RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Sugli autoomeomorfismi del piano privi di punti uniti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 1-53

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__1_0>

SUGLI AUTOOMEOMORFISMI DEL PIANO PRIVI DI PUNTI UNITI

Memoria (*) *di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*).

In questa Memoria mi propongo di riunire i risultati ultimamente raggiunti nello studio delle traslazioni piane generalizzate - un riassunto di quanto sull'argomento era noto fino a tutto il 1940 trovandosi nella mia Memoria XII) (1).

Poichè desidero ottenere il mio scopo senza dovermi ridurre ad una semplice riesposizione di cose note, colgo l'occasione per illustrare un tentativo di dare un senso chiaro e preciso ad un passo di v. KERÉKJÀRTÓ [v. KERÉKJÀRTÓ, II), n. 5 (2)], dedicato al così detto « teorema generale di traslazione » (3). Naturalmente prendo in esame un caso particolare, non soltanto per maggiore chiarezza, ma anche perchè le ipotesi attuali elimineranno automaticamente alcune notevoli difficoltà. E debbo avvertire subito che anche in questo caso particolare la mia ricerca rappresenta un tentativo nel vero senso della parola: essa non risolve cioè il problema.

(*) Pervenuta in Redazione il 2 settembre 1948.

(1) La presente Memoria si chiude con una bibliografia, che non ha nessuna pretesa di completezza. Nel corso della ricerca, i singoli lavori verranno ricordati appunto in base alla numerazione stabilita in questa bibliografia.

(2) È forse doveroso avvertire esplicitamente che questo passo si trova in una breve comunicazione ad un congresso.

Ivi v. KERÉKJÀRTÓ delinea una estensione del suo metodo, costruito per dimostrare il teorema di BROUWER sulle traslazioni piane generalizzate e l'ultimo teorema geometrico di POINCARÉ.

(3) A proposito di questo teorema vedasi anche G. SCORZA DRAGONI, IX).

§ 1 – Preliminari. Richiami sulle traslazioni piane generalizzate.

1. - Ipotesi e notazioni. - In questo numero introduciamo alcune ipotesi ed alcune convenzioni, che vanno mantenute per tutta la durata della Memoria.

Lo spazio ambiente è il piano reale, euclideo, nel quale si suppone fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y), in guisa da soddisfare alla solita convenzione sul verso positivo delle rotazioni.

Inoltre

$$t$$

è una traslazione piana generalizzata, cioè una trasformazione topologica del piano in tutto se stesso, la quale conserva il senso delle rotazioni e non ammette punti invarianti.

E su t si facciano le ipotesi seguenti:

1) *t è periodica di periodo* 1 *rispetto alla x*; cioè, se il punto (x, y) è trasformato da t nel punto $(x' y')$, il punto $(x + 1, y)$ è mutato nel punto $(x' + 1, y')$; vale a dire, t è permutabile con la traslazione piana ordinaria

$$\vartheta$$

che muta il punto (x, y) nel punto $(x + 1, y)$;

2) *t ammette come rette invarianti sia il sostegno dell'asse x che la parallela a questo di equazione $y = 1$*; di guisa che t subordina un autoomeomorfismo della striscia

$$S : -\infty < x < +\infty \ , \quad 0 \leq y \leq 1 \ ;$$

3) *t muta il punto* $(0, 0)$ *in un punto di* (*ordinata nulla e di*) *ascissa positiva e minore di* 1; e quindi il punto $(x, 0)$ in un punto di (ordinata nulla e di) ascissa maggiore di x e minore di $x + 1$, attesa la 1) e l'assenza di punti uniti.

Orbene lo scopo di questa Memoria è di contribuire all'esame di qual partito si potrebbe eventualmente trarre dai risultati sulle traslazioni piane generalizzate, se ci si proponesse di pervenire, nell'indirizzo accennato da v. KERÉKJÀRTÓ nel n. 5 della sua Nota II), o meglio in un indirizzo a quello direttamente ispirato, ad una proposizione, per esempio, del tipo del seguente:

Nelle ipotesi 1), 2) e 3), o esiste una curva semplice e aperta, con un estremo sulla retta $y=0$ e l'altro sulla retta $y=1$ e con tutti i propri punti interni (cioè diversi dagli estremi) contenuti internamente alla striscia S, la quale curva non incontra la propria immagine nella ϑ e non taglia la propria immagine nella t; oppure esiste una linea semplice (= trasformata biunivoca e continua di una retta), contenuta nell'interno di S, trasformata in se stessa dalla ϑ e non tagliata mai dalla propria immagine nella t.

Si noti che una curva quale quella considerata non può mai coincidere con la propria immagine nella ϑ; mentre invece la linea risulta periodica nella x, di periodo 1.

