

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

**Una condizione di allineamento per gli insiemi
finiti di punti del piano euclideo**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 18 (1949), p. 258-261

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__258_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

UNA CONDIZIONE DI ALLINEAMENTO PER GLI INSIEMI FINITI DI PUNTI DEL PIANO EUCLIDEO

Nota () di* GIORGIO TREVISAN *(a Padova).*

In questa Nota si indaga se sul piano euclideo reale esistano configurazioni di punti analoghe a quella classica realizzata sul piano euclideo complesso dai nove punti di flesso di una cubica.

La risposta è negativa e più precisamente si ha il

TEOREMA: *Se I è un insieme di un numero finito di punti del piano euclideo reale S , tale che ogni retta congiungente due punti di I ne contenga un terzo, allora I giace su di una retta.*

Per comodità si premette una definizione.

Detti x, y, z i lati ed X, Y, Z i vertici ordinatamente opposti a tali lati, di un triangolo T di S , una retta di S si dirà una trasversale di T relativa al lato z se non contiene punti interni a z , non contiene nè x nè y e se non è vuota la sua intersezione con l'insieme $T - z$.

Ed ora ecco la linea direttiva della dimostrazione.

Ragionando per assurdo, si supponga che l'insieme I verifichi le ipotesi del teorema e che non sia situato su di una retta; allora nel n. 1 si vedrà, che esiste un triangolo T di S per cui sono valide le condizioni:

- a) i vertici X, Y, Z di T appartengono ad I ,
- b) $T - z$ contiene almeno un altro punto di I diverso da Z ,
- c) ogni trasversale di T relativa al lato z non contiene punti di I esterni a T ;

(*) Pervenuta in Redazione il 30 Aprile 1949.

nel n. 2 si dimostrerà che ogni triangolo T di S verificante le $a)$, $b)$, $c)$ contiene un altro triangolo, distinto da T , che verifica ancora le $a)$, $b)$, $c)$; dopo di che l'assurdo sarà evidente, perchè I per ipotesi contiene un numero finito di punti.

1. - Poichè I non giace tutto su di una retta, il minimo poligono convesso π che contiene I non è degenero.

I vertici di π sono punti di I .

Si considerino tre vertici X, Y, Z di π consecutivi in un certo senso sul contorno di π .

Sia T il triangolo dei vertici X, Y, Z e siano x, y, z i lati rispettivamente opposti a tali vertici.

È agevole vedere che T verifica le $a)$, $b)$, $c)$.

Per la $b)$ si osservi che essa è verificata in quanto π è il minimo poligono convesso contenente I e la congiungente due punti di I ne contiene un terzo, da cui segue che ad esempio il lato x contiene un punto di I interno.

2. - Sia dunque T un triangolo di S verificante le $a)$, $b)$, $c)$.

Si distinguono 3 casi :

1) i lati x ed y contengono ambedue punti di I diversi dai loro estremi ;

2) il lato x contiene punti di I diversi dai suoi estremi mentre $y \cdot I = X + Z$;

3) $x \cdot I = Y + Z$, $y \cdot I = X + Z$.

Detti x_1 e z_1 rispettivamente i segmenti di estremi A_x e Z , X e A_x , il triangolo T_1 di vertici X, Z, A_x verifica le $a)$, $b)$, $c)$ purchè in esse si ponga $Y = A_x$, $x = x_1$, $z = z_1$, $T = T_1$.

La condizione $a)$ è ovvia ; la $b)$ consegue dal fatto che per la 1) y contiene punti di I diversi dagli estremi ; la $c)$ è vera in quanto ogni trasversale di T_1 relativa al lato x , è una trasversale di T relativa al lato x .

Nel caso 2), mantenute le notazioni precedenti, si osservi che il triangolo T_1 verifica ancora le $a)$ e $c)$.

Se T_1 verifica anche la $b)$ l'assunto è dimostrato, altrimenti detto x_2 il lato di estremi Y ed A_x , il triangolo T_2 di vertici

X, A_x, Y verifica le $a), b), c)$ quando in esse si ponga $Z = A_x, x = x_2, y = x_1, T = T_2$.

