RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FEDERICO CAFIERO

Sui problemi ai limiti relativi ad un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine e dipendente da un parametro

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 239-257

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__239_0>

SUI PROBLEMI AI LIMITI RELATIVI AD UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA DEL PRIMO ORDINE E DIPENDENTE DA UN PARAMETRO

Nota (*) *di* FEDERICO CAFIERO (*a Napoli*).

I problemi ai limiti relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, dipendente da un parametro, posti e studiati da K. ZAWISCHA (1) e da S. TAKAHASCHI (2), sono stati recentemente ripresi in esame da G. ZWIRNER (3), che ha dato teoremi di esistenza e di unicità in ipotesi notevolmente più generali di quelle dei citati Autori.

Il problema di K. ZAWISCHA è stato anche oggetto di studio, per la estensione alle equazioni differenziali di ordine superiore al primo e dipendenti da un parametro, in una interessante Memoria dovuta ad E. MAGENES (4).

(*) Pervenuta in Redazione il 4 Aprile 1949.

(1) K. ZAWISCHA, *Ueber die Differentialgleichung $y' = kf(x, y)$ deren Lösungkurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll.* « Monatsh. für Math. und Phys. » 37 (1939), pp. 103-124.

(2) S. TAKAHASCHI, *Die Differentialgleichung $y' = kf(x, y)$.* « Tôhku Math. Journal ». 34 (1931), pp. 249–256.

(3) G. ZWIRNER, *Sull'equazione $y' = \lambda f(x, y)$.* « Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova ». Vol. XV (1946), pp. 33–39. *Alcuni teoremi sulle equazioni differenziali dipendenti da un parametro.* « CEDAM » Padova 1947. *Un criterio di esistenza e di unicità per gli integrali dell' equazione $y' = \lambda f(x, y)$ passanti per due punti assegnati.* « Bollettino dell' Unione Matematica Italiana ». Serie III, Anno III (1948), N. 1, pp. 15–18.

(4) E. MAGENES, *Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.* « Annali di Matematica Pura ed Applicata ». Serie IV, tomo XXVII (1948), pp. 39-74.

Su tale questione, notevole è anche il contributo apportato da una osservazione dovuta a G. STAMPACCHIA (5).

In questa Nota mi occupo ancora dei suddetti problemi ai limiti, relativi ad un'equazione differenziale del primo ordine e dipendente da un parametro, per fare osservare come si possa pervenire ai teoremi di esistenza mediante un semplice ragionamento per assurdo che sfrutta la semicontinuità, rispetto al parametro, dell'integrale superiore ed inferiore dell'equazione differenziale in esame, e per studiare il seguente nuovo problema:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} & y'_\lambda(x) = f(x, y_\lambda(x), \lambda) \\ & y_\lambda(x_1) = \varphi(\lambda), \ \psi(y_\lambda(x_2), \lambda) = 0 \end{aligned}$$

nelle incognite λ e $y_\lambda(x)$.

Il problema (I) contiene sia quello di K. ZAWISCHA, che quello di S. TAKAHASCHI.

Infatti, nel problema (I) si particolarizzino $\varphi(\lambda)$ e $\psi(y, \lambda)$ ponendo:

$$\varphi(\lambda) = y_1, \quad \psi(y, \lambda) = y - y_2 .$$

Il nostro problema consiste allora nel determinare un valore di λ in modo tale che l'equazione $y' = f(x, y, \lambda)$ ammetta un integrale passante per i punti (x_1, y_1) ed (x_2, y_2). È questo il problema di K. ZAWISCHA.

Nel problema (I) si particolarizzino $\varphi(\lambda)$ e $\psi(y, \lambda)$ ponendo:

$$\varphi(\lambda) = y_1, \quad \psi(y, \lambda) = f(x_2, y, \lambda) - K$$

dove K è una costante assegnata.

Il nostro problema consiste allora nel determinare un valore di λ in modo tale che l'equazione $y' = f(x, y, \lambda)$ ammetta un

(5) G. STAMPACCHIA, *Un'osservazione sui problemi di valori al contorno per l'equazione* $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. In corso di stampa sul « Bollettino della Unione Matematica Italiana ».

integrale passante per il punto (x_1, y_1) ed avente in x_2 un'assegnata derivata K [6]. È questo il problema di S. TAKAHASCHI.

Analogamente, lasciando invariata nel problema (I) la prima condizione e ponendo:

$$\psi(y, \lambda) = y - \chi(\lambda),$$

si ottiene un problema di ZAWISCHA generalizzato [punti $(x_1, \varphi(\lambda))$ e $(x_2, \chi(\lambda))$ variabili con λ], già esaminato [7].

Per lo studio del problema (I) mi metto dapprima, per semplicità, nell'ipotesi che $f(x, y, \lambda)$ sia definita in uno strato.

I teoremi di esistenza nel caso che (x, y) vari in un dominio normale rispetto ad y si possono dedurre con ormai noti procedimenti da quelli stabiliti nel caso che (x, y) vari in una striscia. Mi limito perciò a segnalarne soltanto qualcuno.

Enuncio infine, omettendone per brevità la dimostrazione, alcuni teoremi di unicità relativi al problema in esame.

1. - Premettiamo il seguente teorema, essenziale per la nostra dimostrazione del teorema di esistenza relativo al problema (I).

