Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Edmondo Morgantini

Sui fasci di curve piane razionali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 203-227

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__203_0>

SUI FASCI DI CURVE PIANE RAZIONALI

Nota (*) *di* EDMONDO MORGANTINI (*a Padova*).

Nella geometria algebrica piana - intesa come studio delle proprietà invarianti per trasformazioni birazionali - apporta com'è noto un rimarchevole contributo il teorema di M. NOETHER che afferma la possibilità di ridurre con un numero finito di trasformazioni quadratiche un fascio di curve razionali ad un fascio di rette (1).

In vista delle possibili analoghe applicazioni alla geometria algebrica dell' S_3 si è quindi tratti a ricercare una classificazione in tipi cremonianamente distinti delle congruenze algebriche di indice uno di curve razionali dello spazio ordinario.

Dai lavori di D. MONTESANO (2), che forniscono fra l'altro anche esempi di congruenze di indice uno di coniche dell' S_3 non riducibili cremonianamente a stelle di rette, risulta *a fortiori* che la classificazione suddetta non condurrà come nel piano al solo tipo della stella di rette.

Il problema della classificazione delle congruenze di indice uno di curve razionali dell' S_3 non è stato ancora risolto (3). Non si conoscono neppure tutti i tipi riducibili cremonianamente a

(*) Pervenuta in Redazione il 27 Dicembre 1948.

(1) M. NOETHER « *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* » [Math. Annalen, Bd. III (1870), p. 161-227], p. 165.

(2) Cfr. ad es.: D. MONTESANO: « *Sui varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* » [Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, serie 3ª Vol. I (1895), pp. 93-110, 155-181].

(3) S. KANTOR nella memoria: » *Die Typen der linearen Complexe rationaler Curven im R_r* » [American Journal of Math., Vol. XXIII (1901),

congruenze di indice uno di coniche, nè si sa se questi - assieme al tipo della stella di rette - esauriscano tutti i tipi possibili.

In particolare non si sapeva finora se fosse sempre possibile ridurre cremonianamente ad una congruenza di indice uno di coniche (o ad una stella di rette) quelle speciali congruenze le cui curve appartengono ai piani di un fascio, e quindi costituiscono un fascio in ciascuno di quei piani. Infatti finora non si sapeva se fosse sempre possibile, *senza introdurre irrazionalità aritmetiche*, trasformare *cremonianamente* un dato fascio di curve piane razionali in un fascio di curve razionali di ordine più basso (4). E d'altra parte è chiaro che l'intervento di quelle irrazionalità aritmetiche non permette di costruire una trasformazione cremoniana dell'S_3 che riduca l'ordine delle curve della congruenza e subordini una trasformazione cremoniana in ciascuno dei piani del fascio.

Questa nota permette invece di affermare che *una congruenza algebrica di indice uno di curve razionali dello spazio, le cui curve appartengano ai piani di un fascio, si può sempre ridurre cremonianamente ad una congruenza di coniche o ad una stella di rette.*

Infatti vi si dimostra il seguente:

Teorema: *È sempre possibile trasformare cremonianamente un dato fascio Σ di curve piane razionali ed irriducibili C^n di ordine $n > 2$ in un fascio di coniche o di*

p. 1] afferma che ogni congruenza algebrica di indice uno di curve razionali dell'S_3 si può cremonianamente ridurre ad una congruenza di indice uno di coniche (o ad una stella di rette), ma non giustifica questa sua affermazione con una dimostrazione esauriente.

(4) È anzi da ritenere che ad es. il Noether propendesse per l'impossibilità. Così nella sua classica memoria testè citata, mentre si preoccupa di far notare come *una* curva piana razionale C^n ($n > 2$) si possa sempre trasformare in una conica od in una retta *senza introdurre irrazionalità aritmetiche* (p. 170) (la trasformazione birazionale non essendo necessariamente subordinata ad una trasformazione cremoniana tra i loro piani), consegue la trasformazione cremoniana di un fascio di curve razionali C^n in un fascio analogo di curve di ordine più basso con un procedimento che introduce irrazionalità aritmetiche, nè avverte se e come queste si possano far scomparire (§ 1, p. 165: cfr. anche l'ultimo capoverso del § 4, p. 182-83).

rette, senza introdurre irrazionalità aritmetiche rispetto a Σ.

Con ciò si vuol significare che se il fascio Σ è dato in quanto si conosca (rispetto ad un prefissato sistema di coordinate proiettive omogenee $x_1 : x_2 : x_3$) l'equazione della sua curva generica:

$$(1) \qquad \lambda_1 f_1 (x_1 x_2 x_3) + \lambda_2 f_2 (x_1 x_2 x_3) = 0 \ ,$$

dove $t = \lambda_1 : \lambda_2$ è il parametro del fascio ed f_1, f_2 sono forme di ordine n, l'equazione della curva generica della rete omaloidica che determina la trasformazione cremoniana è del tipo:

$$\mu_1 \varphi_1 (x_1 x_2 x_3) + \mu_2 \varphi_2 (x_1 x_2 x_3) + \mu_3 \varphi_3 (x_1 x_2 x_3) = 0 \ ,$$

dove i coefficienti delle forme φ_i appartengono allo stesso campo di razionalità K dei coefficienti delle forme f_1, f_2.

La questione di verificare se, senza introdurre irrazionalità aritmetiche, fosse sempre possibile ridurre cremonianamente l'ordine di un dato fascio di curve piane razionali è stata proposta allo scrivente dal Prof. U. Morin, che l'A. sente il dovere di ringraziare pubblicamente per i consigli e i suggerimenti fornitigli durante la stesura del presente lavoro.

* * *

La dimostrazione del teorema sopra enunciato procede come segue:

Dapprima si prova che il teorema è vero quando n è dispari, oppure quando n è pari ma nel fascio Σ vi è un numero dispari di punti base di uguale moltiplicità dispari (nn. 1-3).

Nel caso che n sia pari e che i punti base di uguale molteplicità dispari siano in numero pari, si riferisce birazionalmente (e ciò è possibile senza introdurre irrazionalità aritmetiche) il piano del fascio Σ ad una superficie F^m dello spazio ordinario, di ordine m e con una retta s di molteplicità $m-2$, in modo che alle curve del fascio corrispondano proiettivamente le sezioni coniche C^2 di F^m con i piani per s (n. 4). Si osserva poi come sia lecito supporre che tanto il fascio Σ quanto la superficie F^m soddisfino a certe condizioni di regolarità (nn. 5-6).

Fissata l'attenzione sul gruppo delle coniche C^2 degeneri di F^m (n. 7), se ne deduce la convenienza di trattare separatamente i due casi in cui esistano (caso A) o non esistano (caso B) su F^m coniche C^2 degeneri con le componenti razionalmente separabili (nn. 8-9).

