

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO DOLCHER

Nozione generale di struttura per un insieme

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 18 (1949), p. 265-291

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__265_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

NOZIONE GENERALE DI STRUTTURA PER UN INSIEME

Memoria () di MARIO DOLCHER (a Trieste).*

1. - In questa Memoria (**) presento una nozione generale di *struttura* per un insieme, o, che è lo stesso, una nozione generale di *isomorfismo* fra insiemi, come possibile base per una teoria generale.

2. - In alcune trattazioni moderne (1) il concetto di *struttura*, inteso a soddisfare in primo luogo ad esigenze di carattere *metodologico*, rimane indefinito dal punto di vista *logico*, come appare dalla critica che espongo al § 2.

3. - Oltre che all'esigenza logica di principio, che rende necessaria una *definizione* quale che sia di « struttura », ritengo che la definizione che presento risponde alle esigenze applicative. Ed anche ritengo che - a parte naturalmente i termini nei quali essa possa darsi - essa sia la sola che vi risponda, solo che si

(*) Pervenuta in Redazione il 30 Aprile 1949.

(**) Il contenuto di questa Memoria è stato oggetto di una comunicazione al Seminario Matematico dell'Università di Padova nei giorni 28 e 29 Marzo 1949.

(1) Mi riferisco in particolare all'opera: N. BOURBAKI - *Éléments de Mathématique; les structures fondamentales de l'Analyse*, (livre I: *Théorie des ensembles*; livre II: *Algèbre*; livre III: *Topologie*). Ed. Hermann, Paris. - Del I libro è apparso sinora soltanto un fascicolo riassuntivo ed avente carattere provvisorio; per quanto riguarda il concetto di *struttura*, vedasi alle pagine 41-45 di tale fascicolo.

La parola « struttura » viene altrove usata con un significato del tutto diverso; vedasi la nota (2).

voglia ammettere che « due strutture vanno considerate coincidenti se e solo se i relativi insiemi vanno considerati isomorfi » e che « due insiemi vanno considerati isomorfi se e solo se i loro elementi possono biunivocamente riferirsi in modo tale che ogni affermazione vera per elementi dell'uno dei due insiemi possa — mediante eventuale modifica dei termini nei quali è espressa — tradursi in un'affermazione vera per gli elementi corrispondenti dell'altro insieme ».

4. — Una teoria generale basata su tale nozione potrebbe contribuire da una parte al coordinamento delle diverse teorie matematiche (opera già da tempo e variamente intrapresa), dall'altra all'approfondimento dei fondamenti delle teorie singole.

5. — Non mi consta che l'impostazione che presento sia già stata proposta; non per questo posso escludere che, delle svariatissime ricerche che in tali campi esistono, ve ne siano che abbiano qualche punto a comune con la mia. L'idea di vedere il tratto fondamentale di una Teoria nei gruppi di trasformazioni consentiti come automorfismi risale, com'è noto, a GALOIS, e ad essa è ispirato il « programma » di KLEIN. Le più note continuazioni in questo senso si hanno nel campo dell'Algebra.

6. — A scanso di facili equivoci, faccio rilevare che la presente ricerca si pone chiaramente al di fuori del campo della Filosofia Matematica. La critica al concetto di « specie » di una struttura (§ 2) e la discussione che introduce la nozione di struttura (§ 3, nn. 30-34) sono da riguardarsi sullo stesso piano di quelle che abitualmente si premettono a giustificare una definizione. Quanto si riferisce alla « questione della scelta » (§ 5) è soltanto una distinzione oggettiva che di per sè non è legata ad alcuna valutazione soggettiva in base alla quale una scelta debba considerarsi *lecita* o meno.

7. — **Sunto.** — Nel § 1 richiamo sommariamente, per comodità di esemplificazione e per non lasciar dubbi sul significato che dò a qualche termine, il concetto generico, impreciso, di

struttura attraverso alcuni fra i più significativi esempi. Nelle definizioni che dò mi scosto da qualche formulazione tradizionale; ciò non implica alcuna sostanziale diversità nel contenuto.

Nel § 2 sottopongo a critica la subordinazione del concetto di *struttura* ad una *specie*, (BOURBAKI, ved. nota (16)), mostrando che la *specie* non è elemento dell'assiomatica di una teoria.

Nel § 3 definisco la nozione generale di *struttura*.

Nel § 4 ne deduco, a titolo di applicazione, tutte le possibili strutture per gli insiemi di potenza 1, 2, 3, 4.

Nel § 5 indico alcuni dei problemi il cui studio appartiene alla teoria generale così impostata; in particolare noto una relazione fra la « questione della scelta » in un insieme e la « determinazione degli elementi dell'insieme per mezzo della struttura ».

8. - Notazioni. - Indico in generale con lettere minuscole a, b, \dots, x, y, \dots « elementi » astratti; con maiuscole $I, A, B, \dots X, Y, \dots$ insiemi di tali elementi (2), in particolare, con \emptyset l'insieme vuoto; con lettere gotiche maiuscole $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ insiemi (o « famiglie ») di insiemi, in particolare, detto I un insieme, $\mathfrak{p}(I)$ indica l'insieme dei sottoinsiemi (o « parti ») di I .

Con lettere greche minuscole $\alpha, \beta, \dots \varphi, \psi, \dots$ indico trasformazioni (con ϵ l'identità); con maiuscole Γ, Δ, \dots insiemi (in generale gruppi) di trasformazioni.

Indico con $A \cap B, A \cup B$ l'intersezione risp. la riunione di due insiemi; con $a \in A$ l'appartenenza di un elemento ad un insieme, con $A \subset B$ l'inclusione di A in B ($A \subset B$ equivale a $A \in \mathfrak{p}(B)$).

(2) Con ciò non si vuole peraltro istituire una distinzione assoluta fra elementi ed insiemi; non si escludono dalla considerazione insiemi come il seguente: I consta di due elementi, l'uno dei quali è a , l'altro è l'insieme dei tre elementi a, b, c .

§ 1. - Il concetto di struttura ; richiami.

9. - In senso generico s'intende per *struttura* per un insieme il complesso delle affermazioni ⁽³⁾ alle quali si dà un senso, in una certa teoria, per gli elementi dell'insieme. Tali affermazioni consisteranno praticamente nell'attribuire all'insieme una determinata *potenza*, nel pensare esistenti delle *relazioni* fra i suoi elementi (operazioni, ordine ecc.), nel supporre *determinati* (o *distinti*) entro l'insieme particolari elementi o sottoinsiemi ecc. Ogni particolare affermazione si potrà dire un *dato di struttura* per l'insieme. Spesso, com'è nell'uso, col simbolo I s'intenderà indicare, oltre che l'insieme, anche una struttura per l'insieme stesso, la quale si possa sottointendere.

Nelle considerazioni che su un insieme si fanno, nulla importerà della particolare natura degli elementi dell'insieme, salvo quanto possa essere implicito nei dati di struttura ; l'elemento caratteristico di una Teoria matematica è appunto la considerazione della *struttura* che è data sopra l'insieme, sicchè la stessa Teoria potrà valere per insiemi diversi, sotto opportune condizioni per le quali gli insiemi siano da dirsi *isomorfi*.

10. - Fra i diversi dati di struttura, s'intende assegnare alla *potenza* n ⁽⁴⁾ dell'insieme una posizione particolare, nel senso che essa si suppone in ogni caso fra i dati di struttura dell'insieme considerato ⁽⁵⁾.

Diamo qui di seguito alcuni esempi di « tipi » (o « specie ») di strutture (più propriamente, cfr. § 2, di modi seguiti più comunemente per definire strutture).

⁽³⁾ Dicendo « affermazione » intendo « proposizione supposta vera », sicchè dare tale complesso di affermazioni equivale ad assegnare il valore logico di ogni proposizione (di una determinata classe).