Sia $f(x, y, \lambda)$ definita nello strato:

$$S:\ x_1 \leq x \leq x_2, \quad -\infty < y < +\infty, \quad \alpha < \lambda < \beta,$$

ivi misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad (y, λ). Soddisfi inoltre in S alla limitazione:

$$|f(x, y, \lambda)| \leq q(x, \lambda),$$

con $q(x, \lambda)$ non negativa e sommabile (secondo Lebesgue)

(6) Se le soluzioni dell'equazione $y' = f(x, y, \lambda)$ sono intese nel senso di CARATHÉODORY, si suppone che la $f(x, y, \lambda)$ soddisfi a condizioni che ne assicurano la derivabilità in x_2. È appena il caso d'avvertire che, a tale scopo, basta supporre $f(x, y, \lambda)$ continua per ogni λ nei punti (x_2, y).

(7) F. CAFIERO, *Su un problema ai limiti relativo all'equazione* $(y' = f(x, y, \lambda))$. « Giornale di Matematiche » di Rattaglini, serie 4, vol. 77 (1947), pp. 145–163.

rispetto ad x in $I: x_1 \leq x \leq x_2$ e monotona rispetto a λ per $\alpha < \lambda < \beta$.

Allora l'integrale superiore (inferiore) ([8]) *dell'equazione integrale in y:*

$$\text{(a)} \qquad y = \varphi(\lambda) - \int_{x_0}^{x} f(t, y, \lambda)\, dt \qquad x_1 \leq x_0 \leq x_2 ,$$

con $\varphi(\lambda)$ continua per $\alpha < \lambda < \beta$, è semicontinuo superiormente (inferiormente) rispetto a λ.

In altri termini, detti $G_0(x, \lambda)$ e $g_0(x, \lambda)$ rispettivamente l'integrale superiore ed inferiore dell'equazione (a), per ogni valore λ_0 di λ, fissato un $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero positivo K in modo tale che risulti:

$$\text{(2)} \qquad g_0(x, \lambda_0) - \varepsilon < g_0(x, \lambda) \leq G_0(x, \lambda) < G_0(x, \lambda_0) + \varepsilon$$

per $|\lambda - \lambda_0| \leq K$ e per $x_1 \leq x \leq x_2$.

La dimostrazione del teorema enunciato, noto ([9]) nell'ipotesi che $f(x, y, \lambda)$ sia continua, si consegue agevolmente con un ragionamento per assurdo ([10]).

([8]) Nelle ipotesi del teorema enunciato tali integrali esistono e sono definiti in tutto I. Cfr. F. Cafiero, *Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine.* « Giornale di Matematiche » di Battaglini, vol. 78 (2° della serie 4ª), fasc. I°, 1948, pp. 10–41.

([9]) E. Pini, *Sulla continuità degli integrali dell'equazione $y' = f(x, y, \gamma)$ rispetto ai valori iniziali.* « Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ». Serie II, vol. LXIII (1930), pp. 531-534. – E. Bajada, *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali.* Nota II. « Rend. Acc. Naz. Linc. », serie 8, vol. III (1947), pp. 265–271.

([10]) Accenniamo qui, per maggior chiarezza, alla dimostrazione seguendo il ragionamento di E. Pini.

A tale scopo neghiamo la semicontinuità superiore di $G_0(x, \lambda)$ rispetto a λ per il valore λ_0 di λ. Esiste allora un $\varepsilon > 0$ in corrispondenza del quale si può determinare una successione $\{\lambda_n\}$ tendente a λ_0 in modo tale che si abbia:

$$(*) \qquad G_0(x, \lambda_n) \geq G_0(x, \lambda_0) + \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

in qualche punto di I.

Le funzioni della successione $\{G_0(x, \lambda_n)\}$, per l'ipotesi fatta sulla

2. – Passiamo ora allo studio del problema in esame. A tale scopo dimostriamo il seguente:

TEOREMA DI ESISTENZA. – *Sia $f(x, y, \lambda)$ misurabile rispetto ad x, continua rispetto ad (y, λ) nello strato S ed ivi soddisfi alla limitazione* (1) (11).

Dette $\varphi(\lambda)$ e $\psi(y, \lambda)$ due funzioni continue rispettivamente per $\alpha < \lambda < \beta$ e per (y, λ) in:

$$S_1: -\infty < y < +\infty\,,\quad \alpha < \lambda < \beta\,,$$

supponiamo che si possano determinare due integrali, $y_{\lambda_1}(x)$ ed $y_{\lambda_2}(x)$, della equazione:

$$\text{(a}'\text{)} \qquad y = \varphi(\lambda) + \int_{x_1}^{x} f(t, y, \lambda)\, dt,$$

relativi rispettivamente ai valori λ_1 e λ_2 di λ, soddisfacenti alle limitazioni:

$$\text{(3)} \qquad \psi(y_{\lambda_1}(x_1), \lambda_1) \leq 0\,,\quad \psi(y_{\lambda_2}(x_2), \lambda_2) \geq 0\,.$$

monotonia di $q(x, \lambda)$ rispetto a λ, sono egualmente continue ed egualmente limitate e quindi da questa se ne può estrarre una, $\{G(x, \lambda_{r_n})\}$ uniformemente convergente verso una funzione $y_{\lambda_0}(x)$ che, com'è immediato verificare, è un integrale della (a) relativo al valore λ_0 di λ. Ciò prova l'assurdo della (*), poichè essendo per ogni x di I e per n maggiore di un certo indice ν:

$$|\, G(x, \lambda_{r_n}) - y_{\lambda_0}(x) \,| < \varepsilon\,,$$

tenuto conto che:

$$G(x, \lambda_0) \geq y_{\lambda_0}(x) \qquad\qquad a \leq x \leq b,$$

risulta a fortiori:

$$G(x, \lambda_{r_n}) - G(x, \lambda_0) < \varepsilon$$

per ogni x di I e per $n > \nu$, contro il supposto.