Nel caso A si prova che nel fascio Σ ci sono solo quattro punti base di molteplicità dispari, i quali possono essere tutti della stessa molteplicità (caso A_1) o di due molteplicità diverse (caso A_2) (nn. 10-12).

Corrispondentemente sulla F^m si ha un gruppo razionalmente irriducibile di tre (caso A_1) o due (caso A_2) coniche degeneri con le componenti non razionalmente separabili (n. 13).

Esclusi i casi B_1 e B_2 in cui queste vengono a trovarsi nei piani che da s proiettano i punti doppi di F^m (che verranno trattati assieme al caso B) si riconosce che allora il fascio Σ si può trasformare cremonianamente in un fascio di coniche, senza introdurre irrazionalità aritmetiche. E ciò si consegue (nn. 14-15) mediante una opportuna rappresentazione piana della superficie F^m. Nel caso A_2 il fascio di coniche è (generalmente) un fascio-schiera.

Infine (n. 16) nei casi B, B_1, B_2, si prova che il fascio Σ si può trasformare cremonianamente in un fascio di rette, in quanto su F^m si riesce a determinare razionalmente una unisecante delle coniche C^2.

* * *

Dal punto di vista algebrico il teorema precedente può enunciarsi:

Sia data una equazione algebrica:

$$F(x, y; t) \equiv F_1(x, y) + t F_2(x, y) = 0 \quad , \tag{2}$$

di grado n nelle incognite x, y e di primo grado in t, la quale, per un valore generico di t, rappresenti nel piano cartesiano (x, y) una curva irriducibile di genere zero. Allora si può determinare una trasformazione birazionale:

$$(3) \qquad X = \frac{\Phi_1(x\,y)}{\Phi_3(x\,y)} \quad , \quad Y = \frac{\Phi_2(x\,y)}{\Phi_3(x\,y)} \quad ,$$

nella quale, e nella cui inversa:

$$(3') \qquad x = \frac{\Psi_1(XY)}{\Psi_3(XY)} \quad , \quad y = \frac{\Psi_2(XY)}{\Psi_3(XY)} \quad ,$$

i coefficienti dei polinomi Φ_i, Ψ_i $(i = 1, 2, 3)$ appartengano al campo di razionalità dei coefficienti dei polinomi F_1, F_2, ed inoltre tale che nell'equazione trasformata della (2) mediante le (3'):

$$F^*(X, Y, t) \equiv F_1^*(X\,Y) + t\,F_2^*(X\,Y) = 0 \ ,$$

i polinomi F_1^* ed F_2^* siano di 1° o di 2° grado in X, Y.

---

1. – Diremo individuabile «*razionalmente*» (oppure «senza introdurre *irrazionalità aritmetiche*») rispetto ad una varietà algebrica V_k, data in uno spazio lineare $S_r = [x_0\,x_1 \ldots x_r]$ da un sistema di equazioni:

$$f_i(x_0\,x_1 \ldots x_r) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-k) \ ,$$

ogni varietà algebrica $V_{k'}$ di uno spazio lineare $S_{r'} = [y_0\,y_1 \ldots y_{r'}]$ che ivi si possa rappresentare con un sistema di equazioni algebriche:

$$\varphi_j(y_0\,y_1 \ldots y_{r'}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r'-k')$$

i cui coefficenti appartengano al campo di razionalità K_{V_k} dei coefficienti delle forme f_i ([5]).

Indicheremo coi simboli T_i e Γ_i rispettivamente una trasformazione birazionale tra due varietà algebriche ad i dimensioni e una trasformazione cremoniana tra due spazi lineari ad i dimensioni, determinabili razionalmente rispetto ad una varietà V_k data in un S_r, e cioè tali da potersi rappresentare con delle equazioni i cui coefficienti appartengano al campo di razionalità K_{V_k}. Qualora la V_k non sia esplicitamente menzionata sottintenderemo che si tratti del fascio Σ, cosicchè allora $K_{V_k} = K$.

Una varietà algebrica V_k od una trasformazione birazionale T_i si diranno individuabili razionalmente su una data varietà algebrica V_i dell'S_r quando lo siano rispetto alla V_i stessa.

Indicheremo con il simbolo K_t il campo di razionalità dell'indeterminata t e dei coefficienti delle forme f_1 ed f_2 che compaiono nella (1).

2. - *Se n è dispari, oppure se su ogni C^n del fascio Σ si può individuare razionalmente un gruppo G_m di un numero m dispari di punti, allora il fascio Σ si può trasformare cremonianamente in un fascio di rette, senza introdurre irrazionalità aritmetiche (rispetto a Σ).*

Infatti è noto ([6]) che una C^n razionale di ordine n dispari si può trasformare birazionalmente in una retta r, senza introdurre irrazionalità aritmetiche rispetto a C^n. Sia T_1 la relativa trasformazione birazionale, coi coefficienti in K_t.

Si determini razionalmente rispetto a Σ (com'è sempre possibile) un fascio di rette Σ' e si ponga tra i due fasci una proiettività Γ'_1, ad es. associando la C^n di Σ e la retta r' di Σ' cui compete lo stesso valore t del parametro.

È anche possibile determinare senza uscire dal campo K_t

([5]) La definizione e la nozione che ne consegue sono tali da dipendere essenzialmente:

a) dai sistemi di riferimento fissati rispettivamente in S_r, $S_{r'}$;

b) dal particolare sistema di equazioni dato per rappresentare V_k.

([6]) Cfr. M. Noether, l. cit., pag. 170.

una proiettività Γ_1 tra la retta r trasformata di C^n mediante T_1 e la retta r' omologa di C^n in Γ_1'.

Infatti sia su r che su r' si può sempre determinare, rimanendo in K_t, una terna ordinata di punti.

Nasce così mediante Γ_1', T_1, Γ_1, una trasformazione Γ_2 biunivoca, algebrica e perciò cremoniana tra i piani π e π' dei due fasci Σ e Σ'.

Questa Γ_2 si può rappresentare con delle equazioni con i coefficienti in K, in quanto fa corrispondere a punti di π con le coordinate in K punti di π' con le coordinate in K, e viceversa.

D'altra parte, se su ogni C^n di Σ si può individuare razionalmente un G_m di un numero dispari m di punti, pure razionalmente si può individuare sulla stessa C^n la $|G_m| = g_m^m$ di tutti i gruppi di m punti. Da questa si può estrarre (sempre razionalmente rispetto a C^n) una g_m^2, la cui immagine proiettiva è una curva piana C^m razionale, di ordine dispari e riferita a C^n mediante una T_1' determinata razionalmente rispetto a C^n. Pertanto anche ora ciascuna C^n si può riferire ad una retta r con una $T_1'' = T_1 T_1'$, e come prima si riconosce la possibilità di trasformare cremonianamente il fascio Σ in un fascio di rette senza introdurre irrazionalità aritmetiche.