E avvertiamo di nuovo, a scanso di equivoci, che questa Memoria non contiene una dimostrazione completa di questo enunciato.

2. - Archi di traslazione, traiettorie e loro campi adiacenti. – Per alleggerire l'esposizione dei paragrafi successivi e per agevolarne la comprensione, ricordo qui alcune proprietà, vere per la t in quanto essa è una traslazione piana generalizzata. In questo paragrafo non vi sono quindi novità di risultati; anzi frequenti sono le coincidenze, anche letterali, con passi di miei lavori precedenti.

Secondo BROUWER [BROUWER, III), pag. 38], una curva semplice e aperta, λ, è un **arco di traslazione** (di t), se λ e la propria immagine $t(\lambda)$ ([4]) hanno comune soltanto un punto, estremo sia per λ che per $t(\lambda)$. Se P è questo punto, $t^{-1}(P)$ è l'altro estremo di λ; i singoli punti P e $t^{-1}(P)$ sono individuati, non appena sia dato λ; allora $t^{-1}(P)$ è l'**origine** e P il **termine** di

([4]) Secondo una convenzione consueta, se A è un punto o un insieme di punti (del piano) ed n un intero relativo, indico con $t^n(A)$ l'immagine di A nella potenza n—esima di t.

λ. Il verso **positivo** di λ è quello che porta dall' origine al termine. Inoltre [BROUWER, III), teorema 7; v. KERÉKJÀRTÓ, III), pagg. 89-90; TERASAKA, I), pag. 62; SPERNER, I), teorema 3; si vegga anche SCORZA DRAGONI, I), nota (37) a piè di pag. 169] per ogni punto del piano passano infiniti archi di traslazione.

Se λ è un arco di traslazione (di t), le immagini di λ nelle successive potenze di t costituiscono una linea, che verrà indicata con $\sigma(\lambda)$ e che sarà detta la **traiettoria** (di t) generata da λ. Una traiettoria

$$\sigma(\lambda) = \ldots \dot{+}\, t^{-2}(\lambda) \dot{+}\, t^{-1}(\lambda) \dot{+}\, \lambda \dot{+}\, t(\lambda) \dot{+}\, t^{2}(\lambda) \dot{+} \ldots$$

è notoriamente una linea semplice [BROUWER, III), teorema 1; v. KERÉKJÀRTÓ, III), pagg. 90-91; SPERNER, I), teorema 4; SCORZA DRAGONI, XIX), n. 21]; anzi essa è addirittura omeomorfa ad una retta [BROUWER, III), teorema 2; SPERNER, I), teorema 12; SCORZA DRAGONI, I), n. 9; GHEZZO, I), n. 3] e illimitata nei due sensi [BROUWER, III), teoremi 3 ed 8; GHEZZO, I), n. 5]. Per esempio, nelle ipotesi attuali la retta sostegno dell'asse x è una traiettoria di t.

Una traiettoria $\sigma(\lambda)$ individua (nel piano) due insiemi aperti e semplicemente connessi, i **campi adiacenti** a $\sigma(\lambda)$, nei quali si distribuiscono i punti che non appartengono a $\sigma(\lambda)$ e che possono essere congiunti con un punto P, prefissabile ad arbitrio, di $\sigma(\lambda)$ mediante una curva semplice e aperta, che abbia P come estremo e soltanto il punto P su $\sigma(\lambda)$ [BROUWER, III), teorema 5 e pag. 46; TREVISAN, I); GHEZZO, I), n. 9]. Per esempio, nelle ipotesi attuali, i campi adiacenti alla retta $y = 0$ sono dati uno dai punti del piano a ordinata positiva, l'altro da quelli a ordinata negativa. Si badi bene che una traiettoria e i suoi due campi adiacenti possono benissimo non esaurire tutto il piano, almeno nel caso di una traslazione piana generalizzata qualunque [BROUWER, III), pag. 40].

I campi adiacenti ad una traiettoria (di t) sono invarianti nella t, al pari della traiettoria. La loro presenza ci autorizza a distinguere e a considerare le due bande di una traiettoria. Avverto infine che ritengo inessenziale l'uso della nozione di campo adiacente ad una traiettoria [cfr. v. KERÉKJÀRTÓ, III), dove non si parla esplicitamente nemmeno delle traiettorie]; ma poichè di questa nozione io me ne son servito nei miei lavori precedenti, così continuo ad utilizzarla anche in questo.

3. - Pseudoarchi di traslazione di prima specie. - Proseguiamo nel ricordare nozioni utili per il seguito, e tutte provviste di senso soltanto se riferite ad una certa traslazione piana generalizzata, che (a meno di esplicito avviso in contrario) per noi sarà sempre la traslazione t del n. 1.