(11) Salvo esplicito avviso la funzione $q(x, \lambda)$ sarà sempre supposta sommabile rispetto ad x in I e monotona rispetto a λ per $\alpha < \lambda < \beta$.

Esiste allora almeno una soluzione $[\bar{\lambda}, y_{\bar{\lambda}}(x)]$ *del problema* (I) *con* $\bar{\lambda}$ *appartenente all'intervallo* (λ_1, λ_2) *ed* $y_{\bar{\lambda}}(x)$ *assolutamente continua* ([12]).

Supponiamo, per assurdo, che per λ appartenente all'intervallo (λ_1, λ_2) non esista alcuna soluzione assolutamente continua del problema (I).

Allora ogni soluzione $y_\lambda(x)$ dell'equazione (a′) per $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ deve soddisfare ad una delle due seguenti limitazioni:

$$\psi(y_\lambda(x_2), \lambda) > 0\,, \quad \psi(y_\lambda(x_2), \lambda) < 0\,. \tag{4}$$

Naturalmente tutti gli integrali dell'equazione (a′) relativi allo stesso valore di λ $(\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2)$ debbono soddisfare alla medesima limitazione e cioè o tutti alla prima o tutti alla seconda delle (4). Infatti, in caso contrario, per quel valore di λ esisterebbe, contro l'ipotesi, almeno una soluzione assolutamente continua del problema (I) ([13]).

([12]) È appena il caso d'avvertire che $y_{\bar{\lambda}}(x)$ soddisferà quasi ovunque all'equazione $y' = f(x, y, \lambda)$.

([13]) Ed invero, se esistessero due integrali $\overset{(1)}{y}_{\bar{\lambda}}(x)$ ed $\overset{(2)}{y}_{\bar{\lambda}}(x)$ della (a'), relativi al valore $\bar{\lambda}$ di λ, soddisfacenti alle limitazioni:

$$\psi(\overset{(1)}{y}_{\bar{\lambda}}(x_2), \bar{\lambda}) > 0 \quad , \quad \psi(\overset{(2)}{y}_{\bar{\lambda}}(x_2), \bar{\lambda}) < 0\,,$$

supposto, per fissare le idee,

$$\overset{(1)}{y}_{\bar{\lambda}}(x_2) > \overset{(2)}{y}_{\bar{\lambda}}(x_2)\,,$$

a causa della continuità di $\psi(y, \lambda)$ esisterebbe almeno un valore $\bar{y}$ di y soddisfacente alla limitazione:

$$\overset{(2)}{y}_{\bar{\lambda}}(x_2)\,, < \bar{y} < \overset{(1)}{y}_{\bar{\lambda}}(x_2)$$

e tale che:

$$\psi(\bar{y}, \bar{\lambda}) = 0\,.$$

Ma allora il problema (I) ammetterebbe almeno una soluzione $[\bar{\lambda}, y_{\bar{\lambda}}(x)]$

Ciò posto, indichiamo con E l'insieme dei valori di λ appartenenti all'intervallo (λ_1, λ_2) e conducenti ad integrali della (a') soddisfacenti alla prima delle (4). Il complementare $\overline{E}$ di E su (λ_1, λ_2) è allora l'insieme dei valori di λ appartenenti all'intervallo (λ_1, λ_2) e conducenti ad integrali della (a') soddisfacenti alla seconda delle (4).

Per la (3) nessuno di tali insiemi è vuoto, ma allora si perviene subito ad un assurdo poichè gli insiemi E ed $\overline{E}$, come andiamo a dimostrare, sono entrambi chiusi.

Sia infatti λ_0 un punto di accumulazione di E e supponiamo che non appartenga ad E. Tale valore λ_0 di λ appartiene allora ad $\overline{E}$ e quindi ogni integrale della (a') relativo al valore λ_0 di λ deve soddisfare alla seconda delle (4).

In altri termini, detti $G_1(x, \lambda_0)$ e $g_1(x, \lambda_0)$ rispettivamente l'integrale superiore ed inferiore della (a') per $\lambda = \lambda_0$, deve risultare:

$$\psi(y, \lambda_0) < 0 \quad \text{per} \quad g_1(x_2, \lambda_0) \leq y \leq G_1(x_2, \lambda_0)$$

e quindi, per la supposta continuità in S_1 di $\psi(y, \lambda)$, anche:

$$\psi(y, \lambda) < 0 \quad \text{per} \quad \left\{ \begin{array}{c} g_1(x_2, \lambda_0) - \delta \leq y \leq G_1(x_2, \lambda_0) + \delta \\ \lambda_0 - \delta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \delta \end{array} \right.$$

dove δ è positivo ed opportunamente piccolo.

Ma quest'ultima limitazione esclude, contro l'ipotesi, che λ_0 sia un punto di accumulazione di E.

