

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TREVISAN

Su una questione di topologia

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 18 (1949), p. 231-233

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__231_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UNA QUESTIONE DI TOPOLOGIA

Nota () di* GIORGIO TREVISAN *(a Padova).*

In questa Nota è esposta una dimostrazione semplice di un teorema che è stato recentemente dato da SCORZA DRAGONI (1).

Nel seguito si indicherà con J_n ($n \geq 2$) l'insieme:

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

con J_{n-1} l'insieme:

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad x_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

con $r_{i,P}$ la parallela all'asse x_i ($i \neq n$), passante per il punto P , con n_P la normale condotta da P ($P \in J_n$) a J_{n-1} .

Un insieme I di punti di J_n , chiuso, si dirà che verifica la proprietà α) se:

1) detto Q un punto generico di J_{n-1} , n_Q contiene almeno un punto di I ;

2) scelto $\epsilon > 0$ e scelta una porzione I' di $n_Q \cdot I$, chiusa e non vuota e tale che sia chiuso l'insieme $n_Q \cdot I - I'$, esistono da una parte e dall'altra di Q sulla $r_{i,Q}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) punti P_i , le cui rispettive n_{P_i} contengono punti di I distanti da I' meno di ϵ .

Vale allora il

(*) Pervenuta in Redazione il 21 Marzo 1949.

(1) GIUSEPPE SCORZA DRAGONI: *Su una questione di topologia*. [In corso di stampa nel «Giornale di Matematiche di Battaglini», n. 3]. Anche l'altro teorema dato nel n. 4 di questo lavoro si può probabilmente dimostrare con considerazioni analoghe a quelle di cui qui si fa uso, ma non se ne vedono vantaggi di semplicità.

TEOREMA : Se un insieme I verifica la proprietà α), ogni curva continua

$$x_i = x_i(t) \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

per la quale si abbia

$$x_n(t_0) = 0 \quad , \quad x_n(t_1) = 1$$

ha almeno un punto comune con I ⁽²⁾.

Una curva del tipo definito nel teorema si dirà una curva γ .

Ora poichè I è chiuso, si potrà senza ledere la generalità supporre γ una spezzata formata con un numero finito di lati paralleli agli assi coordinati.

Si potrà ancora supporre che γ sia non intrecciata ed avente un solo punto P_0 per cui $x_n = 0$ ed un solo punto P_m per cui $x_n = 1$.

Se γ è formato di un unico lato il teorema è vero per la 1); si supponga il teorema vero per ogni spezzata γ , con un numero di lati minore od uguale ad $m - 1$, basterà far vedere che allora il teorema è vero anche se γ ha m lati.

Ragionando ora per assurdo si supponga che la γ sia una spezzata di m lati che non incontri I .

Il lato l_1 di γ che contiene P_0 apparterrà alla n_{P_0} , sia P_1 l'altro estremo di l_1 e sia l_2 il lato di γ di estremi P_1 e P_2 ; l_2 risulterà parallelo ad un asse x_i e sarà $i \neq n$.

Si indichi con P'_2 il punto comune alle rette n_{P_2} e r_{i,P_0} .

Il segmento σ di estremi P_2 e P'_2 non contiene punti di I .

Infatti se ciò non fosse, dato che l_1 non contiene punti di I , esisterebbe un punto $\overline{P_0}$ (coincidente eventualmente con P'_2 , ma diverso sempre da P_0) del segmento di estremi P_0 e P'_2 , tale da essere il primo punto, nel verso da P_0 a P'_2 , per cui

(2) Le ipotesi di continuità imposte sono più ampie di quelle richieste nel lavoro citato in (1).

il segmento τ di estremi \overline{P}_0 e \overline{P} , con $\overline{P} = n_{\overline{P}_0} \cdot r_{t, P_1}$, contiene punti di I .

Ma poichè \overline{P} non appartiene ad I in quanto punto di γ , l'insieme non vuoto $\tau \cdot I$ sarebbe del tipo I' di cui si parla in 2) e non risulterebbe verificata la proprietà di continuità ammessa invece per ipotesi.

Si percorra σ da P'_2 a P_2 fino ad incontrare il primo punto P''_2 di γ .

P''_2 divide γ in due parti, una γ_1 di estremi P_0 e P''_2 che contiene al completo l_1 ed l_2 e l'altra γ_2 di estremi P''_2 e P_m che contiene al più $m - 2$ lati.

La curva $\gamma_2 \dot{+} \sigma$ è dunque una spezzata del tipo di γ , ma con al più $m - 1$ lati; inoltre $\gamma_2 \dot{+} \sigma$ non incontra I ; e ciò è assurdo, per l'ipotesi alla base del procedimento di induzione.