3. – Dall'osservazione precedente consegue immediatamente che:

basta dimostrare il teorema per i fasci Σ di curve piane razionali irriducibili C^{2n} di ordine pari e con un numero pari di punti base di uguale molteplicità dispari.

Infatti nel piano il gruppo G_{α_i} degli α_i punti base di una stessa molteplicità i di un fascio Σ di curve algebriche è individuabile razionalmente rispetto a Σ. Perciò, se tanto i quanto α_i sono dispari, su ogni curva del fascio si può individuare razionalmente un gruppo $G_{i\alpha_i}$ di un numero dispari $i\alpha_i$ di punti, e si ricade nel caso già studiato al n. 2.

4. - Sebbene sia noto (7) che una data curva razionale C^{2n} di ordine pari $2n$ si possa trasformare birazionalmente in una conica senza introdurre irrazionalità aritmetiche rispetto a C^{2n}, tuttavia non si può da ciò (come prima al n. 2) inferire senz'altro la esistenza di una Γ_2 determinabile razionalmente rispetto a Σ che muti il fascio Σ delle C^{2n} in un fascio Σ' di coniche. Infatti *date due coniche irriducibili C, C' i cui coefficienti appartengano al medesimo campo di razionalità K, in generale non esiste una T_1 coi coefficienti in K che trasformi C in C'* (8).

Tuttavia, riferite proiettivamente le curve C^{2n} di Σ ai piani di un fascio Σ' il cui asse s sia razionalmente determinabile rispetto a Σ, e trasformata (mediante la relativa T'_1) ciascuna C^{2n} in una conica C del piano omologo, ragionando come al n. 2 ne risulta l'*esistenza di una T_2 determinabile razionalmente rispetto a Σ che muta il piano del fascio Σ in una superficie algebrica F^m dello spazio ordinario, di ordine m e con la retta s multipla di molteplicità $m-2$. Ad ogni sezione conica C^2 di F^m (fuori di s) con un piano per s corrisponde proiettivamente una ben determinata C^{2n} di Σ.*

5. - Conviene osservare che: *mediante una* (successione finita di trasformazioni cremoniane) Γ_2 *si può ricondurre il fascio Σ ad avere i punti base tutti distinti.*

Anzitutto ci si può liberare dai punti base infinitamente vicini e di molteplicità diverse, ad es. i e j. Infatti il gruppo G_{α_i} dei punti (del piano) base e di uguale molteplicità i per le C^{2n} è razionalmente individuabile rispetto a Σ. Perciò è razionalmente individuabile rispetto a Σ anche il sistema lineare di tutte le curve algebriche piane di un dato ordine passanti per G_{α_i}, e quindi anche una rete omaloidica di curve dello stesso ordine,

(7) Cfr. M. Noether, l. cit., pag. 170.

(8) Basta ad es. pensare al caso che K sia il corpo razionale. Allora può benissimo accadere che C contenga punti di coordinate razionali, mentre C' non ne contenga affatto.

tra i cui punti base figurino quelli di G_{α_i} e non quelli di molteplicità j per Σ. Si può anzi supporre che le curve fondamentali della rete si comportino in modo generico rispetto ai punti base di molteplicità j di Σ prossimi a quelli di molteplicità i.

Se poi sono infinitamente vicini anche punti base di uguale molteplicità i, basta osservare che nel gruppo di tutti i punti (del piano) base per Σ e di uguale molteplicità i, sono razionalmente individuabili rispetto a Σ quelli nei cui intorni di ugual ordine avvengono le stesse coincidenze. Di qui la possibilità di individuare razionalmente rispetto a Σ una rete omaloidica tra i cui punti base (distinti) figurino semplicemente quei punti base i—pli delle C^{2n} aventi altri punti base infinitamente vicini. Si può anche supporre che rispetto a questi ultimi le curve fondamentali della rete si comportino in modo generico.

6. - Per quanto riguarda la superficie F^m si può supporre che:

1) *le* $3m-4$ *coniche degeneri del fascio* (s) *abbiano le loro componenti distinte, e il loro punto d'intersezione* P, *semplice o doppio per* F, *non appartenga ad* s;

2) F^m *non possieda fuori di* s *punti multipli più che doppi,* (non uniplanari) il cui numero diremo d.

Il piano per s e per uno di essi P taglia F^m fuori di s in una conica degenere che *va contata due volte* nel gruppo G_{3m-4} delle $3m-4$ coniche degeneri del fascio (s).

A queste conclusioni si giunge sulla falsariga di un ragionamento più generale ben noto, dovuto a U. Morin [9].

[9] « *Sulle varietà algebriche che contengono un fascio di curve razionali* » [Rendiconti Padova, A. IX (1938) nn. 4–9]. Cfr. anche A. Comessatti « *Intorno ad un classico problema di unisecanti* » [Boll. U. M. I. (II) A. II (1940)], n. 2.

Si esclude anzitutto che le coniche C^2 passino tutte per un punto fisso della retta s o siano tutte tangenti ad s, chè allora ne risulta subito (senza introdurre irrazionalità aritmetiche rispetto a Σ) la razionalità « lineare » di F^m e quindi l'esistenza di una Γ_2 che trasforma il fascio Σ in un fascio di rette.

Si riconosce poi che mediante una trasformazione cremoniana Γ_3

7. - Tanto nel fascio Σ delle C^{2n} quanto nel fascio (s) delle coniche C^2 esistenti su F^m c'è un numero finito di *curve degeneri*. Poichè la curva generica di Σ è razionale ed irriducibile, *se una particolare C^{2n} si spezza in due o più componenti, queste sono razionali* (10).

Sia G_δ il gruppo delle δ curve degeneri (11) del fascio Σ, $G_{\delta'}$ il gruppo delle $\delta' = 3m - 4$ coniche degeneri del fascio (s). Tanto il gruppo G_δ quanto quello $G_{\delta'}$ sono determinabili razionalmente rispetto a Σ. Potrà anche accadere che entro G_δ ed entro $G_{\delta'}$ vi siano dei sottogruppi determinabili razionalmente rispetto a Σ. Così accade ad es. in $G_{\delta'}$ per quanto riguarda il gruppo G_d delle C^2 degeneri situate nei piani che da s proiettano i d punti doppi di F^m fuori di s. Ciascuna di esse conta 2 volte nel gruppo $G_{\delta'}$.

Diciamo *irriducibile razionalmente* rispetto a Σ un gruppo G_γ di curve degeneri contenuto in G_δ o in $G_{\delta'}$, che non possa scomporsi in più sottogruppi determinabili razionalmente rispetto a Σ.

dell'S_3 di appartenenza di F^m, la quale subordina sul fascio (s) l'identità e in ciascun piano del fascio un' opportuna omografia, si possono far scomparire le coniche C^2 doppiamente degeneri di F^m ed allontanare da s i punti doppi di quelle C^2 semplicemente degeneri che eventualmente vi cadano.