Infatti, fissato δ, per la semicontinuità superiore rispetto a λ dell'integrale superiore della (a') e la semicontinuità inferiore

con $y_{\overline{\lambda}}(x)$ assolutamente continua, poichè esisterebbe almeno un integrale della equazione:

$$y = \overline{y} + \int_{x_2}^{x} f(t, y, \overline{\lambda})\, dt$$

assumente in x_1 il valore $\varphi(\overline{\lambda})$.

dell' integrale inferiore, si può determinare un intorno di λ_0, $(\lambda_0 - K, \lambda_0 + K)$, con $K \leq \delta$, in modo tale che risulti:

$$g_1(x, \lambda_0) - \delta < y_\lambda(x) < G_1(x, \lambda_0) + \delta$$

per λ appartenente al detto intorno di λ_0 e per $x_1 \leq x \leq x_2$ (cfr. la (2)).

L' insieme E è quindi chiuso. Poichè in modo analogo si dimostra che anche $\overline{E}$ è chiuso, il teorema enunciato è dimostrato.

3. – L' esistenza di integrali dell' equazione (a′) soddisfacenti alla (3) si può assicurare se, ad esempio, si fanno le seguenti ipotesi:

i) *La funzione* $\psi(y, \lambda)$ *soddisfa alle limitazioni:*

$$\psi(y, \lambda_1) \leq 0 \text{ per } y \leq K_1, \quad \psi(y, \lambda_2) \geq 0 \text{ per } y \geq K_2.$$

ii) *Si possono determinare due funzioni continue in* $I: x_1 \leq x \leq x_2$, $s_1(x)$ *ed* $s_2(x)$, *soddisfacenti alle limitazioni:*

$$s_1(x_1) \geq \varphi(\lambda_1), \quad s_1(x_2) \leq K_1 \tag{5}$$

$$s_1(x) \geq s_1(\xi) + \int_\xi^x f(t, s_1(t), \lambda_1)\, dt \qquad x_1 \leq \xi \leq x \leq x_2 \tag{6}$$

$$s_2(x_1) \leq \varphi(\lambda_2), \quad s_2(x_2) \geq K_2 \tag{5'}$$

$$s_2(x) \leq s_2(\xi) + \int_\xi^x f(t, s_2(t), \lambda_2)\, dt \quad x_1 \leq \xi \leq x \leq x_2. \tag{6'}$$

Infatti por un noto teorema di confronto [14], dalla prima

[14] E. Baiada, *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali.* Nota I. « Rend. Acc. Naz. Lincei », serie 8, vol. III (1947), pp. 258–263.

F. Cafiero, *Su due teoremi di confronto relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine.* « Bollettino della Unione Matematica Italiana », serie III, Anno III (1948), N. 2, pp. 124–128.

delle (5) [(5')] e dalla (6) [(6')] discende che l'integrale inferiore $g_1(x, \lambda_1)$ [superiore $G_1(x, \lambda_2)$] dell'equazione (a') per $\lambda = \lambda_1$ [$\lambda = \lambda_2$] soddisfa alla limitazione:

$$g_1(x, \lambda_1) \leq s_1(x), \quad [G_1(x, \lambda_2) \geq s_2(x)] \quad x_1 \leq x \leq x_2 .$$

Per la seconda delle (5) [(5')] si ha dunque:

$$g_1(x_2, \lambda_1) \leq K_1, \quad [G_1(x_2, \lambda_2) \geq K_2]$$

e per la i) anche:

$$\psi(g_1(x_2, \lambda_1), \lambda_1) \leq 0, \quad [\psi(G_1(x_2, \lambda_2), \lambda_2) \geq 0] .$$

E ciò dimostra quanto asserito (15).

4. – Mettiamo ora in luce alcune semplici condizioni, che si deducono dalle ipotesi i) ed ii), atte ad assicurare anch'esse l'esistenza di integrali della (a') soddisfacenti alle (3).

Condizione I. – *Ferma restando l'ipotesi* i), *si supponga:*

$$f(x, y, \lambda_1) \leq p_1(x), \quad f(x, y, \lambda_2) \geq p_2(x),$$

dove $p_1(x)$ *e* $p_2(x)$ *sono sommabili in* I *e soddisfano alle limitazioni:*

$$\varphi(\lambda_1) + \int_{x_1}^{x_2} p_1(x)\, dx \leq K_1, \quad \varphi(\lambda_2) + \int_{x_1}^{x_2} p_2(x)\, dx \geq K_2 .$$

(15) Alla condizione i) può sostituirsi una delle seguenti:

1) $\psi(y, \lambda_1) \leq 0$ per $y \geq K_1$, $\psi(y, \lambda_2) \geq 0$ per $y \leq K_2$

2) $\psi(y, \lambda_1) \leq 0$ per $y \leq K_1$, $\psi(y, \lambda_2) \geq 0$ per $y \leq K_2$

3) $\psi(y, \lambda_1) \leq 0$ per $y \geq K_1$, $\psi(y, \lambda_2) \geq 0$ per $y \geq K_2$.

Naturalmente, nelle limitazioni delle ii), il verso delle diseguaglianze dovrà essere in corrispondenza opportunamente cambiato.

