

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO PAGNI

**Su un teorema relativo all'esistenza di soluzioni per  
un sistema di  $n$  equazioni ad  $n$  incognite**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 18 (1949), p. 234-238

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1949\\_\\_18\\_\\_234\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__234_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SU UN TEOREMA RELATIVO ALL' ESISTENZA DI  
SOLUZIONI PER UN SISTEMA DI  $n$  EQUAZIONI  
AD  $n$  INCOGNITE

Nota (\*) di MAURO PAGNI (a Padova).

Nella presente Nota, mi propongo di estendere a certe classi di funzioni (inferiormente) semicontinue il seguente noto teorema:

*Se le funzioni reali di variabili reali  $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$  sono continue nel cubo  $C: 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$  e se inoltre  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  è negativa sulla faccia di  $C$  contenuta sull'iperpiano  $x_i = 0$  e positiva su quella contenuta sull'iperpiano  $x_i = 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) esiste almeno un punto interno a  $C$  in cui le  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  sono simultaneamente nulle (1).*

Prima di enunciare le proposizioni che intendiamo dare, è opportuno premettere alcune definizioni. Diremo che una funzione reale univoca  $f(x)$  della variabile reale  $x$ , limitata (per semplicità) ed inferiormente semicontinua nell'intervallo  $(a, b)$  è ivi inferiormente semicontinua in senso stretto se per ogni  $\xi$  di  $(a, b)$  risulta

$$f(\xi) = \min_{x \rightarrow \xi} \lim f(x) \quad (x \neq \xi, a \leq x \leq b).$$

Sia  $f(x_1, \dots, x_n)$  una funzione limitata ed univoca, definita in un intervallo  $n$  — dimensionale  $J$  dell' $S_n$  a faccia  $(n - 1)$  di-

(\*) Pervenuta in Redazione il 29 Marzo 1949.

(1) Per una bibliografia sull'argomento rimando a: G. SCORZA DRAGONI - *Sull'esistenza di soluzioni per un sistema di  $n$  equazioni in  $n$  incognite*. [Pontificia Academia Scientiarum - Acta, Vol. X, pp. 127-134, (1946)]. Si veda anche M. GOLOMB: *Zur Theorie der nichilinearen Integralgleichung ecc.* [Math. Zeitschrift. Bd. 39 (1935) pp. 45-75], pag. 55.

mensionali perpendicolari agli assi coordinati, diremo che  $f(x_1, \dots, x_n)$  è *inferiormente e linearmente semicontinua in senso stretto in  $J$* , se essa subordina funzioni inferiormente semicontinue in senso stretto su ogni segmento contenuto in  $J$ , in particolare se  $P$  è un punto di  $J$ , lo  $f$  subordina allora una funzione semicontinua in senso stretto anche in  $P$  su ogni segmento contenuto in  $J$  ed avente in  $P$  un estremo (2).

Una funzione  $f(x_1, \dots, x_n)$  inferiormente semicontinua in  $J$ , sarà detta *inferiormente semicontinua in senso forte in  $J$* , se per ogni fissato punto  $P$  di  $J$ , presi due numeri positivi  $\epsilon, \rho$  è possibile determinare una ipersfera (ad  $n -$  dimensioni) di centro  $P$  e raggio  $r < \rho$  sulla frontiera della quale risulti  $f(x_1, \dots, x_n) < f(P) + \epsilon$ .

Ciò posto ecco le proposizioni che dimostreremo:

I) *Se le funzioni  $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$  sono inferiormente e linearmente semicontinue in senso stretto sul cubo  $C: 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$  e se inoltre  $f_i(x_1, \dots, x_n)$  è negativa sulla faccia  $s_i$  di  $C$  contenuta sull'iperpiano  $x_i = 0$  e positiva su quella  $S_i$  contenuta sull'iperpiano  $x_i = 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) esiste almeno un punto  $C$  che è di accumulazione sia di zeri di  $f_1$ , che di zeri di  $f_2, \dots$ , che di zeri di  $f_n$ ;*

e:

II) *Se le funzioni  $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)$  sono inferiormente semicontinue in senso forte sul cubo  $C: 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$ , e se inoltre  $f_i$  è negativa sulla faccia  $s_i$ , e positiva sulla faccia  $S_i$ , esiste almeno un punto interno di  $C$  in cui le  $f_i$  sono simultaneamente nulle.*

1. - **Dimostrazione della I).** - Per dimostrare la I) ci serviremo del seguente corollario di un teorema di SPERNER (3).

