trasformazione del tipo 6.2, che sia biunivoca, è necessariamente birazionale. Nel caso quasi abeliano è invece *essenziale* imporre che la 6.2 sia una trasformazione birazionale, perchè sopra la varietà di PICARD relativa ad un corpo di funzioni quasi abeliane una trasformazione del tipo 6.2, anche se biunivoca, può risultare *trascendente.*

Dopo tali osservazioni, il risultato ottenuto si può esprimere nella seguente forma conclusiva:

Se K e K' sono due corpi equivalenti di funzioni quasi abeliane (o anche abeliane) di π variabili, di guisa che si possa ottenere K' da K trasformando le funzioni di K mediante una sostituzione lineare e non degenere di variabili del tipo:

$$u' = \Lambda u + \lambda$$

(dove u, u', λ sono tre matrici a π righe e ad una colonna, che hanno rispettivamente come elementi le variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ di K, le variabili indipendenti $u'_1, u'_2, \ldots, u'_\pi$ di K' e le costanti qualsiasi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\pi$, mentre Λ è una matrice a determinante non nullo d'ordine π), *la condizione necessaria e sufficiente perchè i due corpi K e K' coincidano è che la anzidetta sostituzione di variabili si possa interpretare come una trasformazione biunivoca e birazionale sopra la varietà di Picard relativa a K.*

Nel caso abeliano la birazionalità della trasformazione è conseguenza della biunivocità.

7. - Alcune osservazioni complementari. -- È chiaro che due corpi K e K' di funzioni quasi abeliane (o anche abeliane), con le rispettive matrici di periodi (primitivi) ω e ω' per i quali siano soddisfatte le 1.2 e 2.1, si possono riportare ad avere la *stessa* matrice di periodi.

Dalle:

7.1 $$\omega' = \Lambda \omega A \quad , \quad \omega I = \Lambda \omega$$

si deduce infatti:

$$\omega' = \omega \cdot (IA) \quad , \quad \omega = \omega' \cdot (IA)^{-1} ,$$

dove la IA (e quindi la $(IA)^{-1}$) è ancora unimodulare per essere tali le matrici I ed A. La ω si ottiene dunque dalla ω' moltiplicandola (a destra) per una matrice unimodulare, ciò che mostra che anche la ω, come la ω', può assumersi come una matrice di periodi primitivi per K'.

Ne segue: *due corpi K e K' di funzioni quasi abeliane (o anche abeliane), per i quali siano soddisfatte le* 7.1, *si possono ritenere come due corpi con la stessa matrice di periodi primitivi.*

Se ora K e K' sono due corpi di funzioni *abeliane*, le 7.1 sono sufficienti ad assicurare la coincidenza dei due corpi. Ciò che è ben naturale, avendo i due corpi la stessa matrice di periodi ed essendo un corpo di funzioni abeliane costituito da *tutte* le funzioni meromorfe con una data matrice abeliana di periodi primitivi: è, in altra forma, lo stesso ragionamento usato al n. 2 per dimostrare la sufficienza delle 7.1 ai fini della coincidenza.

Se però K e K' sono due corpi di funzioni *quasi abeliane*, che risultino equivalenti mercè la 1.1, le 7.1 non sono più sufficienti ad assicurare la coincidenza di K e K'; e dalla condizione b) del primo enunciato del n. 6 segue anzi che *quando la* 6.2 *rappresenti una trasformazione biunivoca trascendente sulla varietà di Picard relativa a K, i due corpi sono due corpi distinti (benchè equivalenti) con la stessa matrice di periodi.*

Si viene così a mettere in evidenza *una possibilità, che può presentarsi nella teoria delle funzioni quasi abeliane e che non ha riscontro nella teoria delle funzioni abeliane.* Se cioè K è un corpo di funzioni quasi abeliane con una matrice di periodi primitivi ω, non soltanto può darsi (n. 5) che il corpo di *tutte* le funzioni meromorfe con la matrice di ω sia più ampio del corpo K, ma *possono esistere corpi di funzioni quasi abeliane con la stessa matrice di periodi primitivi del corpo K i quali siano (bensì equivalenti a K, ma) costituiti da funzioni diverse da quelle che costituiscono K.*