L'ipotesi ii) è allora certamente verificata. Basta porre:

$$s_1(x) = \varphi(\lambda_1) + \int_{x_1}^{x} p_1(t)\,dt\,, \quad s_2(x) = \varphi(\lambda_2) + \int_{x_1}^{x} p_2(t)\,dt$$

$$x_1 \leq x \leq x_2\,.$$

Condizione II. - *Ferma restando l'ipotesi* i), *si scelga* $\varphi(\lambda)$ *in modo da soddisfare alle limitazioni:*

$$\varphi(\lambda_1) + \int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_1)\,dx \leq K_1\,, \quad \varphi(\lambda_2) - \int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_2)\,dx \geq K_2\,.$$

Anche in questo caso l'ipotesi ii) è verificata. Basta osservare che per la (1) risulta:

$$f(x, y, \lambda_1) \leq q(x, \lambda_1)\,, \quad f(x, y, \lambda_2) \geq -q(x, \lambda_2)$$

e che quindi sono verificate le ipotesi della condizione I ([16]).

Condizione III. - *La funzione* $\psi(x, \lambda)$ *soddisfi alle limitazioni:*

$$\psi(y, \lambda_1) \leq 0\,, \quad \psi(y, \lambda_2) \geq 0 \qquad -\infty < y < +\infty\,.$$

In tale ipotesi ogni integrale della (a') relativo al valore λ_1 [λ_2] di λ soddisfa alla prima [seconda] della (3).

5. - Come abbiamo avvertito nella prefazione, i teoremi di esistenza nel caso che (x, y) vari in un dominio normale rispetto ad y, in particolare in un rettangolo, si possono ottenere, con ormai noti procedimenti, da quelli già stabiliti nel caso che (x, y) vari in una striscia. Ci limiteremo quindi a segnalarne qualcuno.

([16]) Condizioni analoghe alla I e II si ottengono se invece della i) si suppone verificata una delle tre ipotesi enunciate in nota ([15]).

Dimostriamo dapprima il seguente:

Sia $F(x, y, \lambda)$ *definita in*:

$$\Delta : x_1 \leq x \leq x_2 , \quad \omega_1(\lambda) \leq y \leq \omega_2(\lambda) , \quad \alpha < \lambda < \beta ,$$

con $\omega_1(\lambda)$ *ed* $\omega_2(\lambda)$ $[\omega_1(\lambda) < \omega_2(\lambda)]$ *continue per* $\alpha < \lambda < \beta$, *ivi misurabile rispetto ad* x *e continua rispetto ad* (y, λ). *Soddisfi inoltre alla limitazione*:

$$(1') \qquad | F(x, y, \lambda) | \leq q(x, \lambda) ,$$

con $q(x . \lambda)$ *non negativa, sommabile rispetto ad* x *in* I *e monotona rispetto a* λ *per* $\alpha < \lambda < \beta$.

Detta $\psi_1(y, \lambda)$ *una funzione continua in*:

$$\Delta_1 : \omega_1(\lambda) \leq y \leq \omega_2(\lambda) , \quad \alpha < \lambda < \beta ,$$

ed indicata con $\varphi(\lambda)$ *una funzione continua per* $\alpha < \lambda < \beta$ *e tale che*:

$$(7) \qquad \omega_1(\lambda) \leq \varphi(\lambda) \leq \omega_2(\lambda) \qquad \alpha < \lambda < \beta ,$$

supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1) *La funzione* $F(x, \omega_i(\lambda), \lambda)$ $(i = 1, 2)$ *è, per ogni* λ *appartenente all'intervallo* (λ_1, λ_2) $[\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta]$, *quasi ovunque in* $I : x_1 \leq x \leq x_2$ *di segno costante* (17) (*dipendente da* λ *e da* i).

2) *Risulta* (18):

$$(8) \qquad \psi_1(\omega_1(\lambda), \lambda) \leq 0 , \quad \psi(\omega_2(\lambda), \lambda) \geq 0 \qquad (\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2)$$

$$(9) \qquad F(x, y, \lambda_1) \leq p_1(x) , \quad F(x, y, \lambda_2) \geq p_2(x)$$

(17) Più in generale, non negativa o non positiva.

(18) Alle limitazioni (8) si possono sostituire le seguenti:

$$\psi_1(\omega_1(\lambda), \lambda) \geq 0 , \quad \psi_1(\omega_2(\lambda), \lambda) \leq 0 \qquad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2 .$$

dove $p_1(x)$ e $p_2(x)$ sono sommabili in I e tali che:

$$(10) \quad \varphi(\lambda_1) + \int_{x_1}^{x_2} p_1(x)\,dx \leq \omega_1(\lambda_1), \quad \varphi(\lambda_2) + \int_{x_1}^{x_2} p_2(x)\,dx \geq \omega_2(\lambda_2).$$

Allora il problema:

$$(\mathrm{I}') \quad \begin{aligned} & y'_\lambda(x) = F(x, y_\lambda(x), \lambda) \\ & y_\lambda(x_1) = \varphi(\lambda), \ \psi_1(y_\lambda(x_2), \lambda) = 0 \end{aligned}$$

ammette almeno una soluzione $[\bar\lambda, y_{\bar\lambda}(x)]$ con $\bar\lambda$ appartenente all'intervallo (λ_1, λ_2) e $y_\lambda(x)$ assolutamente continua.