Una curva semplice e aperta τ, di estremi A e B, è uno **pseudoarco di traslazione** di **prima specie**, di **origine** A e **termine** B, se son soddisfatte le relazioni

$$\tau \cdot t^{-1}(A) = \tau \cdot t(A) = 0\,; \qquad \tau \cdot t^{-1}(B) + \tau \cdot t(B) \neq 0\,;$$
$$(\tau - B) \cdot t(\tau - B) = 0\,;$$

cioè, se τ non passa nè per $t^{-1}(A)$, nè per $t(A)$, se τ e $t(\tau)$ hanno sì punti comuni, ma non comuni punti che risultano interni sia a τ che a $t(\tau)$.

Come conseguenza delle relazioni scritte, si riconosce che τ o contiene $t(B)$, o contiene $t^{-1}(B)$, le due alternative escludendosi a vicenda (naturalmente nelle deduzioni interviene anche il fatto che t è una traslazione piana generalizzata). Nel primo caso $t(B)$ è interno a τ, e il sottoarco di τ di estremi B e $t(B)$ è l'unico arco di traslazione contenuto in τ; analogamente per $t^{-1}(B)$ nella seconda alternativa [v. Kerékjàrtó, III), pag. 91; Scorza Dragoni, I), n. 15; infine, per queste come per le altre affermazioni di questo numero, si veda anche Brouwer III), pag. 47].

Indichiamo qui due teoremi sugli pseudoarchi di traslazione di prima specie, assai utili per il seguito:

a) *Sia* σ *una traiettoria e* Σ *uno dei due campi adiacenti a* σ; τ *uno pseudoarco di traslazione di prima specie, contenuto in* Σ, *a meno dell'origine* A, *situata su* σ; σ^0 *la traiettoria generata dall'arco di traslazione* λ^0 *contenuto in* τ; *allora* σ^0 *è contenuta per intero in* Σ *e* $\sigma + (\tau - \lambda^0)$ *appartiene completamente ad un medesimo campo adiacente a* σ^0;

inoltre:

b) Ferme le ipotesi del teorema precedente e detto Σ^0 quel campo adiacente a σ^0 che non contiene σ, se τ^0 è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, contenuto in Σ^0, a meno dell'origine A^0, interna a λ^0, la curva somma di τ^0 e del sottoarco di τ di estremi A ed A^0 è semplice ed aperta, ed è anzi ancora uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine A e contenuto in Σ, a meno naturalmente dell'origine.

Per delle dimostrazioni esplicite di questi teoremi, si veda, per esempio, Scorza Dragoni, I), nn. 25, 44, 45 e II), n. 11 e nota ([58]) a piè di pag. 248; si confronti anche con quanto è detto in v. Kerékiàrtó, III), pag. 96.

Accanto al teorema *b)* conviene ricordare questo suo complemento, implicito, per esempio, in Scorza Dragoni, II), n. 16;

c) Ferme le ipotesi del teorema a) e detto Σ^0 quel campo adiacente a σ^0 che non contiene σ, se c^0 è una curva semplice e aperta, contenuta in Σ^0, a meno di un estremo, C^0, interno a λ^0, e priva di punti comuni con $t(c^0)$, la curva somma di c^0 e del sottoarco di τ di estremi A e C^0 è ancora semplice ed appartiene a Σ, a meno dell'estremo A, e non incontra la propria immagine nella τ.

E ancora:

d) Se τ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, $t^m(\tau) \cdot t^n(\tau) = 0$ per ogni coppia di interni relativi m ed n soddisfacenti alla $|m - n| \geq 2$;

quest'ultimo teorema si trova già esplicitamente enunciato per $m = -1$ ed $n = 1$ in lavori precedenti [v. Kerékjàrtó, III), pag. 92, teorema III); Scorza Dragoni, I), n. 24] ed è facile dedurlo dalla proposizione del n. 25 della mia Memoria I), e dal fatto che [Ghezzo, I), n. 6] esso è vero, se τ, invece di uno pseudoarco di traslazione di prima specie, è una curva semplice e aperta che non incontra la propria immagine.

4. - Archi e pseudoarchi elementari di traslazione. - Rammentiamo che nel piano è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, di assi x e y. Ebbene (con riferimento tacito a questo sistema di coordinate) un arco di traslazione è un **arco**

elementare di traslazione, se esso si riduce ad una spezzata, i cui lati (in numero finito) siano, ciascuno, diretto come uno degli assi coordinati (5). I vertici e i lati della spezzata sono anche detti **vertici** e **lati** dell'arco elementare di traslazione. Se il numero di questi lati si riduce ad uno soltanto, l'arco elementare di traslazione si chiama anche **segmento elementare di traslazione.**