Effettuata la trasformazione Γ_3 si riconosce anche che la F^m possiede (fuori di s) solo un numero finito d di punti doppi, che si comportano com'è specificato sopra.

(10) Per convincersene basta pensare al modello di Lüroth-Clebsch della Riemanniana della C^{2n} generica. Cfr. ad es. F. Severi « *Vorlesungen über Algebraische Geometrie* » (Teubner, Leipzig - Berlin, 1921) n. 81, pag. 210; Anhang F), n. 7, pag. 322.

(11) Se α è il numero dei punti base semplici o multipli del fascio Σ, tutti per ipotesi (distinti e) a tangenti variabili (n. 5), il numero ν delle curve degeneri del fascio Σ, cioè di quelle C^{2n} dotate di un punto doppio fuori dei punti base è, in senso algebrico: $\nu = \alpha - 1$.

Cfr. F. Enriques - O. Chisini « *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* », Vol. II, (Bologna, Zanichelli, 1918), pag. 170.

Il comportamento delle curve degeneri costituenti il gruppo G_γ sarà *simmetrico,* nè potrà ad es. accadere che una di esse si spezzi in due parti *separabili razionalmente* (12) rispetto a Σ, senza che ciò accada anche per le altre.

L'ipotesi che i punti base del fascio Σ siano distinti (n. 5) fa sì che *tra le C^{2n} non ve ne possano essere di degeneri in una C^n doppia.* Infatti in tal caso non possono mancare punti base di molteplicità dispari (13). Ed uno di essi P di molteplicità $2j+1$ assorbirebbe più di $(2j+1)^2$ delle $4n^2$ intersezioni che due C^{2n} di Σ hanno in comune e che debbono essere tutte assorbite dai punti base (14). Tale eccesso di molteplicità di intersezione non può essere giustificato se non si ammette che vi siano dei punti base infinitamente vicini a P, contro l'ipotesi.

8. - Fissiamo l'attenzione sulle C^{2n} riducibili provenienti dalle C^2 degeneri di F^m con le componenti non razionalmente separabili:

Ad una C^2 degenere in due rette a, b non razionalmente separabili rispetto a Σ corrisponde in T_2 una C^{2n} degenere in due C^n, non razionalmente separabili rispetto a Σ, eventualmente riducibili in ugual numero di componenti, e con una componente comune, doppia per la C^{2n}.

(12) Cioè tali che ciascuna di esse sia razionalmente individuabile rispetto a Σ.

(13) Se nel fascio della C^{2n} vi fossero solo punti base di molteplicità pari $2i$, detto α_i il loro numero, si dovrebbe avere (vedi più avanti, n. 10, nota (15)):

$$\Sigma i^2 \alpha_i = n^2 \quad , \quad \Sigma i \alpha_i = 3n-1 \; ,$$

D'altra parte, per l'esistenza di una C^n razionale avente come i-pli i punti base di moltiplicità $2i$ per la C^{2n}, dovrebbe essere contemporaneamente:

$$\Sigma i^2 \alpha_i = n^2 + 1 \quad , \quad \Sigma i \alpha_i = 3n-1 \; ,$$

in contraddizione alla prima delle due relazioni precedenti.

(14) Basta pensare che il fascio Σ può essere individuato dalla C^n doppia e da una C^{2n} generica ed osservare che la C^n ha necessariamente in P un punto di molteplicità $j+1$, cosicchè il numero delle intersezioni delle curve $2C^n$, C^{2n} in P è $(2j+2)(2j+1) > (2j+1)^2$.

Sia Ω il sistema omaloidico delle curve razionali tracciate su F^m che in T_2 corrispondono alle rette del piano del fascio Σ.

Anzitutto sulle due rette a, b non può cadere un diverso numero di punti fondamentali per la Ω, nè, se ve ne cadono in ugual numero, il comportamento di a, b rispetto ad essi può essere dissimmetrico. Altrimenti a, b sarebbero razionalmente separabili rispetto a T_2 e quindi rispetto a Σ, contro all'ipotesi.

Per lo stesso motivo si riconosce che una sola delle due rette a, b non può essere fondamentale per Ω.

D'altra parte non possono essere entrambe fondamentali, senza contenere altri punti fondamentali per Ω diversi dal loro punto d'intersezione P. Altrimenti, dovendo comportarsi allo stesso modo rispetto a questo punto, nel fascio Σ alla coppia a, b corrisponderebbe un'unica curva C^n (immagine di P) da contarsi due volte. E ciò è stato escluso al n. 7.

Se poi a, b fossero fondamentali ed oltre al loro punto P d'intersezione contenessero altri punti fondamentali A_i, B_i di Ω (necessariamente in egual numero, dello stesso tipo e situati in modo simmetrico su a, b), la curva omologa sarebbe riducibile come vuole l'enunciato in due C^n, entrambe a loro volta riducibili in un egual numero di componenti distinte (immagini dei punti fondamentali A_i, B_i) ed in una parte comune, immagine del punto P. Nè le due C^n possono essere razionalmente separabili, altrimenti lo sarebbero i due gruppi di punti fondamentali A_i, B_i, e quindi a, b, contro all'ipotesi.

Infine, se nè a nè b sono fondamentali per Ω, nè contengono un diverso numero di punti fondamentali dello stesso tipo, nè il comportamento di a e b rispetto a questi è dissimmetrico, allora il teorema è verificato. Infatti se le curve corrispondenti ad a, b fossero di ordine diverso, allora a, b, comportandosi diversamente rispetto a T_2, sarebbero razionalmente separabili rispetto a Σ contro all'ipotesi. Dunque le curve corrispondenti ad a e b sono dello stesso ordine, nè possono essere razionalmente separabili, altrimenti lo sarebbero a e b, sempre contro all'ipotesi.

La eventuale presenza di un egual numero di punti fondamentali di Ω su a e b (dello stesso tipo e rispetto ai quali il comportamento di a e b sia simmetrico) provoca l'eventuale spezzamento delle due C^n corrispondenti ad a e b in un egual numero di parti di uguali ordini. - Di queste solo due (una della curva omologa di a, una della curva omologa di b) possono eventualmente coincidere con la curva fondamentale del piano di Σ immagine di un punto fondamentale di Ω che cada nel punto comune ad a, b.

9. - Non si può finora affermare che viceversa ad una C^{2n} di Σ degenere in due C^n non razionalmente separabili debba necessariamente corrispondere su F^m una C^2 degenere (con le componenti non razionalmente separabili). Si potrebbe infatti pensare ad una C^2 irriducibile, fondamentale per Ω, sulla quale cadano due gruppi di un egual numero di punti base di Ω, non razionalmente separabili rispetto a Σ.

È però chiaro che una tale C^{2n} *non può* appartenere allo stesso gruppo razionalmente irriducibile G_γ cui appartengono le altre C^{2n} di Σ spezzate in due C^n non razionalmente separabili e corrispondenti a C^2 degeneri con componenti inseparabili su F^m.