Accenniamo alla dimostrazione. A tale scopo introduciamo una funzione ausiliaria $f(x, y, \lambda)$ definita in:

$$S: x_1 \leq x \leq x_2, \ -\infty < y < +\infty, \ \alpha < \lambda < \beta,$$

ivi misurabile rispetto ad x, continua rispetto ad (y, λ) e soddisfacente alle limitazioni (19):

$$(11) \qquad f(x, y, \lambda) = F(x, y, \lambda) \ \text{ per } \ (x, y, \lambda) \subset \Delta$$

$$(1) \qquad |f(x, y, \lambda)| \leq q(x, \lambda) \ \text{ per } \ (x, y, \lambda) \subset S$$

$$(12) \qquad f(x, y, \lambda_1) \leq p_1(x), \ f(x, y, \lambda_2) \geq p_2(x) \qquad (x_1 \leq x \leq x_2, \ -\infty < y < +\infty).$$

Indichiamo poi con $\psi(x, \lambda)$ una funzione continua in:

$$S_1: -\infty < y < +\infty, \ \alpha < \lambda < \beta$$

(19) A ciò basta porre:

$$f(x, y, \lambda) = \begin{cases} F(x, y, \lambda) & \text{per } (x, y, \lambda) \subset \Delta \\ F(x, \omega_1(\lambda), \lambda) & \text{per } y < \omega_1(\lambda) \\ F(x, \omega_2(\lambda), \lambda) & \text{per } y > \omega_2(\lambda) \end{cases}$$

e tale che [20]:

$$\psi(y,\lambda) = \psi_1(y,\lambda) \quad \text{per} \quad (y,\lambda) \subset \Delta_1 \tag{13}$$

$$\psi(y,\lambda) < 0 \ \text{per} \ y < \omega_1(\lambda), \ \psi(y,\lambda) > 0 \ \text{per} \ y > \omega_2(\lambda) \qquad (\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2), \tag{14}$$

Ciò posto, osserviamo che per le (8), (13) e (14) risulta:

$$\psi(y,\lambda_1) \leq 0 \quad \text{per} \quad y \leq \omega_1(\lambda_1), \ \psi(y,\lambda_2) \geq 0 \quad \text{per} \quad y \geq \omega_2(\lambda_2)$$

e che quindi per le (10) e le (12) sono soddisfatte tutte le condizioni che assicurano l'esistenza di almeno una soluzione $[y_{\bar\lambda}(x), \bar\lambda]$ del problema (I) con $\bar\lambda$ appartenente all'intervallo (λ_1, λ_2) ed $y_{\bar\lambda}(x)$ assolutamente continua (cfr. condizione I del N. 4).

Dimostriamo che $[y_{\bar\lambda}(x), \bar\lambda]$ è anche una soluzione del problema (I').

Infatti, essendo $y_{\bar\lambda}(x_1) = \varphi(\bar\lambda)$, per la (7) si ha:

$$\omega_1(\bar\lambda) \leq y_{\bar\lambda}(x_1) \leq \omega_2(\bar\lambda). \tag{15}$$

Inoltre, essendo:

$$\psi(y_{\bar\lambda}(x_1), \bar\lambda) = 0$$

ed appartenendo $\bar\lambda$ all'intervallo (λ_1, λ_2), per la (14) si ha:

$$\omega_1(\bar\lambda) \leq y_{\bar\lambda}(x_2) \leq \omega_2(\bar\lambda). \tag{16}$$

(20) A tale scopo basta ad esempio definire $\psi(y,\lambda)$ nel seguente modo:

$$\psi(y,\lambda) = \begin{cases} \psi_1(y,\lambda) & \text{per} \quad (x,\lambda) \subset \Delta_1 \\ \psi_1(\omega_1(\lambda),\lambda) - (\omega_1(\lambda) - y) & \text{per} \quad y < \omega_1(\lambda) \\ \psi_1(\omega_2(\lambda),\lambda) + (\omega_2(\lambda) - y) & \text{per} \quad y > \omega_2(\lambda) \end{cases}$$

Ma allora per l'ipotesi 1), tenendo conto delle limitazioni (15) e (16), per noti teoremi di confronto [21], si deduce:

$$\omega_1(\bar{\lambda}) \leq y_{\bar{\lambda}}(x) \leq \omega_2(\bar{\lambda})$$

e quindi per le (11) e la (13) $y_{\bar{\lambda}}(x)$ è anche una soluzione del problema (I').

6. - Segnaliamo anche il seguente teorema di esistenza relativo al problema (I').

Sia $F(x, y, \lambda)$ *definita in:*

$$\bar{\Delta}: x_1 \leq x \leq x_2,\ c \leq y \leq d,\ \alpha < \lambda < \beta,$$

ivi misurabile rispetto ad x, *continua rispetto ad* (y, λ) *e soddisfacente alla* (1') *in* $\bar{\Delta}$ *con* $q(x, \lambda)$ *non decrescente rispetto a* λ *e sommabile rispetto ad* x *in* I.

Allora, supposto $\varphi(\lambda)$ *continua per* $\alpha < \lambda < \beta$ *e tale che* [22]:

$$c + \int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_2)\, dx \leq \varphi(\lambda) \leq d - \int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_2)\, dx \tag{17}$$

(21) Cfr. Lavori citati in nota (14). Cfr. anche lavoro citato in nota (7), (p. 146).

(22) Naturalmente si suppone verificata la condizione:

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_2)\, dx \leq \frac{d-c}{2}$$

implicita nella (17).