⁽⁴⁾ Qui e nel seguito ove non si dichiarino restrizioni n indica un numero cardinale (finito o no).

⁽⁵⁾ Questa subordinazione di ogni altro dato di struttura alla potenza s impone quando si voglia pervenire alla nozione di *isomorfismo* fra insiemi.

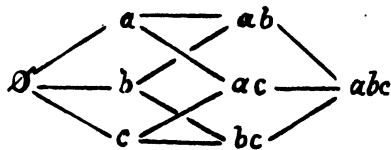
11. - Strutture d'ordine. - Un insieme I si dice dotato di *struttura d'ordine* se si suppone dato un criterio in base al quale per conveniente scelta di un paio ⁽⁶⁾ di elementi a, b di I , fra i due elementi ne viene distinto uno, da dirsi *primo* elemento (notazione: $a \rightarrow b$ se a è primo), sotto la condizione di transitività:

da « $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow c$ » segua « $a \rightarrow c$ ».

Converremo inoltre, poichè risulta comodo, di scrivere $a \rightarrow a$ per ogni $a \in I$.

Se il criterio risulta applicabile a tutte le paia di elementi di I , l'insieme si dice *totalmente ordinato*; nel caso generale esso si dice *parzialmente ordinato*. Dicendo « ordinato » sottintenderemo: parzialmente.

Un esempio notevole di insieme ordinato è quello dell'insieme $\mathfrak{p}(I)$ dei sottoinsiemi di I , ordinato in base al criterio: « $A \rightarrow B$ equivale ad $A \subset B$ ». Per esso adotteremo uno schema come qui a fianco (che si riferisce ad un insieme di tre elementi a, b, c).



12. - Graticci (« lattices »). - Una classe notevole fra gli insiemi ordinati è costituita da quelli per i quali il criterio d'ordine soddisfa alla seguente condizione:

« per ogni paio di elementi a, b dell'insieme esiste un elemento c' *massimo* fra tutti quelli che precedono sia a che b (cioè tale che sia $c' \rightarrow a$, $c' \rightarrow b$ e che da $x \rightarrow a$, $x \rightarrow b$ segua $x \rightarrow c'$); per ogni paio di elementi a, b dell'insieme esiste un elemento c'' *minimo* fra tutti quelli che precedono sia a che b (con analogo significato della frase) ».

⁽⁶⁾ Dicendo "paio" (di elementi di I) intendo: (sotto)insieme (di I) di potenza 2.

Un insieme dotato di una struttura d'ordine soddisfacente a tale condizione si dirà un *graticcio* (ingl. *lattice*).

L'insieme $\mathfrak{p}(I)$ dei sottoinsiemi di I , ordinato per inclusione (ved. n. 11) costituisce un graticcio. Un altro esempio verrà dato al n. 15.

13. - Strutture algebriche. - Un insieme I si dice dotato di *struttura algebrica* quando si suppongono date una o più leggi (7) per ciascuna delle quali ad ogni coppia (oppure: ad ogni coppia ordinata) di elementi a, b di I è *associato* un elemento. A seconda delle condizioni che s'impongono alle leggi di composizione, si denominerà diversamente la struttura; si dirà ad es. che l'insieme è dotato di struttura di monoide, di gruppo, di anello, di corpo ecc. Le strutture d'ordine possono riguardarsi come particolari strutture algebriche, in quanto alle coppie di elementi a, b e I può pensarsi *associato* per es. il « primo » elemento (ved. n. 11).

14. - In un graticcio (*lattice*), gli elementi c' e c'' di cui al n. 12 possono indicarsi con $a \wedge b$, risp. $a \vee b$; restano allora definite, in base alla struttura d'ordine del graticcio, due leggi di composizione interna (operazioni), soddisfacenti alle condizioni:

$$\begin{array}{ll} (1') a \wedge b = b \wedge a & (1'') a \vee b = b \vee a \\ (2') (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) & (2'') (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \\ (3') a \wedge (a \vee b) = a & (3'') a \vee (a \wedge b) = a. \end{array}$$

E viceversa, se in un insieme I sono definite due leggi di composizione interna soddisfacenti alle condizioni (1'), ... (3'') di sopra, è possibile definire, in base alle operazioni stesse, un *ordine* nell'insieme, ove si convenga di porre $a \rightarrow b$ se e solo se

(7) Per semplicità si accenna qui alle sole strutture algebriche definite mediante leggi di composizione *interne* (nelle quali cioè non intervenga nessun *campo di operatori* distinto da I) e *totali*, cioè definite per ogni coppia di elementi di I (cfr. BOURBAKI, op. cit., *Algèbre*, chap. I).

$a \wedge b = a$ il quale soddisfa alla condizione (n. 12) per la quale l'insieme può dirsi un *graticcio*. Per brevità si omette l'immediata verifica dell'asserita equivalenza (8).

15. - Sarà utile per il seguito ricordare ancora un esempio di *lattice*. Se, detto Γ un gruppo ed L l'insieme dei suoi sottogruppi Γ_i , conveniamo di porre $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_x$ se e solo se Γ_i è sottogruppo di Γ_x , l'insieme L viene dotato, com'è facile constatare, di una struttura di *graticcio*; per essa $\Gamma_i \wedge \Gamma_x$ rappresenta il sottogruppo intersezione, $\Gamma_i \vee \Gamma_x$ il sottogruppo minimo contenente Γ_i e Γ_x . Diremo che L è il *graticcio* associato al gruppo Γ .

16. - **Strutture di equivalenza.** - Se in un insieme I si suppone definita una relazione (che indicheremo col segno \sim) fra paia di elementi a, b soddisfacente alla condizione

$$\text{da } \langle a \sim b, a \sim c, b \not\sim c \rangle \text{ segue } \langle b \sim c \rangle,$$

l'insieme I si dice dotato di una *struttura di equivalenza*. Converremo inoltre di scrivere $a \sim a$, seguendo una consuetudine generale per quanto non necessaria.

Una tale struttura può introdursi in I per mezzo di una *ripartizione* (9) di I in classi, ove si convenga di porre $a \sim b$ se e solo se a e b appartengono alla medesima classe; e viceversa, ogni ripartizione di I è individuata dall'equivalenza alla quale essa dà luogo.

L'insieme \hat{I} delle classi determinate in I da un'equivalenza si può dire in generale *insieme-quotiente* di I rispetto alla data equivalenza; interessa in particolare la considerazione delle equi-

(8) Ved. ad es. in GLIVENKO - *Théorie générale des structures* (Ed. Hermann, Paris 1938), pagg. 10-13.

Colgo l'occasione per notare che la parola « *structure* » si trova ivi, e spesso altrove, col significato dell'inglese « *lattice* », che io ho tradotto con « *graticcio* ».

(9) Dicendo *ripartizione* s'intende: in classi non vuote e prive di elementi a comune a due a due

valenze che soddisfano ad opportune condizioni di compatibilità con la struttura di I sì che l'insieme \widehat{I} si possa considerare dotato di una struttura opportunamente deducibile da quella di I ⁽¹⁰⁾.

17. - Ne diamo un esempio che interessa il seguito (§ 3 e § 4). Detto $L^{(n)}$ il graticcio associato al gruppo simmetrico $(n!)$ ⁽¹¹⁾ per due elementi Γ_1 e Γ_2 di $L^{(n)}$ si ponga $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ se e solo se esiste α e $(n!)$ tale che sia $\Gamma_2 = \alpha \Gamma_1 \alpha^{-1}$; la relazione \sim così definita è ovviamente un'equivalenza; due elementi Γ_1 e Γ_2 in tale senso equivalenti si diranno *omotopi*; l'insieme-quotiente che si ottiene, cioè l'insieme delle *classi di omotopia* si penserà ancora ordinato ponendo, per due suoi elementi $\mathfrak{G}_1 \rightarrow \mathfrak{G}_2$ se e solo se per ogni $\Gamma_1 \in \mathfrak{G}_1$ esiste un elemento Γ_2 di \mathfrak{G}_2 del quale Γ_1 sia sottogruppo; si constata facilmente che l'insieme-quotiente detto è un graticcio; esso si dirà *graticcio ridotto* relativo al gruppo simmetrico $(n!)$ e s'indicherà con $\widehat{L}^{(n)}$.