Pertanto, *se su F^m esistono coniche C^2 riducibili a componenti non separabili razionalmente e nel fascio Σ le C^{2n} spezzate in due C^n non razionalmente separabili appartengono ad un medesimo gruppo razionalmente irriducibile G_γ, allora anche le C^2 riducibili a componenti non separabili di F^m appartengono ad un gruppo $G_{\gamma'}$ razionalmente irriducibile e la corrispondenza tra le curve degeneri dei due gruppi G_γ, $G_{\gamma'}$ è biunivoca* ($\gamma = \gamma'$).

Saranno quindi da esaminare separatamente i due casi seguenti:

A) - *Sulla F^m non tutte le $3m - 4$ coniche degeneri sono a componenti razionalmente separabili*;

B) - *Sulla F^m le $3m - 4$ coniche degeneri sono tutte a componenti separabili.*

10. - Cominciamo dal caso A). Allora nel fascio Σ esistono, per quel che precede, delle curve degeneri in due C^n razionali (eventualmente riducibili) e non razionalmente separabili.

L'aver supposto distinti i punti base del fascio Σ fa sì che *una curva riducibile* $C^{2n} = C^n + C'^n$ *non può avere nei punti base molteplicità superiore della* C^{2n} *generica.* Altrimenti (cfr. il ragionamento dell'ultimo alinea del n. 7, con la relativa nota a piè pagina) nascerebbero dei punti base infinitamente vicini, contro all'ipotesi.

Inoltre *le due componenti* C^n, C'^n *debbono comportarsi in modo simmetrico nei punti base di ugual molteplicità delle* C^{2n}. Altrimenti la C^n e la C'^n sarebbero razionalmente separabili rispetto a Σ.

Indichiamo con α_i il numero dei punti base di uguale molteplicità pari $2i$ per le C^{2n} e con $2\alpha_j$ il numero (per ipotesi pari) dei punti base di uguale molteplicità dispari $2j+1$. Gli interi i, j, α_i, α_j, n sono com'è noto vincolati da due relazioni indipendenti, che esprimono essere *uno* la dimensione del sistema delle C^{2n} per i punti base assegnati, ed essere *zero* il genere della C^{2n} generica, e si scrivono (15):

$$(1) \qquad 2\sum_i i^2\alpha_i + \sum_j (2j+1)^2\alpha_j = 2n^2 \ ,$$

$$(2) \qquad \sum_i i\,\alpha_i + \sum_j (2j+1)\,\alpha_j = 3n - 1 \ .$$

La (1), che si può anche scrivere:

$$(3) \qquad \sum_j 2\alpha_j = 4\left\{n^2 - \sum_i i^2\alpha_i - 2\sum_j j(j+1)\,\alpha_j\right\} \ ,$$

mostra che: *se esistono punti base di molteplicità dispari il loro numero è* (un multiplo di 4 e quindi) *non inferiore a 4.*

(15) Per un sistema completo di C^n razionali piane, detto α_i il numero dei punti base di ugual molteplicità i, si ha (cfr. ad es. Noether, l. cit., pag. 164):

$$r = \frac{n(n+3)}{2} - \Sigma_i \frac{i(i+1)}{2}\alpha_i \ , \quad 0 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma_i \frac{i(i-1)}{2}\alpha_i \ ,$$

dove r è la dimensione del sistema. E le due relazioni scritte equivalgono alla

$$(1') \qquad \Sigma_i i^2\alpha_i = n^2 + 1 - r \quad , \quad \Sigma_i i\alpha_i = 3n - 1 - r \qquad (2') \ ,$$

che nel nostro caso assumono la forma (1), (2).

Conviene anche notare esplicitamente che:

Se in uno A dei punti base di molteplicità μ *una, ad es.* C^n, *delle due componenti della curva riducibile* $C^{2n} = C^n + C'^n$ *ha molteplicità* $\mu - \varepsilon$, *l'altra vi ha molteplicità* $\mu + \varepsilon$. Infatti la C^{2n} particolare deve avere in A la stessa molteplicità della C^{2n} generica, non potendovi avere (come s'è già osservato) molteplicità maggiore.

11. - Se C^n e C'^n non sono razionalmente separabili, poichè il loro comportamento rispetto agli α_i punti base A^{2i} di uguale molteplicità pari $2i$ per le C^{2n} deve essere simmetrico, ve ne saranno α_{ik} in cui C^n e C'^n avranno molteplicità rispettive $i - \varepsilon_{ik}$ $(0 < \varepsilon_{ik} \leq i)$ ed $i + \varepsilon_{ik}$, mentre altri α_{ik} saranno di molteplicità $i + \varepsilon_{ik}$ ed $i - \varepsilon_{ik}$ rispettivamente per C^n e C'^n. Tolti questi gruppi di un numero pari di punti A^{2i}, i rimanenti $\alpha_{i0} = \alpha_i - 2 \sum_k \alpha_{ik}$ saranno di uguale molteplicità i tanto per C^n quanto per C'^n.

Se nel fascio delle C^{2n} esistessero solo punti base di molteplicità pari $2i$, l'esistenza (della $C^{2n} = C^n + C'^n$ e quindi) della C^n esigerebbe, come vogliono le (1'), (2'), le relazioni:

$$\sum_i i^2 \alpha_i + 2 \sum_{ik} \varepsilon_{ik}^2 \alpha_{ik} = n^2 + 1 - r \quad ,$$

$$\sum_i i \, \alpha_i = 3n - 1 - r \; .$$

Da queste e dalle (1), (2), tenendo conto che $\alpha_j = 0$, si trarrebbe:

$$r = 0 \qquad , \qquad 2 \sum_{ik} \varepsilon_{ik}^2 \alpha_{ik} = 1 \; .$$

E poichè la seconda di queste relazioni è manifestamente assurda si conclude che *se esiste una* C^{2n} *riducibile in due* C^n *non razionalmente separabili, il fascio delle* C^{2n} *possiede certamente dei punti base* B^{2j+1} *di molteplicità dispari* $2j + 1$.

Per ipotesi il loro numero $2\alpha_j$ è pari.