Avvertiamo poi che $q(x, \lambda)$ si può anche supporre non decrescente; alla (17) bisogna allora sostituire la seguente:

$$c + \int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_1)\, dx \leq \varphi(\lambda) \leq d - \int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_1)\, dx \qquad \left[\int_{x_1}^{x_2} q(x, \lambda_1)\, dx \leq \frac{d-c}{2}\right].$$

e $\psi(y, \lambda)$ *continua in* $\bar{\Delta}_1 : c \leq y \leq d,\ \alpha < \lambda < \beta$ *e tale che*:

$$\psi_1(y, \lambda_1) \leq 0, \quad \psi_1(y, \lambda_2) \geq 0 \qquad \alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta, \tag{18}$$

il problema (I') *ammette almeno una soluzione* $[y_{\bar{\lambda}}(x), \bar{\lambda}]$ *con* $\bar{\lambda}$ *appartenente all' intervallo* (λ_1, λ_2) *ed* $y_{\bar{\lambda}}(x)$ *assolutamente continua.*

Introdotta la funzione ausiliaria $f(x, y, \lambda)$ definita in S, ivi misurabile rispetto ad x, continua rispetto ad (y, λ) e soddisfacente alla (11), per (x, y, λ) in $\bar{\Delta}$, e alla (1), prolunghiamo la definizione di $\psi_1(y, \lambda)$ nella striscia S_1 ponendo:

$$\psi(y, \lambda) = \begin{cases} \psi_1(y, \lambda) & \text{per } (y, \lambda) \subset \bar{\Delta}_1 \\ \psi_1(c, \lambda) & \text{per } \quad y < c \\ \psi_1(d, \lambda) & \text{per } \quad y > d. \end{cases}$$

La $\psi(y, \lambda)$ risulta ovviamente continua in S_1 e per la (18) soddisfa alle limitazioni:

$$\psi(y, \lambda_1) \leq 0, \quad \psi(y, \lambda_2) \geq 0 \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Ciò basta per concludere (cfr. condizione III del N. 4) che il problema (I) ammette almeno una soluzione $[y_{\bar{\lambda}}(x), \bar{\lambda}]$ con $\bar{\lambda}$ appartenente all'intervallo (λ_1, λ_2) e $y_{\bar{\lambda}}(x)$ assolutamente continua.

Dimostriamo che tale soluzione è anche soluzione del problema (I').

Infatti, essendo $q(x, \lambda)$ non decrescente rispetto a λ e risultando $\bar{\lambda} \leq \lambda_2$, si ha:

$$\int_{x_1}^{x} q(t, \bar{\lambda})\, dt \leq \int_{x_1}^{x} q(t, \lambda_2)\, dt$$

e quindi per la (17) anche:

$$\varphi(\bar\lambda) - \int_{x_1}^{x} q(t, \bar\lambda)\, dt \geq c, \; \varphi(\bar\lambda) + \int_{x_1}^{x} q(t, \bar\lambda)\, dt \leq d.$$

Quest'ultima limitazione, per la (1), porta alla conclusione:

$$c \leq y_{\bar\lambda}(x) \leq d,$$

che dimostra quanto asserito.

Osserviamo che alla condizione espressa dalla (18) si può sostituire la seguente:

Risulta:

$$\psi_1(c, \lambda_1) \leq 0, \; \psi_1(d, \lambda_2) \geq 0 \qquad \alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta$$

$$F(x, y, \lambda_1) \leq p_1(x), \; F(x, y, \lambda_2) \geq p_2(x)$$

dove $p_1(x)$ *e* $p_2(x)$ *sono sommabili in* I *e tali che*:

$$\varphi(\lambda_1) + \int_{x_1}^{x_2} p_1(x)\, dx \leq c, \; \varphi(\lambda_2) + \int_{x_1}^{x_2} p_2(x)\, dx \geq d.$$

La dimostrazione si consegue agevolmente ragionando analogamente agli altri casi già esaminati.

7. – Enunciamo ora alcuni teoremi di unicità relativi al problema (I), dei quali per brevità omettiamo la dimostrazione.

Sia $f(x, y, \lambda)$ *definita nello strato* S, *misurabile rispetto ad* x *e, per ogni* λ *interno ad* (α, β), *continua uniformemente rispetto ad* y *in ogni porzione limitata della striscia*:

$$\bar S : x_1 \leq x \leq x_2, \; -\infty < y < +\infty.$$

Soddisfi inoltre alla limitazione:

$$|f(x, y, \lambda)| \leq q(x, \lambda)$$

con $q(x, \lambda)$ *definita in* S_1 *e sommabile rispetto ad* x *in* I.

Supponiamo poi che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1) *Per ogni coppia* $\lambda' < \lambda''$ *di valori di* λ *si può determinare un funzione* $\eta(y) < 0$ $[\eta(y) > 0]$ *in modo tale che:*

$$f(x, y, \lambda') - f(x, y, \lambda'') \leq \eta(y) < 0$$

$$[f(x, y, \lambda') - f(x, y, \lambda'') \geq \eta(y) > 0].$$

2) *La funzione* $\varphi(\lambda)$ *è non decrescente* [*non crescente*] *per* $\alpha < \lambda < \beta$ *e la funzione* $\psi(y, \lambda)$, *definita in* S_1, *è non decrescente* [*non crescente*] *rispetto a* y *e crescente* [*decrescente*] *rispetto a* λ.