*Se  $E_1, \dots, E_n$  sono  $n$  porzioni chiuse del cubo  $C: 0 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tali che i punti della faccia  $s_i$  di  $C$*

(2) La definizione di queste funzioni è stata tratta da: G. SCORZA DRAGONI « Su una questione di topologia » in corso di stampa sul Giornale di Battaglini.

(3) Cfr. loc. cit. in (1), pag. 130.

siano tutti esterni ad  $E_i$ , mentre invece siano interni ad  $E_i$ , rispetto a  $C$  <sup>(4)</sup>, tutti i punti della faccia  $S_i$ , esiste un punto interno a  $C$  che appartiene sia alla frontiera di  $E_1$ , che a quella di  $E_2, \dots$ , che a quella di  $E_n$ .

Consideriamo un cubo  $\overline{C}$  ad  $n$  dimensioni di lato  $1 + 2\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) contenente  $C$ , di centro coincidente con quello di  $C$  e con faccie parallele a quelle di  $C$ . Siano  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$  ( $i = 1, \dots, n$ )  $n$  funzioni che così definiamo in  $\overline{C}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_n) &= f_i(\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ se } (\xi_1, \dots, \xi_n) \subset C \\ \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) &= f_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) \text{ se } (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) \subset C, \text{ ed } \xi_n < 0 \\ \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) &= f_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1) \text{ se } (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 1) \subset C \text{ ed } \xi_n > 1 \\ \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n) &= \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, 0, \xi_n) \text{ se } (\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, 0, 0) \subset C, \xi_{n-1} < 0, \xi_n \text{ qual.} \\ \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n) &= \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, 1, \xi_n) \text{ se } (\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, 1, 1) \subset C, \xi_{n-1} > 1, \xi_n \text{ qual.} \\ &\dots \\ \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \varphi_i(0, \xi_2, \dots, \xi_n) \text{ se } \xi_1 < 0; \xi_2; \xi_3; \dots; \xi_n \text{ qualunque} \\ \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \varphi_i(1, \xi_2, \dots, \xi_n) \text{ se } \xi_1 > 1; \xi_2; \xi_3; \dots; \xi_n \text{ qualunque.} \end{aligned}$$

Le  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$  così definite risultano inferiormente e linearmente semicontinue in senso stretto in  $\overline{C}$  e si comportano sulle faccie di  $\overline{C}$  (rispetto ai segni) nello stesso modo che le  $f_i$  sulle corrispondenti faccie di  $C$ .

Sia  $\overline{E}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) l'involucro chiuso dell'insieme dei punti di  $\overline{C}$  che possono essere congiunti col punto  $1 + \sigma$  dell'asse  $x_i$ , mediante una spezzata (contenuta in  $\overline{C}$ ) sulla quale la  $\varphi_i$  si mantenga positiva o nulla. Da quanto abbiamo supposto sulle  $\varphi_i$ , segue che gli insiemi  $\overline{E}_i$  soddisfano alle ipotesi del lemma sopracitato. Esiste quindi un punto  $H$  interno a  $\overline{C}$  e comune a tutte le frontiere di  $\overline{E}_1, \dots, \overline{E}_n$ .

(4) Un punto  $R$  di  $E_i$  è interno ad  $E_i$  rispetto a  $c$ , se appartengono ad  $E_i$  tutti i punti di  $C$  sufficientemente prossimi ad  $R$ .

Occorrerà ora provare che il punto  $H$  appartiene a  $C$  ed è di accumulazione per zeri di  $f_i$ . Osserviamo subito che se riusciremo a provare che il punto  $H$  è di accumulazione per zeri sia di  $\varphi_1$ , sia di  $\varphi_2, \dots$ , sia di  $\varphi_n$ , avremo provato che il punto  $H$  appartiene a  $C$  (al più potrà cadere sul contorno di  $C$ ) e che è di accumulazione per zeri sia di  $f_1$ , che di  $f_2, \dots$ , che di  $f_n$ .

Il punto  $H$  (appartenendo alla frontiera di  $\overline{E_i}$ ) deve essere di accumulazione sia per punti  $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$  in cui  $\varphi_i(X) < 0$  sia per punti  $X$  in cui  $\varphi_i(X) \geq 0$ , segue allora che od  $H$  è di accumulazione di zeri di  $\varphi_i$ , od esistono comunque vicini ad  $H$  due punti distinti  $A$  e  $B$  tali che  $\varphi_i(A) < 0$ ,  $\varphi_i(B) > 0$ .