In altre parole, mentre nel caso abeliano l'equivalenza e la coincidenza dei periodi di due corpi implicano la coincidenza dei due corpi, nel caso quasi abeliano due corpi equivalenti con gli stessi periodi possono essere anche *distinti.*

Anzi: *i corpi equivalenti a K, e con gli stessi periodi di K, i quali siano distinti da K, si ottengono tutti e soli da K eseguendo le sostituzioni di variabili del tipo* 6.2, *che sulla varietà di Picard associata a K rappresentino trasformazioni biunivoche trascendenti.*

Quest' ultimo enunciato mostra che, seppure si possa pensare che scarso sia l' interesse da attribuirsi alle trasformazioni biunivoche e trascendenti in sè della varietà quasi abeliana di Picard di un corpo di funzioni quasi abeliane dal punto di vista delle proprietà algebrico-geometriche del corpo stesso, lo studio ed in particolare la classificazione completa di dette trasformazioni si impone quando si voglia veramente pervenire alla classificazione completa di tutti i corpi di funzioni quasi abeliane.

Un' ultima osservazione. Due corpi distinti di funzioni quasi abeliane, che siano equivalenti e con gli stessi periodi, risultano pur sempre isomorfi a norma dell' ultimo enunciato del n. 4. La sostituzione di variabili, che porta il primo corpo nel secondo e mediante la quale si realizza tale isomorfismo, fa tuttavia uscire dal primo corpo, chè altrimenti i due corpi coinciderebbero. Ne segue che entrambi i due corpi debbono essere contenuti come *effettivi* sottocorpi nel corpo più ampio di tutte le funzioni meromorfe, che hanno gli stessi periodi dei due corpi considerati.

Si può pertanto enunciare:

Se un corpo K di funzioni quasi abeliane con la matrice di periodi ω gode della proprietà che sulla sua varietà di Picard esistano trasformazioni biunivoche e trascendenti, rappresentate da sostituzioni lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie, il corpo K^* di tutte le funzioni meromorfe con i periodi ω è certo più ampio del corpo K.

Tale enunciato non si può tuttavia invertire, perchè si può subito portare un esempio di un corpo K, per il quale il corpo K^* è più ampio di K mentre sulla sua varietà di Picard esistono soltanto trasformazioni *birazionali* in sè, rappresentate da sostituzioni lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie.

Si consideri infatti il corpo di funzioni quasi abeliane di

δ_1 (>0) variabili, generato da tutte le combinazioni razionali delle funzioni:

$$x_h = e^{u_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \delta_1).$$

Esso ha come matrice di periodi la matrice diagonale, i cui elementi sulla diagonale principale valgono tutti $2\pi i$; e la sua varietà di PICARD è uno S_{δ_1} lineare proiettivo. Tutte e sole le trasformazioni biunivoche in sè di tale S_{δ_1}, che siano rappresentate da sostituzioni lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie, sono qui le trasformazioni cremoniane, che al n. 7 della memoria [2] ho chiamato di tipo *monomiale*: e si tratta dunque soltanto di trasformazioni birazionali.

Ciò nonostante il corpo K^* è più ampio di K, perchè, mentre il corpo K è isomorfo al corpo di tutte le funzioni razionali delle variabili x_h $(h = 1, 2, \ldots, \delta_1)$, il corpo K^* è isomorfo al corpo di tutte le funzioni *meromorfe* di tali variabili.

BIBLIOGRAFIA

1. F. CONFORTO: *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*, p. I (Corsi dell' Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1942).
2. » » : *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in ispecie nel caso di genere effettivo nullo;* Annali di Matematica, t. 27, 1948.
3. « » : *Alcune osservazioni sulla teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane;* Boll. dell' U. M. I., s. 3, vol. 4, 1949.
4. » « : *Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie;* Rend. Acc. Lincei, s. 8, vol. 5_2, 1948.
5. G. SCORZA : *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni;* Rend. Palermo, t. 41, 1916.
6. F. SEVERI : *Funzioni quasi abeliane;* Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, n. 4, 1947.