Sempre per la simmetria del comportamento di C^n, C'^n rispetto al gruppo dei $2\alpha_j$ punti base B^{2j+1} di uguale molteplicità $2j+1$, questi si suddivideranno in gruppi di un numero pari $2\alpha_{jh}$ punti B^{2j+1}, in α_{jh} dei quali la C^n e la C'^n avranno molteplicità rispettive $j-\varepsilon_{jh}$ e $j+\varepsilon_{jh}+1$ $(0 \leq \varepsilon_{jh} \leq j)$, mentre negli altri α_{jh} l'ufficio delle due curve si inverte. Inoltre:

$$\sum_h \alpha_{jh} = \alpha_j .$$

Cosicchè, sempre per le (1'), (2'), sarà:

$$\sum_i i^2\alpha^i + 2\sum_{ik} \varepsilon_{ik}^2\, \alpha_{ik} + \frac{1}{2}\sum_j (2j+1)^2\alpha_j + \frac{1}{2}\sum_j \alpha_j +$$
$$+ 2\sum_{jh} \varepsilon_{jh}(\varepsilon_{jh}+1)\, \alpha_{jh} = n^2 + 1 - r \ ,$$

$$\sum_i i\,\alpha_i + \sum_j (2j+1)\,\alpha_j = 3n - 1 - r \ .$$

Da queste, tenendo conto delle (1), (2) si trae:

$$r = 0 \ , \ \frac{1}{2}\sum_j \alpha_j + 2\sum_{ik} \varepsilon_{ik}^2\, \alpha_{ik} + 2\sum_{jh} \varepsilon_{jh}(\varepsilon_{jh}+1)\, \alpha_{jh} = 1 \ ,$$

e quindi, intanto:

$$\sum_{ik} \varepsilon_{ik}^2\, \alpha_{ik} = 0 \ ,$$

cioè essendo $\varepsilon_{ik} \neq 0$:

$$\alpha_{ik} = 0 \ .$$

Inoltre:

$$\sum_{jh} \varepsilon_{jh}(\varepsilon_{jh}+1)\, \alpha_{jh} = 0 \ ,$$

cioè:

$$se \quad \alpha_{jh} \neq 0 \quad , \quad \varepsilon_{jh} = 0 \ ,$$
$$e \ se \quad \varepsilon_{jh} \neq 0 \quad , \quad \alpha_{jh} = 0 \ .$$

Infine:

$$\sum_j \alpha_j = 2 \,. \tag{3}$$

Concludendo: *Se nel fascio* Σ *delle* C^{2n} *ne esiste una riducibile in due* C^n *non razionalmente separabili, il fascio possiede quattro punti base di molteplicità dispari, distinti. Essi possono avere tutti la stessa molteplicità, oppure si dividono in due coppie di uguale molteplicità. Negli* α_i *punti base del fascio* Σ *di uguale molteplicità pari* $2i$ *ciascuna delle* C^n *ha un punto base* i*—plo. In* α_j *dei* $2\alpha_j$ *punti base del fascio* Σ *di uguale molteplicità dispari* $2j+1$ *una delle due* C^n *ha molteplicità* j*, l'altra* $j+1$*; nei rimanenti* α_j *punti la prima ha molteplicità* $j+1$*, la seconda* j*.*

12. - Viceversa se il fascio delle C^{2n} possiede 4 punti base di molteplicità dispari, cioè se sussiste la (3), le (1), (2) si possono scrivere:

$$\sum_i i^2\alpha_i + \sum_j j^2\alpha_j + \sum_j (j+1)^2\alpha_j = n^2 + 1 \quad ,$$

$$\sum_i i\,\alpha_i + \sum_j j\,\alpha_j + \sum_j (j+1)\,\alpha_j = 3n - 1 \;,$$

e queste relazioni ci assicurano dell'esistenza di una C^n razionale per la quale gli α_i punti base del fascio delle C^{2n} di molteplicità $2i$ sono i—pli, mentre dei $2\alpha_j$ punti base di eguale molteplicità dispari $2j+1$ del fascio, α_j sono j—pli ed i rimanenti α_j $(j+1)$—pli.

Pertanto condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio di curve piane razionali irriducibili C^{2n} *di ordine pari* $2n$ *con un numero pari* $2\alpha_j$ *di punti base di uguale molteplicità dispari* $2j+1$ *abbia quattro punti base di molteplicità dispari è che nel fascio esista qualche curva* $C^{2n} = C^n + C'^n$ *riducibile in due componenti di or-*

dine n (eventualmente a loro volta riducibili), *il cui comportamento nei punti base di uguale molteplicità del fascio sia simmetrico.* Tale comportamento è necessariamente per ciascuna C^n quello sopra specificato. *Di C^{2n} riducibili cosiffatte ve ne possono essere tre o due*, secondo che i 4 punti base di molteplicità dispari del fascio sono tutti della stessa molteplicità oppure di due molteplicità diverse.

13. – A questo punto conviene osservare che il fascio Σ è determinato dai punti base (con le rispettive molteplicità) e dall'ordine $2n$ delle sue curve.

Cosicchè nei due casi precedenti il gruppo G_3 o rispettivamente quello G_2 delle C^{2n} degeneri in due C^n non razionalmente separabili saranno razionalmente irriducibili rispetto a Σ. E ciò per il comportamento simmetrico delle curve del gruppo G_3 (o di quello G_2) nei riguardi dei gruppi (razionalmente irriducibili rispetto a Σ) di punti del piano, base di ugual molteplicità pari o dispari di Σ ([16]).

Tenendo presente quanto s'è detto al n. 9 si riconosce allora che:

il caso A) *dà luogo a due sottocasi, secondo che:*

A$_1$) *Su F^m c'è un gruppo razionalmente irriducibile G_3 di* 3 *coniche degeneri in due rette non razionalmente separabili rispetto a Σ;*

A$_2$) *Su F^m c'è un gruppo razionalmente irriducibile G_2 di* 2 *coniche degeneri in due rette non razionalmente separabili rispetto a Σ.*

Sulla F^m il gruppo G'_d dei d punti doppi è razionalmente individuabile rispetto a Σ, e così accade anche per il gruppo G_d delle d coniche degeneri sezioni di F^m (fuori di s) con i piani

([16]) A dir il vero può accadere (ma non è il caso generale) che ad es. una delle curve del gruppo G_3 si possa distinguere razionalmente dalle altre, per i suoi particolari legami di appartenenza con le due curve f_1 ed f_2 assegnate per individuare il fascio. Si pensi ad es. che essa coincida con f_1, o che coincidano con f_1 ed f_2 le altre due curve degeneri del gruppo G_3. Comunque anche in questi casi valgono i ragionamenti svolti in appresso ai nn. 14, 15.

che proiettano da s i punti di G_d. Cosicchè, appena un gruppo *razionalmente irriducibile* G_γ di coniche del fascio (s) ha in comune con G_d un elemento, è necessariamente contenuto in G_d.

Saranno quindi da considerare i seguenti sottocasi di quelli A_1, A_2:

A_1) :	G_3 *non è*	*contenuto*	*in*	G_d	;
B_1) :	» *è*	»	»	»	;
A_2) :	G_2 *non è*	»	»	»	;
B_2) ;	» *è*	»	»	»	.

14. - Consideriamo dapprima il caso A_1.