18. - Strutture topologiche. - Se fra tutti i sottoinsiemi di I se ne pensano *dati* (cioè: distinti) quelle di una famiglia $\mathfrak{A} (\subset \mathfrak{p}(I))$, sotto le condizioni (I), (II), (III) che seguono, si dice che l'insieme I è dotato di una *struttura topologica*, od anche che I è uno *spazio topologico*. Le condizioni da imporsi sono ⁽¹²⁾:

- (I) $\emptyset \in \mathfrak{A}$, $I \in \mathfrak{A}$;
- (II) la riunione di quantisivogliamo insiemi di \mathfrak{A} appartenga ad \mathfrak{A} ;
- (III) l'intersezione di due insiemi di \mathfrak{A} appartenga ad \mathfrak{A} .

⁽¹⁰⁾ In DUBREIL, *Algèbre* I (Paris, 1946) la trattazione di alcune parti dell'Algebra moderna pone in luce l'importanza delle considerazioni di compatibilità di un'equivalenza con una struttura algebrica.

⁽¹¹⁾ Col simbolo $(n!)$ indico il gruppo simmetrico su n elementi, inteso come gruppo astratto; col simbolo $(n!)_I$ indico la sua rappresentazione come gruppo per le sostituzioni per un dato insieme I di n elementi. Importa per le considerazioni che seguiranno tenere ben distinte le due nozioni.

⁽¹²⁾ Così ad es. in BOURBAKI, op. cit., *Topologie*, chap. I.

19. - Altri tipi di strutture. - Mi limito a citare alcuni altri « tipi » di strutture, che caratterizzano i vari metodi della ricerca matematica. *Struttura grafica* potrà dirsi quella di un insieme I fra i sottoinsiemi del quale si distinguano alcune particolari *classi di sottoinsiemi*, in numero finito, assoggettate a condizioni di subordinazione per cui le classi di sottoinsiemi di I possano assimilarsi alle classi dei sottospazi lineari di un S_n proiettivo; può notarsi che una tale struttura può ricondursi ad una (opportuna) struttura di equivalenza per l'insieme $\mathfrak{p}(I)$. *Struttura di filtro* è detta quella di un insieme I , del quale si pensi assegnata una famiglia non vuota di sottoinsiemi la quale: non contenga l'insieme vuoto, se contiene I_1 contenga anche ogni I_2 per il quale sia $I_1 \subset I_2$, contenga l'intersezione di due qualunque dei suoi insiemi. *Struttura di ordine-circolare* è quella di un insieme di n ⁽¹³⁾ elementi « permutabili » fra loro secondo tutte e sole le sostituzioni di un sottogruppo ciclico di ordine n del gruppo simmetrico su n elementi. *Struttura di semplice* $(n-1)$ -*dimensionale orientato* può dirsi quella di un insieme di n elementi « permutabili » fra loro secondo tutte e sole le sostituzioni del gruppo alterno su n elementi.

20. - I due ultimi esempi mostrano come una struttura possa anche assegnarsi per un insieme assegnando un sottogruppo del gruppo simmetrico su n elementi quale « gruppo degli automorfismi » consentiti dalla struttura ⁽¹⁴⁾.

§ 2. - Critica del concetto di « specie » di struttura.

21. - Una struttura per un insieme I è da pensarsi *individuata* da un complesso di « relazioni » (nel senso generale di: affermazioni) ammesse per l'insieme I ; di qui immediatamente l'idea di *isomorfismo* fra due insiemi a mezzo del seguente

⁽¹³⁾ In questo e nel seguente esempio il numero n è supposto finito.

⁽¹⁴⁾ Salvo a precisare nel seguito, s'intenderà per *automorfismo* di un insieme (dotato di struttura) I ogni trasformazione biunivoca di I in sè tale che ad ogni affermazione vera per elementi di I corrisponda, a mezzo della trasformazione detta, un'affermazione vera per gli elementi corrispondenti.

criterio d'isomorfismo: *due insiemi I, I' sono da considerarsi isomorfi (in relazione alle strutture di cui si pensano dotati) se è possibile una corrispondenza biunivoca fra i loro elementi ed una corrispondenza biunivoca fra le relazioni di struttura tale che ogni affermazione costituente un dato di struttura per l'uno dei due insiemi si traduca, a mezzo delle dette corrispondenze biunivoche, in un dato di struttura per l'altro insieme.*

22. - Ora, la condizione che appare in questo criterio come sufficiente non può, per ragioni che si diranno, ritenersi senz'altro necessaria per l'isomorfismo di due insiemi (si confronti il « *se* » di questo enunciato con il « *se e solo se* » del secondo enunciato al n. 3).

Vi sono dei casi in cui il criterio di isomorfismo non è applicabile in quanto il tipo delle relazioni che definiscono la struttura è diverso per i due insiemi, e pure deve ritenersi sussistente l'isomorfismo, in base al punto di vista - universalmente accettato - per cui *se due sistemi S ed S' di postulati sono equivalenti* ^(14a) *essi rappresentano due modi diversi di trattare una stessa teoria*; il dare la preferenza all'uno o all'altro potrà rispondere soltanto a ragioni di comodità di trattazione o di adeguamento ai fini applicativi.

Valgano a prova di ciò gli esempi che seguono.

23. - Esempi. - a) *Graticci* (« *lattices* »). Ogni (particolare) graticcio può pensarsi definito (ved. n. 12) mediante un sistema S di condizioni formulate in base ad una relazione d'ordine (affermazioni concernenti coppie di elementi, del tipo $O(a, b)$ col significato di $a \rightarrow b$) od anche mediante (ved. n. 14) un sistema S' di condizioni formulate in base a due operazioni (affermazioni su terne di elementi, del tipo $\wedge(a, b, c)$, $\vee(a, b, c)$ con i significati risp. di $a \wedge b = c$, $a \vee b = c$). È evidente che il criterio di isomorfismo sopra esposto non può in alcun modo

(14a) Cioè tali che: 1) in base alle relazioni ammesse come primitive per S si possano *definire* le relazioni ammesse come primitive per S' in modo che sotto le ipotesi rappresentate dai postulati di S risultino soddisfatti i postulati di S' ; 2) viceversa.

applicarsi per due graticci L, L' quando essi si suppongono assegnati l'uno mediante il criterio d'ordine, l'altro mediante le due leggi di composizione interne.

b) *Retta topologica*. La struttura della «retta topologica» (e priva di «punto all'infinito») può assegnarsi sia per via topologica sia mediante un criterio d'ordine (sotto ben note condizioni). L'isomorfismo non può stabilirsi in base al criterio sopra enunciato, eppure non si potrà non ammettere che si tratta in ambo i casi della stessa struttura (insiemi *isomorfi*).

c) *Spazi grafici e spazi lineari*. È noto che la struttura di «spazio proiettivo» può introdursi in due modi ⁽¹⁵⁾: I) si distinguono entro un insieme S particolari classi di sottoinsiemi (come già accennato al n. 19); II) a partire da un dato *corpo* K , le $(n + 1)$ -- *ple* omogenee di elementi di K vengono pensate «punti» di S ; si definiscono poi i sottoinsiemi «lineari» (spazi subordinati), i quali - si constata - soddisfano alle condizioni «grafiche» degli spazi proiettivi; il limitarsi infine alla considerazione delle sole proprietà invarianti rispetto a trasformazioni «lineari» di coordinate porta all'identità strutturale con la teoria costruita nell'altro modo. Ogni considerazione di Geometria proiettiva può formularsi, indifferentemente, nei termini propri dell'uno o dell'altro dei due metodi; ne risulta che la *struttura* dell'insieme S deve riguardarsi come qualcosa di intrinseco, di cui interessa essenzialmente ricercare le proprietà enunciabili in termini indipendenti dalla particolare via seguita per introdurla in S . La struttura viene praticamente definita e poi studiata secondo il metodo che si ritiene il più opportuno.