Per la $b)$ basta tener presente che per l'ipotesi fatta su I la retta r congiungente X ed A_x deve contenere almeno un terzo punto di I e che essendo la r una trasversale di T relativa al lato x , tale punto deve appartenere a T_1 quindi a x_1 .

La $c)$ è poi verificata perchè una trasversale di T_2 relativa al lato x è una trasversale di T relativa al lato x che non contiene Z e perchè $T_1 - x_1 - Z$ non contiene punti di I .

Si esamina ora il caso 3).

Sia A_x quel punto interno ad x tale che il triangolo di vertici X, Z, A_x privato del punto Z e del segmento s di estremi X ed A_x non contenga punti di I , mentre s ne contiene almeno due.

In modo analogo si determini il punto A_y interno ad y .

Allora il triangolo Y, A_y, Z non conterrà punti di I se privato di z e del segmento r di estremi Y ed A_y , mentre r conterrà almeno due punti di I . Si ponga $Z_1 = r \cdot s$.

Si devono ora considerare due sottocasi:

3') Z_1 appartiene ad I ;

3'') Z_1 non appartiene ad I .

Se è vera la 3'), indicati con y_1 ed x_1 rispettivamente i segmenti di estremi X e Z_1, Y e Z_1 , il triangolo T_1 di vertici X, Z_1, Y verifica le $a), b), c)$ quando in esse si ponga $Z = Z_1, x = x_1, y = y_1, T = T_1$.

La $b)$ è verificata perchè cade certamente qualche punto di I internamente ad x_1 (ed a y_1) per l'ipotesi che la congiungente due punti di I ne contiene un terzo e per costruzione.

La $c)$ è verificata perchè ogni trasversale di T_1 relativa al lato z è una trasversale di T relativa al lato z tale che la sua intersezione con l'insieme $T - T_1$ non contiene punti di I .

Se è vera la 3''), sia Z_2 il punto di I più prossimo a Z_1 e giacente su s ; Z_2 risulta distinto da X e compreso tra X e Z_1 ed inoltre tra X e Z_2 cadrà almeno un punto di I .

Si consideri la retta passante per Z_2 che incontra r in D per modo che il triangolo di vertici Z_2, Z_1, D non contenga punti di I esterni al lato di estremi Z_2 e D , mentre tale lato contiene punti di I oltre Z_2 .

Ciò è possibile perchè almeno un punto di I è interno a x_1 .

Sia Y_2 il punto di I più prossimo a Z_2 ed interno al segmento di estremi Z_2 e D ; questo punto esiste sempre per il fatto che la congiungente due punti di I ne contiene un terzo e per costruzione.

Se si indicano con x_2, y_2, z_2 , rispettivamente i segmenti di estremi Y_2 e Z_2 , X e Z_2 , X e Y_2 il triangolo T_2 di vertici X, Z_2, Y_2 soddisfa le $a), b), c)$ quando in esse si ponga, $Y = Y_2, Z = Z_2, x = x_2, y = y_2, z = z_2, T = T_2$.

La $b)$ è vera perchè cade qualche punto di I tra X e Z_2 , cioè interno a y_2 .

La $c)$ è vera perchè ogni trasversale di T_2 relativa al lato x_2 è una trasversale di T relativa al lato x che incontra $T - T_2$ in regioni dove si è escluso che cadano punti di I .

Così anche il caso 3) è esaurito e l'assunto è dimostrato.

3. - È immediato corollario del teorema dimostrato il seguente:

Se I è un insieme di un numero finito di punti dell' S_n euclideo, tale che la congiungente due punti di I ne contiene un terzo, allora I è situato su di una retta.

Si ragiona per assurdo. Se i punti di I non sono situati su di una retta ciò significa che esiste un piano α contenente almeno tre punti di I non allineati tra loro; ma l'insieme dei punti di I che giacciono su α verifica le ipotesi del teorema già dimostrato.