Allora non può esistere che un sol valore $\bar{\lambda}$ *di* λ *in corrispondenza del quale il problema (I) ammetta una soluzione* $[\bar{\lambda}, y_{\bar{\lambda}}(x)]$ con $y_{\bar{\lambda}}(x)$ *assolutamente continua in* I (23).

Nelle ipotesi del teorema enunciato, l'eventuale soluzione $[\bar{\lambda}, y_{\bar{\lambda}}(x)]$ è univocamente determinata da $\bar{\lambda}$ se, ad esempio, l'equazione (a′) ammette un'unica soluzione per $\lambda = \bar{\lambda}$. È allora naturale chiedersi se, nelle ipotesi del teorema enunciato, esistano dei valori di λ in corrispondenza dei quali le soluzioni dell'equazione (a′) siano univocamente determinate dal valore iniziale.

Orbene, si dimostra, e qui ci limitiamo ad annunciare il risultato (24), che: *nelle ipotesi del teorema di unicità enun-*

(23) La $\psi(y, \lambda)$ può anche essere supposta crescente (decrescente) rispetto ad y e non decrescente (non crescente) rispetto a λ.

La dimostrazione del teorema enunciato si ottiene ragionando analogamente a quanto abbiamo fatto nella dimostrazione del teorema N) del lavoro citato in nota (7) (pag. 162).

(24) La dimostrazione sarà esposta in un prossimo lavoro.

ciato, gli integrali della equazione (a′) *sono univocamente determinati dal valore iniziale per tutti i valori di* λ *interni ad* (α, β) *escluso al più un numero finito od una infinità numerabile di essi.*

Enunciamo ora un altro teorema di unicità.

Sia $f(x, y, \lambda)$ *definita nello strato* S, *ivi misurabile rispetto ad* x, *continua rispetto ad* y *e soddisfacente alla limitazione*:

$$|f(x, y, \lambda)| \leq q(x, \lambda),$$

con $q(x, \lambda)$ *non negativa e sommabile rispetto ad* x *in* I.

Siano inoltre soddisfatte le seguenti condizioni:

1) *La funzione* $f(x, y, \lambda)$ *è non decrescente rispetto a* λ, *la funzione* $\varphi(\lambda)$ *non decrescente e la funzione* $\psi(y, \lambda)$ *crescente (decrescente) rispetto ad* y *e non decrescente (non crescente) rispetto a* λ.

2) *Le soluzioni delle equazioni*:

$$y = \varphi(\lambda) + \int_{x_1}^{x} f(t, y, \lambda)\, dt, \quad y = y_0 + \int_{x_2}^{x} f(t, y, \lambda)\, dt$$

sono univocamente determinate dai valori iniziali per ogni λ *interno ad* (α, β) *ed ogni* y_0.

Allora non può esistere che una ed una sola funzione assolutamente continua in I *soddisfacente al problema* (*I*). *Tale eventuale soluzione può però corrispondere a più valori di* λ (25).

(25) Nelle ipotesi del teorema enunciato, se esistessero due valori λ' e λ'', di λ conducenti all' unica eventuale soluzione $y(x)$ del problema (I), dovrebbe risultare:

$$f(x, y(x), \lambda') = f(x, y(x), \lambda'') \qquad \lambda' \neq \lambda''$$

quasi ovunque in (x_1, x_2).

Se si esclude che ciò possa avvenire, si ha ovviamente anche l' unicità rispetto a λ per il problema in esame.

La dimostrazione del teorema enunciato si ottiene facilmente seguendo lo stesso tipo di ragionamento fatto a proposito del teorema L) stabilito nel lavoro citato in nota (7) (pag. 161).

Osserviamo che all'ipotesi 1) può sostituirsi la seguente:

1′) *La funzione* $f(x, y, \lambda)$ *è non crescente rispetto a* λ, *la funzione* $\varphi(\lambda)$ *non crescente e la funzione* $\psi(y, \lambda)$ *decrescente (crescente) rispetto ad* y *e non decrescente (non crescente) rispetto a* λ.

Relativamente al secondo teorema di unicità enunciato facciamo ancora la seguente osservazione:

Ferme restando le altre ipotesi, all'ipotesi 1) *si sostituisca una delle seguenti:*

a) *La funzione* $f(x, y, \lambda)$ *è crescente rispetto a* λ, *la funzione* $\varphi(\lambda)$ *non decrescente e la funzione* $\psi(y, \lambda)$ *crescente (decrescente) rispetto ad* y *e non decrescente (non crescente) rispetto a* λ.

b) *La funzione* $f(x, y, \lambda)$ *è non decrescente rispetto a* λ, *la funzione* $\varphi(\lambda)$ *crescente e la funzione* $\psi(y, \lambda)$ *crescente (decrescente) rispetto ad* y *e non decrescente (non crescente) rispetto a* λ.

c) *La funzione* $f(x, y, \lambda)$ *è non decrescente rispetto a* λ, *la funzione* $\varphi(\lambda)$ *non decrescente e la funzione* $\psi(y, \lambda)$ *non decrescente (non crescente) rispetto ad* y *e crescente (decrescente) rispetto a* λ.

Allora il problena (I) non può ammettere che una unica soluzione $[\bar{\lambda}, y_{\bar{\lambda}}(x)]$, *con* $y_{\bar{\lambda}}(x)$ *assolutamente continua.*

Osservazione analoga può farsi se al posto della ipotesi 1) del secondo teorema di unicità enunciato si sostituisce la 1′).