24. - Dunque, la condizione di cui nell'enunciato al n. 21 non può assumersi come definente la nozione di isomorfismo fra due insiemi. Ed infatti l'argomentazione svolta (n. 22) e gli esempi dati (n. 23) mostrano che è del tutto fuori luogo far entrare la nozione di «specie» o «tipo» di struttura *nel quadro*

⁽¹⁵⁾ L'argomento trovasi chiaramente esposto nel libro: B. SEGRE - *Lezioni di Geometria moderna* (vol. I: *Fondamenti di Geometria sopra un corpo qualsiasi*, Bologna 1948); vedansi in particolare i paragrafi 13 e 14.

assiomatico della teoria ⁽¹⁶⁾. È in ogni caso impossibile condizionare ad essa la nozione di isomorfismo e quindi quella di struttura: con riferimento agli esempi precedenti, un graticcio dato mediante un criterio d'ordine non risulterebbe isomorfo allo stesso graticcio dato mediante le due leggi di composizione interne ⁽¹⁷⁾. E questo significa condizionare l'isomorfismo fra insiemi (ossia l'identità di struttura) addirittura alle notazioni usate (si veda ancora il n. 13, ultime righe).

25. - Tale esclusione del concetto di *specie* dall'assiomatica nulla toglie dell'importanza del concetto stesso *nel quadro metodologico* relativo alla teoria, nel senso che una « specie » rappresenta un metodo di ricerca per la data struttura (non escludendosi, naturalmente, che in molti casi uno dei metodi sia di gran lunga il più appropriato, sì da potersi considerare praticamente associato alla considerazione della struttura stessa) ⁽¹⁸⁾.

⁽¹⁶⁾ In BOURBAKI, op. cit., livre I (*Th. des ensembles*), *Fasc. des Résultats*, § 8, la nozione di *struttura* è ricondotta alla scelta di un elemento da uno degli insiemi costituenti la « scala » (échelle) avente per base l'insieme o gli insiemi che si considerano; essa appare dunque legata ad una *specie* (o *tipo*). Vedasi in particolare il n. 2 del detto § 8, ed il n. 5 dello stesso §, riguardante il *trasporto* di una struttura e l'isomorfismo. Va tenuto presente in ogni modo riguardo al citato fascicolo, quanto detto al n. 2 e ad ⁽¹⁾ di questa Memoria. Anche a quanto si espone in *Algèbre*, op. cit., chap. I, § 4 n. 1 a proposito di strutture algebriche non può darsi più che un valore di terminologia metodologica.

⁽¹⁷⁾ Stando alla nozione di « specie » secondo BOURBAKI (loc. cit. in ⁽¹⁶⁾, § 8, nn. 1 e 2), la struttura (S) di graticcio equivale alla scelta di un elemento dell'insieme $\mathfrak{p}(E \times E)$, mentre la struttura (S') di graticcio si riconduce alla scelta di un elemento dell'insieme $\mathfrak{p}(E \times E \times E) \times \mathfrak{p}(E \times E \times E)$.

⁽¹⁸⁾ Dunque: una struttura non individua una specie, come l'*oggetto* di una ricerca non può individuare il *metodo* della ricerca stessa. E per ovvia che tale distinzione possa apparire, sta tuttavia il fatto che l'aver inavvertitamente attribuito all'« oggetto » caratteri che sono invece propri del « metodo » ha costituito in più di un'occasione un ostacolo per la Matematica e per la Scienza in genere.

§ 3. - La nozione generale di struttura.

26. - Dato un insieme I , indichiamo con $F(a, b, \dots)$ un'affermazione ⁽¹⁹⁾ su particolari elementi a, b, \dots di I . Una proposizione in cui compaiano elementi « variabili » di I , del tipo $F(x, y, \dots)$ che si noterà anche con F , può dirsi un'equazione in I ; a seconda dei « valori » attribuiti alle x, y, \dots si ottiene un'affermazione o no, non escludendosi, naturalmente, che un'equazione possa risultare identicamente soddisfatta in I o mai soddisfatta in I .

All'insieme I si penserà associato un sistema S di affermazioni, che si dirà anche un *sistema di dati* per l'insieme stesso; là ove non possa nascerne equivoco, il sistema S può pensarsi sottointeso nel simbolo I . Un siffatto sistema S consente di formulare equazioni in I , ed attribuisce a ciascuna un ben determinato insieme di *soluzioni*; ognuna di tali equazioni si dirà *appartenente al sistema S*.

27. - Una trasformazione biunivoca di un insieme I in sè si dice un *automorfismo* relativamente ad un certo sistema S di dati associato ad I se e solo se con ogni affermazione $F(a, b, \dots)$ sussiste la $F(a^*, b^*, \dots)$ per i trasformati e viceversa.

È immediata la constatazione che: *gli automorfismi di I* (relativi ad S) *costituiscono un gruppo*, e precisamente un ben determinato sottogruppo del gruppo $(n!)_I$ di tutte le possibili trasformazioni biunivoche dell'insieme I in sè ⁽²⁰⁾.

28. - DEFINIZIONE I. - *Due sistemi S, S' di dati relativi ad uno stesso insieme I si diranno equivalenti (od ugualmente determinativi) se e solo se ogni automorfismo di I relativo ad S*

⁽¹⁹⁾ Ved. nota ⁽³⁾.

⁽²⁰⁾ Ved. nota ⁽¹¹⁾.

è un automorfismo di I relativamente ad S' e viceversa. In breve: se e solo se i due sistemi consentono gli stessi automorfismi per I ⁽²¹⁾.

29. - Si osservi, in relazione alla definizione data, che per l'equivalenza di due sistemi S ed S' sopra un insieme I : 1) non è sufficiente che i due gruppi degli automorfismi siano isomorfi (cioè rappresentino lo stesso gruppo astratto), 2) non è sufficiente neppure che essi siano omotopi (ved. n. 17).

Così ad esempio, detto I un insieme di 4 dati elementi a, b, c, d , confrontiamo i seguenti sistemi di dati (in cui $<$ è simbolo di relazione d'ordine, ved. n. 11):

$$S : a < b, b < c, b < d$$

$$S' : a \dashv b, b \dashv c, c \dashv d \text{ (con } \dashv \text{ simbolo di relazione « simmetrica, fra elementi distinti }^{(22)} \text{ », non transativa)}$$

$$S'' : a, b, c, d \text{ costituiscono un gruppo, con } a \text{ unità, } b^2 = a, c^2 = b \text{ (ecc.)}$$

⁽²¹⁾ Per giustificare la nozione di *equivalenza* data nel testo, osserviamo che essa appare il solo modo di precisare l'idea espressa sommariamente come segue:

(1) « i sistemi S ed S' devono ritenersi equivalenti se e solo se è possibile « tradurre » i dati di S in dati di S' e viceversa in modo che gli elementi dell'insieme I risultino « ugualmente determinati » nei due modi »; più precisamente:

(2) « i sistemi S ed S' si dicono equivalenti se e solo se per ogni equazione F appartenente ad S esiste (almeno) un'equazione F' appartenente ad S' avente tutte e solo le soluzioni della F e viceversa ».