Sappiamo (n. 7) che le coniche degeneri di F^m sono $3m-4$ e che nel loro gruppo ciascuna di quelle del gruppo G_d va contata due volte, cosicchè sarà $3m-4 \geq 3+2d$ ossia, essendo $d \geq 0$, $m \geq 3$:

$$(4) \qquad \mu = 2m - 4 - d \geq 1 \ .$$

D'altra parte è noto che le rigate algebriche R^μ di ordine μ aventi una data retta s multipla di molteplicità $\mu-1$ costituiscono un sistema lineare Λ di dimensione 3μ. Ed è ovvio che per le R^μ di Λ le condizioni di passaggio per un punto fissato o di contenere una data retta a, ad es. incidente ad s, sono lineari ed abbassano la dimensione del sistema Λ rispettivamente di una o due unità.

Ciò premesso consideriamo il sistema lineare Λ delle R^μ che soddisfano alle seguenti condizioni, tutte esprimibili razionalmente rispetto a Σ:

1) hanno la retta s (che per F^m è $(m-2)$—pla) multipla di molteplicità $\mu - 1 = 2m - 5 - d$;

2) contengono una componente a_i di ciascuna delle $3m-7-2d$ coniche degeneri di F^m razionalmente separabili rispetto a Σ e non contenute (in G_3 o) in G_d (17);

(17) Il fatto che le coniche degeneri di F^m con le componenti rettilinee a, b razionalmente separabili si distribuiscano in uno o più gruppi G razionalmente irriducibili non impedisce la razionalità della condizione 2) rispetto a Σ. Vorrà dire soltanto che la scelta di una delle componenti, ad es. a, di una delle coniche degeneri del gruppo G *determina* la scelta di una componente su tutte le altre del medesimo gruppo.

3) passano semplicemente per i d punti doppi di F^m.

Ora *il sistema lineare* Λ *è una rete* [18]. Infatti ha la dimensione:

$$r = 3\mu - 2(3m - 7 - 2d) - d = 2 \ .$$

Chiamiamo $\mathcal{L}$ la rete [19] di curve L che le rigate di Λ tagliano su F^m fuori delle curve base, cioè fuori della direttrice $(\mu - 1)$—pla s e delle altre $3m - 7 - 2d$ generatrici comuni a_i ad essa incidenti.

Fuori di s e delle rette a^i due R^μ si tagliano in una curva C^ν, il cui ordine è

$$\nu = \mu^2 - (\mu - 1)^2 - (3m - 7 - 2d) = m - 2 \ .$$

Si vede facilmente [20] che una C^ν si appoggia $\nu - 1 = m - 3$ volte alla retta s ed una sola volta a ciascuna delle $3m - 7 - 2d$ rette a_i.

Pertanto il numero delle intersezioni di C^ν con F^m che cadono fuori di s, delle a_i e dei d punti doppi di F^m, ossia il numero delle intersezioni variabili di due curve L, ossia infine il grado della rete $\mathcal{L}$, è dato da:

$$m(m-2) - (m-2)(m-3) - (3m - 7 - 2d) - 2d = 1 \ .$$

(18) Oppure, quando le condizioni di passaggio per le $3m - 7 - 2d$ rette a_i non sono tutte indipendenti, un sistema lineare di dimensione > 2, dal quale si può sempre estrarre, razionalmente rispetto a Σ, una rete Λ.

(19) Si tratta di una rete, giacchè evidentemente non vi sono rigate R^μ che possano contenere F^m.

(20) Basta pensare che una C^ν irriducibile, intersezione (fuori di s) di due rigate R^μ, $\overline{R}^\mu$ con la stessa direttrice $(\mu - 1)$—pla s, incontra in un solo punto P fuori di s un piano generico α del fascio (s). Il punto P è l'intersezione delle due generatrici r, $\overline{r}$ di R^μ, $\overline{R}^\mu$ contenute in α. Ciò vuol dire che gli altri $\nu - 1$ punti (C^ν, α) stanno su s.

D'altra parte quando una tale C^ν irriducibile, variando con continuità, arriva a spezzarsi in una retta a_i ed in una $C^{\nu-1}$, questa $C^{\nu-1}$ si deve appoggiare ad a_i in (almeno) un punto « di collegamento », attraverso il quale si stabilisce la connessione (delle riemanniane) delle due componenti.

Dunque *la rete* $\mathfrak{L}$, per quanto precede *determinabile razionalmente rispetto a* Σ, *è omaloidica.*

D'altra parte una curva $L = (F^m, R^\mu)$ taglia una conica C^2 di F^m in *due* punti variabili: quelli in cui C^2 è tagliata dalla generatrice di R^μ contenuta nel suo piano. Quindi, riferendo con una proiettività Γ_2 le curve della rete $\mathfrak{L}$ alle rette di un piano π razionalmente determinabile rispetto a Σ, si viene a generare una trasformazione birazionale T'_2, razionalmente determinabile rispetto a Σ, che muta in coniche di un fascio del piano π le coniche C^2 del fascio di F^m.

Ripensando alla genesi di F^m (n. 4) si riconosce allora che *nel caso* A_1 *si può determinare razionalmente rispetto a* Σ *una trasformazione cremoniana* $\Gamma_2 = T'_2 T_2$ *che trasforma il fascio delle* C^{2n} *in un fascio di coniche.*

15. - Andiamo ora ad esaminare il *caso* A_2.

Allora sarà $3m - 4 \geq 2 + 2d$, ossia, essendo $m \gtrsim 2$:

$$\mu' = 2m - 3 - d \geq 1 \ . \tag{5}$$

E sarà razionalmente determinabile rispetto a Σ il sistema lineare Λ' delle rigate algebriche $R^{\mu'}$ che soddisfano alle seguenti condizioni:

1') hanno la retta s come direttrice, di molteplicità:

$$\mu' - 1 = 2m - 4 - d \ ;$$

2') contengono una componente a_i di ciascuna delle $3m - 6 - 2d$ coniche degeneri di F^m razionalmente separabili rispetto a Σ e non contenute in G_d;

3') passano semplicemente per i d punti doppi di F^m.

Il sistema lineare Λ' *ha dimensione* $r' = 3$. Infatti ([21]), per la (5):

$$r' = 3\mu' - 2(3m - 6 - 2d) - d = 3 \ .$$

([21]) Vale anche qui un'osservazione analoga a quella contenuta nella nota ([18]) al n. 14.

Stavolta due $R^{\mu'}$ si tagliano fuori di s e delle rette a_i in una curva $C^{\nu'}$, di ordine:

$$\nu' = \mu'^2 - (\mu' - 1)^2 - (3m - 6 - 2d) = m - 1 \ ,$$

ed il numero delle intersezioni di una $C^{\nu'}$ con F^m che cadono fuori di s, delle a_i e dei d punti doppi di F^m è:

$$m\nu' - (m-2)(\nu' - 1) - (3m - 6 - 2d) - 2d = 2 \ .$$

Infine anche ora il numero delle intersezioni variabili di una C^2 di F^m con le superficie $R^{\mu'}$ è 2.

