RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO PAGNI

Un' osservazione sulle densità degli insiemi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 228-230

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__228_0>

UN' OSSERVAZIONE SULLE DENSITÀ DEGLI INSIEMI

Nota (*) *di* Mauro Pagni (*a Padova*).

Sia E un insieme limitato e misurabile dell' $S_n \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reale ed euclideo. Per ogni punto $P \equiv (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ di E consideriamo la sezione di E ottenuta con l' S_r $(r < n)$ di equazioni $x_1 = \xi_1$; $x_2 = \xi_2, \ldots$; $x_{n-r} = \xi_{n-r}$; S_r che indichiamo con $S_r(P)$. Relativamente ai punti P di E per cui le sezioni sopradette risultano misurabili, e cioè come è noto per quasi tutti i punti P di E, si formi il rapporto

$$\frac{m_r\,(E \cdot q\,(P, K))}{m_r\,(q\,(P, K))} = g\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n ; K)$$

dove $q\,(P, K)$ è il cubo di $S_r(P)$ di centro P e di lato K con gli spigoli paralleli agli assi di $S_r(P)$ ed m_r indica la misura secondo Lebesgue.

Risultando, come è noto,

$$\lim_{K \to 0} g\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, K) = 1$$

in quasi tutti i punti di E, ci proponiamo di osservare che:

è possibile trovare una porzione (chiusa) E^* di E, avente misura arbitrariamente prossima a quella di E e sulla quale la convergenza di $g\,(x_1, x_2, \ldots, x_n ; K)$ ad uno riesca uniforme.

Ne daremo la dimostrazione nel caso che E sia chiuso, osservando che a questo caso potremo sempre evidentemente ricondurci.

(*) Pervenuta in Redazione il 18 Febbraio 1949.

Intanto la funzione $g(x_1, x_2, \ldots, x_n; K)$ è per ogni fissato $K > 0$ [1] semicontinua superiormente (e quindi misurabile) rispetto a $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in E.

Sia infatti $P_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punto di E, fissati $K > 0$, ed $\varepsilon > 0$, essendo E chiuso, si potrà trovare un insieme finito di cubi ad r dimensioni di $S_r(P_0)$, con gli spigoli paralleli agli assi di $S_r(P_0)$, contenente nell'interno i punti di $(E \cdot q(P_0, K))$ e tale che la sua misura differisca da $m_r(E \cdot q(P_0, K))$ per meno di ε. Si consideri il sistema dei cubi ad n dimensioni, aventi come centri e come lati i rispettivi centri e lati dai precedenti cubi (ad r dimensioni); essendo E chiuso si potrà determinare un $\rho > 0$ tale che per ogni punto P di E appartenente al ρ — intorno di P_0 le sezioni $(E \cdot q(P, K))$ siano tutte contenute in detto sistema.

Da ciò segue $m_r(E \cdot q(P_0, K)) + \varepsilon > m_r(E \cdot q(P, K))$ per P appartenente al ρ — intorno di P_0 [2].

Poniamo

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n; h) = \underset{0 \leq K \leq h}{\text{estr. sup.}} \left| g(x_1, x_2, \ldots, x_n; K) - 1 \right| .$$

Osservando che la funzione $g(x_1, x_2, \ldots, x_n; K)$ per quasi tutti i punti $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di E riesce funzione continua di K per $K \geq 0$, si dimostra facilmente che la funzione $G(x_1, x_2, \ldots, x_n; h)$ è per $h > 0$ fissato misurabile in E.

(1) Porremo $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = \lim_{K \to 0} g(x_1, x_2, \ldots, x_n; K)$, dove tale limite esiste finito e $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = 0$ nei restanti punti. Con ciò, evidentemente la $g(x_1, x_2, \ldots, x_n; 0)$ risulta misurabile rispetto a P in E.

(2) La misurabilità della funzione $g(x_1, x_2, \ldots, x_n; K)$ si può anche dedurre osservando che nelle ipotesi fatte la $g(x_1\, x_2, \ldots, x_n; K)$ risulta per ogni fissato $K > 0$ continua rispetto al complesso delle variabili $(x_{n-r+1}, x_{n-r+2}, \ldots, x_n)$ e misurabile rispetto al complesso $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-r})$. In queste circostanze come corollario di un resultato di G. Scorza Dragoni (*Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*. Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova, (1948), pp. 102-106) si ha la misurabilità rispetto al complesso $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Detti infatti $r_1, r_2, \ldots.$ tutti i numeri razionali dell'intervallo $(0 \dashv h)$ risulta [3]:

$$\underset{0 \leq K \leq h}{estr.\ sup.} | g(x_1, x_2, \ldots, x_n; K) - 1 | = \lim_{i \to \infty} \max_{n=1,2,\ldots} | g(x_1 x_2, \ldots, x_n; r_n) - 1 | .$$

Fissato invece $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in E la funzione $G(x_1, x_2, \ldots, x_n; h)$ è non decrescente in h. Basta allora dare ad h una successione di valori positivi tendenti allo zero $h_1, h_2, \ldots.$ ed applicare il teorema di SEVERINI–EGOROFF alla successione $G(x_1, x_2, \ldots, x_n; h_n)$ per giungere alla conclusione voluta.

(3) Un ragionamento simile è fatto in L. CESARI: *Sul teorema di densità in senso forte.* [« Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa » serie 2ª, vol. VIII, pp. 301–307] nota (3).