Sorge allora il problema dell'equivalenza logica delle (1), (2) e quello dell'equivalenza di queste con la definizione data nel testo. Al primo problema non sembra possa darsi consistenza logica non essendo la (1) posta in termini precisi. Quanto al secondo problema, è facile provare il Teorema seguente: *condizione necessaria affinché due sistemi di dati S, S' relativi ad un insieme I siano equivalenti secondo la (2) è che lo siano secondo la Definizione I (data nel testo)*. Non è altrettanto facile decidere dell'inverso; comunque l'approfondimento delle relazioni sussistenti fra le due nozioni esige una formulazione ben più precisa di quella qui esposta per le nozioni in questione e, come già detto, tutte le considerazioni che si danno qui e nel testo vanno riguardate soltanto come *ragioni di plausibilità* per le nozioni definite.

⁽²²⁾ Ossia (ved. nota (6)): relazione fra paio di elementi di I .

$$S''' : c < d, d < a, d < b$$

$$S'''' : c < a, d < a, a < b.$$

I sistemi S ed S' consentono gruppi di automorfismi che come gruppi astratti coincidono; essi però non sono *equivalenti*. E infatti S consente lo scambio ($c d$) che S' non consente; inoltre, può osservarsi, S *determina* (o *distingue*) l'elemento a (nel senso preciso, che nessun automorfismo di S sposta a) mentre nel sistema S' non avviene altrettanto (anzi, non avviene altrettanto per alcuno dei 4 elementi).

Si constata invece che S'' è equivalente ad S ; il fatto che due tali sistemi risultino in base alla definizione data equivalenti esprime la constatazione che « ogni considerazione che nell'insieme I si possa fare in base ai dati di S , può ripetersi in base ai dati di S' e viceversa ».

I sistemi S ed S''' non sono equivalenti, mentre i loro gruppi di automorfismi sono non solo isomorfi ma anche omotopi.

I sistemi S ed S'' sono equivalenti, per quanto le notazioni su usate per i due sistemi sono incompatibili (per poter considerare simultaneamente i due sistemi sopra l'insieme I basterebbe scrivere ad es. per S « $a < b, \dots$ » e per S'' « $c \rightarrow a, \dots$ »; resta allora possibile tradurre ogni dato di S in un dato di S'' (e viceversa); beninteso, non potrà consistere nel sostituire al segno $<$ il segno \rightarrow).

30. – Per giungere finalmente alla nozione di *struttura*, fisseremo dapprima mediante alcune considerazioni i requisiti che per essa riteniamo opportuni. Partendo dall'idea contenuta in modo del tutto impreciso nell'affermare che *mediante un sistema qualunque S di dati per un insieme I s'introduce in I una certa struttura* (§ 1), la quale si dirà allora *rappresentata* ⁽²³⁾ *sull'insieme I* mediante il sistema di dati S , si tratta di fissare le condizioni sotto le quali si ritenga opportuno affermare che due sistemi di dati, su uno stesso insieme o su due insiemi distinti, introducono strutture coincidenti.

(23) La parola *rappresentazione* viene usata qui e nel seguito in un senso ben preciso, che ha l'analogo in quanto s'intende per *rappresentazione* di un gruppo (astratto).

31. - A) Anzitutto, una *condizione necessaria* ⁽²⁴⁾. Nel volerli attenere alla convenzione già detta al n. 3 (« due strutture vanno considerate coincidenti se e solo se i relativi insiemi vanno considerati isomorfi »), sarà ben plausibile l'ammettere che *per poter dire isomorfi due insiemi è necessario che esista una corrispondenza biunivoca fra i loro elementi*. Ne segue che
una struttura individua un numero cardinale n .

32. - B) Vogliamo poi prescrivere una *condizione sufficiente* ammettendo che *due sistemi di dati S, S' equivalenti sopra un insieme I introducono in I la stessa struttura* (ved. nota ⁽²¹⁾). Ne segue che

un sottogruppo del gruppo $(n!)$, individua una struttura.

33. - C) Ad un'ulteriore *condizione sufficiente* ci porterà ora un'ovvia condizione relativa al « trasporto » di un sistema di dati da un insieme ad un altro.

È importante notare che le stesse due convenzioni precedenti escludono allora la possibilità di assumere il criterio di cui in *B*) come condizione necessaria per l'identità di strutture sopra un dato insieme I .

Conveniamo quanto segue: intendiamo di poter dire dotati della stessa struttura anche insiemi distinti, cioè intendiamo che la nozione di struttura risulti indipendente dai particolari elementi dell'insieme I al quale essa è « applicata » ⁽²⁵⁾; e precisamente, che assegnati per due insiemi I ed I_1 rispettivamente due sistemi di dati S ed S_1 , ove si possano riferire biunivocamente gli elementi dei due insiemi in modo tale che « trasportando » mediante la corrispondenza biunivoca le relazioni di S_1 sopra I si ottenga su questo un sistema equivalente ad S , gli insiemi I ed I_1 (siano

⁽²⁴⁾ Si tratta qui evidentemente, ancora di *condizioni di plausibilità* per la coincidenza di due strutture; il loro valore è subordinato alla plausibilità della nozione di equivalenza fra sistemi.

⁽²⁵⁾ Così come s'intende che ad es. la nozione di « gruppo (astratto) » sia indipendente da una sua particolare *rappresentazione*, o che quella di « tipo d'ordine » non sia in alcun modo vincolata all'*insieme* che viene ordinato. Richiediamo dunque per la nozione di « struttura » lo stesso carattere d'invarianza che si attribuisce alle nozioni di « gruppo astratto », di « tipo d'ordine », di « numero cardinale », ecc.

da dirsi *isomorfi* e) risultino avere *la stessa* struttura, e viceversa. Ossia: intendiamo che una struttura permanga la stessa se agli elementi dell'insieme si sostituiscono (biunivocamente) altri elementi qualunque (per i quali, ben s'intende, si pensino ancora sussistenti le relazioni preesistenti fra gli elementi primitivi). Questa considerazione *deve* potersi ripetere anche per il caso in cui sia $I_1 = I$, e per questo caso *non può* escludersi che la corrispondenza biunivoca che «trasporta» i dati di S possa non essere l'identità; anzi, la corrispondenza biunivoca non può assoggettarsi ad alcuna restrizione ⁽²⁶⁾. E allora, il poter scegliere anche una delle trasformazioni biunivoche di I in sè che non sono automorfismi per il sistema S porta a concludere che: *l'ammettere l'invarianza della struttura per trasporto fra insiemi distinti implica l'ammettere che l'equivalenza di due sistemi di dati sopra un insieme I non è condizione necessaria per che essi «rappresentino» su I una stessa struttura*. In altre parole, siamo stati portati ad ammettere che una *stessa* struttura possa essere «rappresentata» sopra uno *stesso* insieme mediante sistemi di dati non equivalenti.

Ne segue che: *due sottogruppi corrispondentisi in una trasformazione biunivoca fra i gruppi $(n!)_I$ ed $(n!)_{I_1}$ (individuata da una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi I ed I_1) rappresentano, risp. sopra gli insiemi I ed I_1 , la stessa struttura; e che: due sottogruppi corrispondenti in un automorfismo (interno) di $(n!)_I$ rappresentano sopra l'insieme I la stessa struttura*. In breve che:

sottogruppi omotopi in $(n!)$ danno luogo alla stessa struttura ^(26a).

⁽²⁶⁾ E infatti: il trasporto di S da I sopra un *altro* insieme I_2 (del quale supponiamo soltanto che abbia potenza uguale a quella di I) può eseguirsi secondo una trasformazione biunivoca *qualunque*; e allora trasportando S da I su I_2 mediante una trasformazione φ e successivamente da I_2 su I_1 ($\cdot = I$) mediante una ψ^{-1} , con $\psi \neq \varphi$, si ha il trasporto di S da I sopra l'insieme stesso attraverso la $\psi^{-1}\varphi$, che è poi una trasformazione biunivoca *qualunque* di I in sè.