Cosicchè, riferite con una proiettività Γ_3 le superficie $R^{\mu'}$ del sistema lineare Λ' ai piani di uno spazio lineare S'_3 razionalmente determinato rispetto a Σ, ne risulta una *trasformazione cremoniana* Γ_3 *tra* l'S_3 di appartenenza di F^m e l'S'_3, *che muta* F^m *in una quadrica* F^2 *di* S'_3 *e le coniche* C^2 *del fascio* (s) *di* F^m *in un fascio di coniche* C'^2, *tagliate su* F^2 *dai piani per una retta* s', *determinata razionalmente rispetto a* Σ. La Γ_3 subordina tra F^m ed F^2 una trasformazione birazionale T'_2 e tra i fasci di coniche (s) ed (s') una proiettività Γ_1, entrambe determinate razionalmente rispetto a Σ.

Sia π un piano per s', razionalmente determinato rispetto a Σ.

La quadrica F^2 si può riferire birazionalmente al piano π con una T''_2, determinata razionalmente rispetto a Σ, proiettandovi ogni conica C'^2 dal polo del suo piano rispetto ad F^2. Il fascio (s') viene così mutato da T''_2 in un fascio-schiera di coniche di π.

Si riconosce pertanto che *anche nel caso* A_2 *si può determinare razionalmente rispetto a* Σ *una trasformazione cremoniana* $\Gamma_2 = T''_2 T'_2 T_2$ *che muta il fascio delle* C^{2n} *in un fascio-schiera di coniche* (22).

(22) Se s' risultasse tangente ad F^2 in un punto O, questo risulterebbe razionalmente determinato rispetto a Σ e in definitiva il fascio Σ si potrebbe ridurre cremonianamente ad un fascio di rette, senza introdurre irrazionalità aritmetiche.

16. - Rimangono da esaminare i casi B, B_1, B_2 (nn. 9, 13).

In ciascuno di essi tutte le $\gamma = 3m - 4 - 2d$ coniche degeneri di F^m situate in piani per s non contenenti i suoi d punti doppi sono razionalmente separabili rispetto a Σ. Esse costituiscono dentro al fascio (s) un gruppo G_γ razionalmente determinabile rispetto a Σ (n. 13), ma non necessariamente irriducibile.

Immaginiamo di aver effettivamente separato (e ciò per ipotesi si può fare senza introdurre irrazionalità aritmetiche) ciascuna delle coniche di G_γ nelle sue due componenti a_i, b_i. La separazione avverrà contemporaneamente in ciascuno dei sottogruppi razionalmente irriducibili di G_γ.

Comunque si potrà sempre determinare razionalmente rispetto a Σ un gruppo A_γ di rette a_i di F^m, tutte incidenti ad s, due qualunque delle quali non appartengano allo stesso piano per s. Inoltre ogni conica di G_γ avrà in A_γ una sola delle sue componenti.

Essendo $3m - 4 - 2d \geq 0$, $m \geq 2$, sarà:

$$\mu'' = 2m - 2 - d \geq 1 ,$$

e si potrà determinare razionalmente rispetto a Σ il sistema lineare Λ'' delle rigate algebriche $R^{\mu''}$ di ordine μ'', le quali:

1'') hanno s come direttrice di molteplicità $\mu'' - 1 = 2m - 3 - d$;

2'') contengono le $\gamma = 3m - 4 - 2d$ rette del gruppo A_γ;

3'') passano per i d punti doppi di F^m.

La dimensione del sistema lineare Λ'' è (23):

$$r'' = 3\mu'' - 2\gamma - d = 2 .$$

Due rigate $R^{\mu''}$ si tagliano fuori di s e delle γ rette a_i in una curva $C^{\nu''}$ di ordine

$$\nu'' = \mu''^2 - (\mu'' - 1)^2 - \gamma = m - 1 .$$

(23) Cfr. la nota (18) al n. 14.

Una di queste C^{m-1} generica non interseca F^m fuori di s, delle a_i e dei d punti doppi, essendo:

$$m(m-1)-(m-2)^2-\gamma-2d=0 \ .$$

Ora (nel piano del fascio Σ, e quindi) sulla superficie F^m si può scegliere un punto P senza introdurre irrazionalità aritmetiche. Si può anche supporre che P non cada su s o su una delle coniche degeneri di F^m. Risulteranno quindi determinati razionalmente rispetto a Σ il fascio delle rigate $R^{\mu''}$ (appartenenti a Λ'' e) passanti per P e la corrispondente C^{m-1}. Anch'essa passa per P ed ha perciò con F^m più intersezioni di quante non ne comporti il suo ordine.

Ma C^{m-1}, essendo intersezione fuori di s (e della a_i) di due $R^{\mu''}$, incontra un piano generico per s in un sol punto fuori di s. Perciò, se è riducibile, lo è in quanto contiene come parte una o più rette appoggiate ad s, generatrici comuni delle due $R^{\mu''}$.

Potranno quindi presentarsi due casi:

I) - C^{m-1} non contiene componenti rettilinee appartenenti ad F^m.

Allora la curva irriducibile C^* residua dalle eventuali componenti rettilinee di C^{m-1} appartiene ad F^m ed è unisecante alle coniche C^2 che vi tagliano i piani per s.

II) - C^{m-1} contiene qualche componente rettilinea appartenente ad F^m.

Una di esse non può essere che una componente delle coniche degeneri tagliate su F^m dai piani che da s ne proiettano i d punti doppi. E poichè astraendo da questa la C^{m-2} residua ha sempre con F^m una intersezione in più di quanto comporti il suo ordine ([24]), se ne trae come prima che la curva irriducibile C^* residua dalle eventuali componenti rettilinee di C^{m-1}

([24]) Infatti:

$$(m-2)(m-3)+(3m-4-2d)+2d-1=m(m-2)+1 \ .$$

appartiene ad F^m ed è unisecante alle coniche C^2 che vi tagliano i piani per s.

La possibilità di determinare razionalmente rispetto a Σ una curva razionale C^* irriducibile appartenente ad F^m ed unisecante delle coniche C^2 del fascio (s) dimostra che, *nei casi B, B_1, B_2, il fascio Σ si può trasformare cremonianamente in un fascio di rette, senza introdurre irrazionalità aritmetiche.* Infatti allora la F^m è « linearmente » razionale, e la sua rappresentazione piana T'_2 (nella quale le coniche C^2 del fascio (s) si mutano in rette di un fascio di centro S) si ottiene senza introdurre irrazionalità aritmetiche. Basta segare il fascio dei piani di asse s con un piano π non contenente s e razionalmente determinato rispetto a Σ. Questo piano π sega quello di ciascuna conica C^2 in una retta c, variabile in un fascio di centro $S = (s, \pi)$, cui la C^2 si può riferire birazionalmente, proiettandovela dal punto d'incontro con la unisecante C^*.