Questa ultima circostanza ci assicura che sul segmento  $\overline{AB}$  vi è almeno un punto  $M$  in cui  $\varphi_i(M) = 0$  <sup>(5)</sup>. Resta così provato che  $H$  è di accumulazione per zeri di  $\varphi_i$  e quindi la proposizione I).

**2. - Dimostrazione della II).** - Osserviamo intanto che se una funzione  $f(x_1, \dots, x_n)$  è inferiormente semicontinua in senso forte in  $J$  è ivi inferiormente e linearmente semicontinua in senso stretto. Consideriamo un punto  $P$  di  $J$  ed un segmento  $\tau$  contenuto in  $J$  avente un estremo in  $P$  e denotiamo con  $l$  il minimo limite per  $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$  tendente a  $P$  lungo  $\tau$  ( $P$  escluso) di  $f(X)$ . È facile provare che  $l = f(P)$ . Infatti  $l < f(P)$  è in contrasto colla semicontinuità inferiore della  $f(x_1, \dots, x_n)$ ;  $l > f(P)$  comporterebbe, scelta  $\varepsilon > 0$ , l'esistenza di un intorno di  $P$  su  $\tau$ , in tutti i punti  $X$  del quale  $f(X) > l - \varepsilon$  e ciò in contrasto colla inferiore semicontinuità in senso forte della  $f$ . Ciò posto dando ai simboli il significato che avevano nella dimostrazione precedente, perveniamo all'esistenza di un punto  $H$  comune a tutte le frontiere  $\overline{E_i}$ .

Mostriamo, ora che  $f_i(H) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

La semicontinuità inferiore della  $f_i$  e la natura di  $H$  ci permettono di escludere che sia  $f_i(H) > 0$ . D'altra parte

<sup>(5)</sup> Questo per un teorema analogo a quello degli zeri delle funzioni continue, teorema che trovasi loc. cit. in <sup>(2)</sup>, n. 2.

$f_i(H) < 0$  unitamente alla semicontinuità inferiore in senso forte della  $f_i$  porta all'esistenza di una ipersfera di centro  $H$  sulla frontiera della quale  $f_i < 0$ , e ciò in contrasto con l'appartenere di  $H$  alla frontiera di  $\overline{E_i}$  (le spezzate precedentemente costruite disterebbero da  $H$  per almeno la lunghezza del raggio dell'ipersfera. È quindi  $f_i(H) = 0$ . Si osservi che dovendo essere  $f_i(H) = 0$  ( $i, 1, \dots, n$ ) il punto  $H$  è all'interno di  $C$ .

La II) è ora completamente provata.

3. - **Osservazione.** - Date le funzioni  $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)$  inferiormente semicontinue in senso forte nel cubo  $C: 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$  le formule  $x'_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x'_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$  si possono interpretare come formule di una trasformazione univoca  $t$ , che diremo trasformazione inferiormente semicontinua in senso forte, del cubo  $C$  dell' $S_n$  in un insieme  $t(C)$  dello stesso  $S_n$ . Sotto questo aspetto la proposizione II) è atta ad assicurare l'esistenza di almeno un punto unito in una trasformazione (univoca ed inferiormente semicontinua in senso forte) che porti il contorno di  $C$  in una porzione interna a  $C$ ; estendendo alle trasformazioni  $t$  suddette un noto risultato per le trasformazioni continue (6).

(6) Si osservi che sono stati dati teoremi di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivoche semicontinue, che però nel caso dell'univocità si riducono a trasformazioni continue; si veda per es.:

SAMUEL EILENBERG and DEANE MONTGOMERY - *Fixed point theorems for multi-valued transformations.* - American Journal of Mathematics, vol. 68 (1946), pp. 214-222;

S. KAKUTAMI - *A generalizations of Brouwer's fixed point theorem.* - Duke Mathematical Journal, vol. 8 (1941), pp. 457-459.

O. H. HAMILTON - *A fixed point theorem for upper semi-continuous transformations on  $n$  - celles for wich the images of points are non - a cyclic continua.* - Duke Mathematical Journal - 14 - (1947), pp. 689-693.