^(26a) Naturalmente, due sottogruppi omotopi *distinti* di $(n!)_I$ dovranno considerarsi due rappresentazioni *diverse* della *stessa* struttura sopra l'insieme I . Dicendo che un certo insieme I si pensa dotato di una certa struttura, sottointenderemo sempre: rappresentata su I in un certo modo.

34. - D) Ed infine diamo un'ulteriore *condizione necessaria* che unitamente alle precedenti varrà a togliere ogni arbitrio alla nozione di struttura. Conveniamo che: *affinchè due insiemi si possano dire isomorfi* (rispetto a due sistemi di dati risp. ad essi associati) è *necessario che esista almeno una corrispondenza bi-univoca fra i loro elementi per la quale dal confronto* (per « trasporto », ved. n. prec.) *dei due sistemi essi risultino equivalenti*. Ne segue, traducendo (analogamente a quanto sopra) in termini di « gruppi », che :

se a due sottogruppi di $(n!)$ corrisponde la stessa struttura essi sono omotopi.

35. - Dunque, se si ammettono come plausibili ed opportune le quattro convenzioni fatte (oltre a quelle del n. 3), le nozioni di « isomorfismo » e di « struttura » vanno definite come segue.

DEFINIZIONE II. - *Due insiemi I e I_1 ai quali si pensino rispettivamente associati due sistemi di dati S ed S_1 si dicono isomorfi se e solo se hanno ugual potenza e nel gruppo $(n!)$ i gruppi degli automorfismi che i sistemi di dati rispettivamente consentono per gli insiemi sono sottogruppi omotopi.*

DEFINIZIONE III. - *Si dice struttura (per n elementi) ogni classe di omotopia entro ad un gruppo simmetrico $(n!)$, ossia ogni elemento del relativo graticcio ridotto $\widehat{L}^{(n)}$ (ved. n. 17).*

36. - Per ogni numero n , le strutture possibili si potranno pensare *ordinate* in corrispondenza all'ordine esistente nel graticcio $\widehat{L}^{(n)}$, dicendosi tanto *più fini* le strutture quanto più ristretti siano i relativi sottogruppi. Si può convenire di scrivere ad es. $\mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}'$ per indicare che \mathfrak{s} è meno fine di \mathfrak{s}' ⁽²⁷⁾. Le strutture corrispondenti agli elementi estremi del graticcio si potranno dire *struttura nulla* (gruppo d'ordine $n!$) e *struttura discreta* (gruppo d'ordine 1).

⁽²⁷⁾ Si noti che nello stabilire il confronto fra le finezze di due strutture invertito (anche nella figura al § 4) l'ordine del graticcio rispetto ad $\widehat{L}^{(n)}$; (preferisco ottenere che procedendo da sinistra verso destra si passi da strutture meno fini a strutture più fini).

§ 4. - Strutture possibili per insiemi di 1, 2, 3, 4 elementi.

37. - A titolo di esemplificazione, vogliamo esaminare tutte le strutture possibili per insiemi di 1, 2, 3, 4 elementi. Il modo di procedere è quello già descritto, applicabile praticamente senz'altro al caso di un numero finito n qualunque di elementi: del gruppo astratto $(n!)$ si considera il graticcio (*lattice*) $L^{(n)}$ dei sottogruppi (ved. n. 15), e da questa si deduce il graticcio ridotto $\widehat{L}^{(n)}$ (ved. n. 17), i cui elementi danno tutte e sole le strutture possibili per insiemi di n elementi. Potrà apparire poi più o meno interessante lo studio della possibilità di *rappresentare* ciascheduna di queste strutture in qualcuno dei modi più usati: ad es. mediante una relazione di equivalenza, d'ordine, d'ordine-circolare, ecc., oppure mediante una figura di n punti (per es. nello S_3 euclideo) vincolati in modo da consentire tutti e soli gli automorfismi che si vogliono; (così ad es. il gruppo alterno su 4 elementi è rappresentato da [ll'insieme dei vertici di] un tetraedro orientato nello S_3 orientato).

38. - In base alla definizione data l'*insieme vuoto* risulta non potersi dotare di struttura alcuna.

39. - Per un *insieme di 1 elemento* è evidentemente possibile *una* struttura, in quanto il gruppo $(1!)$ possiede un solo sottogruppo.

40. - Per un *insieme di 2 elementi* sono possibili *due* strutture distinte, in corrispondenza dei due sottogruppi del gruppo $(2!)$.

41. - Per un *insieme di 3 elementi* sono possibili *quattro* strutture. È infatti: il gruppo $(3!)$ possiede 6 sottogruppi e la *lattice-ridotta* $\widehat{L}^{(3)}$ consta di 4 elementi, data l'omotopia dei tre sottogruppi di ordine 2. Esse sono (ved. figura): la «struttura nulla» (che consente come automorfismo ogni sostituzione), la struttura d'ordine-circolare, la struttura che distingue un elemento e consente lo scambio degli altri due, la struttura «discreta» che consente solo l'automorfismo identico.

42. — Per un insieme di 4 elementi sono possibili *undici* strutture. Infatti il gruppo (4!) possiede 30 sottogruppi che si ripartiscono nelle 11 classi di omotopia che qui di seguito enumeriamo, ponendo ciascuna di esse in relazione con l'« insieme astratto » corrispondente. Diciamo a, b, c, d gli elementi dell'insieme I .

Al sottogruppo (4!), di ordine 24, che costituisce classe a sè, corrisponde la « struttura nulla »; dell'insieme I è *data* solo la potenza.

Al sottogruppo alterno, di ordine 12, che costituisce classe a sè, corrisponde la struttura del « tetraedro orientato » (ved. n. 37 ed anche n. 19).

Alla classe dei 4 sottogruppi (omotopi fra loro) di ordine 6, isomorfi al gruppo (3!), corrisponde la struttura che dei 4 elementi distingue uno, consentendo qualunque sostituzione degli altri tre fra loro. Può rappresentarsi ad es. mediante equivalenza ($a \sim b \sim c$, non $\sim d$).

Alla classe dei 3 sottogruppi (omotopi fra loro) di ordine 8 corrisponde la struttura individuata ad es. dall'equivalenza $a \sim b$, $c \sim d$; è anche rappresentabile dicendo a, b, c, d i vertici di un quadrato nello spazio.

Alla classe dei 3 sottogruppi (omotopi fra loro) ciclici di ordine 4 corrisponde la struttura d'ordine-circolare per 4 elementi (ved. n. 19); essa è più fine della precedente ma non è più fine di quella del « tetraedro » la quale non consente sostituzioni cicliche del quart'ordine.

Alla classe costituita dal sottogruppo invariante d'ordine 4 (quadrinomio) corrisponde la struttura, che si potrebbe dire « quadrinomia », per la quale sono consentiti tutti e soli i doppi scambi dei 4 elementi; essa è quella che la struttura di piano proiettivo reale subordina su una quaterna non armonica di punti allineati; ed è anche quella dei vertici di un rettangolo (v. fig.) nello spazio ordinario.

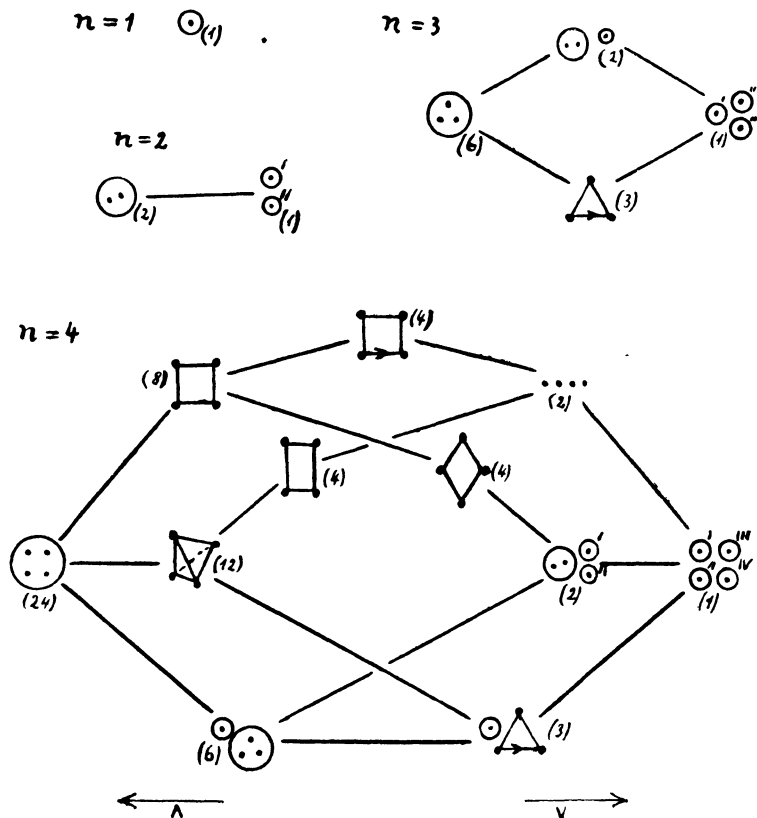
Alla classe dei 3 sottogruppi di ordine 4 rimanenti (omotopi fra loro, isomorfi ma non omotopi al precedente) corrisponde la struttura che può rappresentarsi ad es. mediante i dati d'ordine $a < b$, $a < d$, $c < b$, $c < d$; essa è anche quella dei vertici di un rombo (ved. fig.) nello spazio ordinario.

Alla classe dei 4 sottogruppi di ordine 3 (omotopi fra loro) corrisponde la struttura che nell'insieme distingue un elemento e orienta la terna rimanente,

Alla classe dei 3 sottogruppi di ordine 2 che contengono un doppio-scambio (omotopi fra loro) corrisponde una struttura rappresentata ad es. dal porre $a \mapsto b, b \mapsto c, c \mapsto d$ (v. n. 29, es. S'); la struttura non distingue alcun elemento dell'insieme.

Alla classe dei 6 sottogruppi di ordine 2 che contengono uno scambio semplice (omotopi fra loro ed isomorfi anche ai precedenti) corrisponde una struttura che nell'insieme distingue due elementi, consentendo lo scambio degli altri due. Essa è ad es. quella del gruppo (= insieme I) moltiplicativo dei numeri $\pm 1, \pm i$ (ved. n. 29, es. S, S'', S''', S'''') o del graticcio relativo all'« algebra di BOOLE » per 4 elementi. Questa struttura non è rappresentabile mediante un'equivalenza.

Al sottogruppo di ordine 1 corrisponde finalmente la struttura che distingue ciascuno dei 4 elementi.



§ 5. - Problemi della Teoria delle strutture.

43. - Accenno infine a qualcuna delle più importanti classi di problemi della Teoria così impostata; non si tratta di problemi sostanzialmente nuovi, ma di una più generale visione di problemi per lo più classici. Questo accenno non ha alcuna pretesa di completezza.

44. - Problemi di rappresentazione. - L'assegnare, in astratto, una *struttura* per un dato insieme I di n elementi consiste, stando alla definizione data, nell'assegnare una classe di omotopia entro il graticcio dei sottogruppi del gruppo astratto $(n!)$; praticamente invece, una struttura viene introdotta nell'insieme I mediante un « sistema di dati », ossia essa viene data e studiata sotto una « specie ». Sorge allora il problema di *rappresentare una data struttura mediante relazioni di dato tipo*, cioè mediante relazioni per le quali si prescrivano certe proprietà formali. Così ad es.: ricerca degli insiemi ordinati (o più precisamente dei tipi d'ordine) che ammettono un dato gruppo di automorfismi, ossia anche caratterizzazione delle strutture che consentono una rappresentazione a mezzo di insiemi ordinati; lo stesso, mediante una ⁽²⁸⁾ o più relazioni di equivalenza; o come figura di n punti (per es. dello spazio ordinario) collegati rigidamente o secondo altre modalità fra di loro (poliedri in senso elementare o in senso combinatorio) ecc.

Si tratta evidentemente di una generalizzazione dell'usuale problema della rappresentazione dei gruppi.

45. - Problemi di ampliamento. - Dato un insieme I dotato di una certa struttura si pone il problema della possibilità di estendere l'insieme dato con l'*aggiunzione di nuovi elementi*

⁽²⁸⁾ Una condizione necessaria affinché una struttura sia rappresentabile con una equivalenza è che il relativo gruppo sia il prodotto diretto di gruppi simmetrici: $\Gamma = (r!) \times (s!) \times \dots$, con $r + s + \dots = n$ (supposto finito). La condizione stessa non è sufficiente.

sì da consentire la risolubilità di una certa classe di equazioni che si possono formulare in base alla struttura data.

Vi rientrano, tra i più noti: 1) la Teoria di GALOIS per le equazioni algebriche; 2) lo studio degli ampliamenti (o « chiusure ») di un insieme totalmente ordinato (com'è ad es. il caso dell'aggiunzione di DEDEKIND delle sezioni ad un insieme denso numerabile); 3) l'aggiunzione di punti ad uno spazio topologico per raggiungere la connessione o la compattezza ecc.; 4) la teoria dell'ampliamento dei gruppi; ecc.

46. - Problemi di determinazione. - Se I è un insieme dotato di struttura diremo, con espressione già usata, che la struttura *distingue* un elemento a di I se ogni automorfismo porta a in sè ossia se esiste un'equazione (appartenente alla struttura) avente a come unica soluzione.

Così ad es. la struttura di gruppo sopra un insieme I distingue in ogni caso almeno l'unità; nell'insieme dei numeri interi positivi la struttura d'ordine 0, che è lo stesso, la struttura additiva, distingue ciascun elemento, la struttura moltiplicativa invece distingue entro l'insieme solo il numero 1; nell'insieme degli interi relativi la struttura d'ordine non distingue alcun elemento, la struttura additiva il solo numero 0, la struttura moltiplicativa i numeri 0, 1, -1 .

47. - Si potrà poi dire che la struttura *distingue fra loro* due elementi a , b se nessun automorfismo porta a in b (nè, quindi, b in a); in base a questa considerazione gli elementi di I si ripartiscono in « classe di transività ». La conoscenza di queste non individua però la struttura: ad es. in una struttura d'ordine-circolare sopra un insieme finito, gli elementi appartengono tutti alla medesima classe (si potrà dire che « la struttura lascia gli elementi a due a due indistinti »); lo stesso avviene in una struttura di equivalenza che ripartisca lo stesso insieme I in sottoinsiemi tutti di ugual potenza; ed ancora nella struttura « nulla » ecc.

Nei casi in cui la struttura lascia gli elementi a due a due indistinti non avverrà in generale altrettanto per le paia di ele-

menti; ad es. una struttura d'ordine-circolare su un numero finito di elementi distingue in ogni caso un paio a, b dal paio a, c se è $c \neq b$, nel senso che nessun automorfismo porta a in a e b in c .

48. - E ancora, può avvenire che le paia rimangono a due a due indistinte, mentre non altrettanto avvenga delle terne⁽²⁹⁾, e così via. Il problema della ricerca delle strutture soddisfacenti ad opportune condizioni di transitività interessa la Topologia dei poliedri e la Geometria proiettiva (ricerca dei possibili spazi proiettivi finiti, che può impostarsi in termini di « distinzione di sottoinsiemi per mezzo della struttura » e quindi ricondursi direttamente a questioni di transitività per i relativi gruppi di proiettività).

49. - **La questione delle scelte.** - Agli effetti di una Teoria avente per oggetto lo studio di una struttura sopra un insieme, all'insieme dato se ne può sostituire un altro qualunque isomorfo al primo; la teoria svolta può quindi pensarsi indipendente dal particolare insieme che si possa essere scelto quale « sostegno » della struttura studiata. Ove lo si ritenga comodo, si potrà dire che la Teoria viene svolta sopra un *modello astratto d'insieme* (od « *insieme astratto* ») I dotato della struttura data⁽³⁰⁾.

Se dunque I è un insieme (comunque si preferisca pensarlo) dotato di una certa struttura, le considerazioni sulle *distinzioni* che la struttura consente di elementi, paia, ecc. entro l'insieme (nn. 46-48) possono chiarire la nozione di « scelta⁽³¹⁾ », mostrando la necessità di attribuire un diverso significato alle diverse proposizioni concernenti una scelta.

(29) Qui: sottoinsiemi di potenza 3.

(30) Che si dica in un modo o nell'altro è indifferente. Non è che parlando di « insieme astratto » qui si voglia introdurre qualcosa di nuovo; si tratta soltanto di un'espressione che può sembrare meglio rispondente alla nozione che si studia (così come si suol dire piuttosto « la molecola d'acqua » che « una molecola qualsiasi d'acqua »).

(31) La parola è qui usata senza alcun riferimento ad un possibile od impossibile atto dello scegliere; dicendo *scelta* intendiamo *sottoinsieme*, che si voglia far oggetto di considerazione.

50. — Ci limiteremo qui ad un cenno relativo a casi particolarmente semplici; da un esame più approfondito dell'argomento si potrebbe forse sperare di giungere ad una più chiara visione della dibattuta questione delle scelte.

Consideriamo, lasciando a priori imprecisato l'insieme I , la frase « scelgo un elemento di I »; e distinguiamo due casi:

1° caso) I sia un *insieme dotato di struttura con gruppo transitivo*; cioè due elementi non possano in alcun caso venir distinti tra loro (per mezzo di dati della struttura),

2° caso) I sia un *insieme dotato di struttura con gruppo intransitivo*, cioè I si ripartisca in almeno due classi di transitività.

A seconda che si verifichi l'uno o l'altro dei due casi, la scelta di un elemento si dirà *del 1° tipo* (od *ammissibile* ⁽³²⁾) oppure *del 2° tipo* (od *inammissibile*). Una scelta del 1° tipo non è suscettibile di alcuna maggiore determinazione nei riguardi della struttura, poichè non è possibile assoggettare ad ulteriore condizione l'elemento che s'intende di scegliere. Non altrettanto avviene nell'altro caso.

Ad esempio, se I è un insieme numerabile dotato della (sola) struttura d'ordine degli interni relativi, alla frase « scelgo un elemento di I » deve riconoscersi un significato univoco nei riguardi della struttura; la domanda « quale elemento è stato scelto? » è priva di significato nei riguardi della Teoria; l'aver scelto un elemento di I (e, per es., l'averlo denominato « zero ») può considerarsi come un affinamento della struttura preesistente su I , il quale porta alla struttura discreta (che è quella degli interni relativi). Altri esempi di scelta del 1° tipo sono forniti dalle frasi d'uso comune: « scelgo una retta del piano proiettivo (e la dico retta all'infinito) », « scelgo un punto del piano euclideo (e lo dico origine) », « scelgo una delle due radici quadrate di

(32) Non è che coll'usare questa parola s'intenda senz'altro *ammettere* un tipo di scelta e non l'altro. Comunque, ove non si sia disposti ad ammettere la scelta del 1° tipo occorre rinunciare ad un modo di procedere che è ormai classico, come si vede dagli esempi addotti.

— 1 e la dico i ». Come già detto, nessuna ulteriore precisazione può chiedersi circa gli elementi; domande come « quale retta si è assunta come retta all'infinito? », « quale delle due radici quadrate di -1 s'è detta i ? » sono prive di significato.

Una scelta del 2° tipo è ad es. quella indicata dalla frase « scelgo un elemento del gruppo Γ e lo dico σ »; essa non può considerarsi sufficientemente determinata, in quanto una domanda come « σ è o non è l'unità del gruppo Γ ? » ha senso e rimane indecisa; non potrà ritenersi « indifferente » quale sia l'elemento scelto, in quanto un'affermazione che si potrà fare per una scelta non la si potrà fare per un'altra.

51. - La distinzione esposta si riferisce alla frase citata. È naturale che essa possa estendersi; così ad es. una scelta sarà da dirsi *ammissibile* quando sia specificato a quale classe di transitività s'intenda appartenente l'elemento scelto (e infatti, una tale scelta non sarà suscettibile di maggior determinazione). E ancora, analogamente si distinguerà per il caso relativo alla scelta di m elementi (più precisamente: di un sottoinsieme di I avente potenza m), o a casi ancor più generali come quello di m elementi *scelti in un certo ordine*.

52. - Ci limitiamo a qualche esempio; gli ultimi due che si daranno si riferiscono al caso controverso delle *infinite scelte*.

Se I è l' S_n proiettivo (reale), scelte ammissibili sono ad es. « scelgo due punti di I », « scelgo una terna di punti (distinti) allineati », « scelgo una $(n+1)$ — *pla* di punti indipendenti », « scelgo una metrica per S_n » ecc.; scelte *inammissibili* sono ad es. « scelgo una *coppia* di punti », « scelgo $n+1$ punti di S_n », ecc.

Se I è un insieme numerabile dotato della (sola) struttura d'ordine totale dei numeri razionali, la frase « scelgo un sottoinsieme di I avente potenza m » rappresenta una scelta ammissibile se e solo se m è finito. Se I si pensa invece dotato della struttura del *corpo* razionale, la scelta detta è in ogni caso *inammissibile*.

Nel piano topologico la « scelta di una successione di punti a due a due distinti e «tendenti all' ∞ , » è *ammissibile*, in quanto si può provare che se π e π' sono due piani topologici, comunque si assegnino su essi rispettivamente due successioni nelle condizioni dette ($P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ risp. $P'_1, P'_2, \dots, P'_n, \dots$), esiste un isomorfismo ⁽³³⁾ fra i due piani nel quale a P_n corrisponde P'_n . Sulla retta topologica invece la frase citata rappresenta una scelta *inammissibile*.

Il campo reale si consideri ripartito in classi, dicendo appartenenti alla medesima classe due numeri se e solo se la loro differenza è un numero razionale. La frase « scelgo un numero da ciascuna di queste classi » rappresenta una scelta *inammissibile*, in quanto una domanda come « il numero 6 appartiene o no all'insieme scelto? » ha senso e non trova risposta.

A P P E N D I C E .

Rilevo che l'affermare che « la retta topologica » oppure la « retta euclidea » siano *insiemi ordinati* è una tradizionale inesattezza. Infatti l'ammettere *ordinato* l'insieme dei punti della retta equivale all'aver fissato su di essa un'orientazione, ossia a considerare la « retta topologica orientata » risp. la « retta euclidea orientata » e queste hanno strutture essenzialmente più fini delle precedenti; ad es. la retta euclidea ammette come automorfismo una simmetria rispetto ad un punto.

Una struttura come quella della « retta topologica » o della « retta euclidea » è individuata assegnando due criteri d'ordine opposti senza distinguerne uno. Un insieme dotato di tale struttura potrà dirsi *semiordinato*; un esempio oltre ai citati ne è l'insieme degli interi relativi dotato della sola struttura additiva (la quale non basta a caratterizzare i « numeri positivi »).

Analogha distinzione s'impone per il caso dell'ordine-circolare.

(33) In questo senso si suol dire anche « omeomorfismo ».