Sia

$$\lambda = Q_0\, Q_1 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_{n-1}\, Q_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

un arco elementare di traslazione di n lati; e si suppongano i simboli scelti in guisa da aversi

$$Q_n = t\,(Q_0)\ ,$$

convenzione questa che, insieme col fatto che λ è una curva semplice e aperta, individua senza ambiguità anche il nome da dare ai singoli vertici di λ, se n è maggiore di 1. *Inoltre si supporrà sempre che gli eventuali vertici di λ siano vertici effettivi, nel senso che due eventuali lati consecutivi di λ siano fra loro ortogonali.*

Se $n \geq 2$, i segmenti $Q_0\, Q_1$ e $Q_{n-1}\, Q_n$ sono i lati estremi di λ; se $n = 2$, il vertice Q_1 di λ costituisce anche il **nucleo** di λ; se $n > 2$, il **nucleo** di λ è la spezzata $Q_1\, Q_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_{n-2}\, Q_{n-1}$.

Si supponga ora che $\Sigma(\lambda)$ sia uno dei due campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$ e, ammesso che n non sia inferiore a 2, denoti Q_i un vertice di λ (di guisa che risulta $n > i > 0$). Allora i punti interni all'angolo retto $\widehat{Q_{i-1} Q_i Q_{i+1}}$, e sufficientemente prossimi a Q_i, sono o tutti interni o tutti esterni a $\Sigma(\lambda)$; in corrispondenza Q_i è di **prima** o di **seconda categoria** rispetto al campo $\Sigma(\lambda)$, e naturalmente di seconda o di prima rispetto all'altro campo adiacente a $\sigma(\lambda)$.

(5) Questa definizione è un po' più restrittiva di quella adottata in Scorza Dragoni, XXII), n. 2; ma essa è pur sempre sufficiente per gli scopi attuali (e del resto si tratta di una restrizione più che altro apparente).

Uno pseudoarco di traslazione di prima specie sarà del pari detto **elementare,** se esso è costituito da una spezzata, di un numero finito di lati, ciascuno diretto come uno degli assi coordinati, *due eventuali lati consecutivi della spezzata non essendo mai allineati, bensì ortogonali fra di loro.* I vertici ed i lati della spezzata sono anche detti **vertici** e **lati** dello pseudoarco elementare di traslazione. Se il numero di questi lati si riduce ad uno, lo pseudoarco di traslazione sarà anche chiamato uno **pseudosegmento elementare di traslazione** (di prima specie). L'arco di traslazione contenuto in uno pseudoarco elementare di traslazione di prima specie è sempre un arco elementare di traslazione; e se lo pseudoarco si riduce ad uno pseudosegmento, l'arco è un segmento di traslazione; ma non viceversa.

5. - Segmenti e raggi fondamentali; spezzate e semilinee metafondamentali. - Si conservi ai simboli il significato attribuito nel numero precedente.

Un segmento $g = RS$ è un **segmento fondamentale,** relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$, di **origine** R, se:

1) il punto R è interno a λ;

2) g è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine R;

3) g è normale in R ad uno dei lati di λ contenenti R [questi lati potendo essere due, e non uno, soltanto se R è un vertice di λ];

4) i punti di g, diversi da R, appartengono tutti a $\Sigma(\lambda)$.

Una semiretta o raggio r di origine R, è un **raggio fondamentale,** relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$, di **origine** R, se;

1) il punto R è interno a λ;

2) la semiretta r e la sua immagine $t(r)$ non hanno punti comuni;

3) r è in R normale a uno dei lati di λ contenenti R;

4) i punti di r, diversi da R, appartengono tutti a $\Sigma(\lambda)$.

Un punto R di λ è un punto **fondamentale** di λ, rispetto a $\Sigma(\lambda)$, se;

1) è interno a λ;

2) è origine di un segmento o di un raggio, fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, questa seconda condizione implicando la precedente.

Una spezzata $z = RT \dot{+} TS$, di due lati non nulli ed ortogonali fra di loro (anzi, come sarà implicito in quanto diremo, diretto ciascuno come uno degli assi), è una **spezzata metafondamentale,** relativa a λ e $\Sigma(\lambda)$, di origine R, se:

1) il punto R è interno a λ;

2) z è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine R;

3) Il segmento RT è normale in R ad uno dei lati di λ contenenti R;

4) i punti di z distinti da R appartengono tutti a $\Sigma(\lambda)$;

5) l'arco di traslazione contenuto in z si riduce ad un segmento, non contenente il vertice di z ed avente un estremo in S (6).

Una semilinea $w = RU \dot{+} u$, dove RU è un segmento non nullo ed u una semiretta di origine U e normale ad RU, è una **semilinea metafondamentale,** relativa a λ e $\Sigma(\lambda)$, di origine R, se:

1) il punto R è interno a λ;

2) la semilinea w e la sua immagine $t(w)$ non hanno punti comuni;

3) il segmento RU è normale in R ad uno dei lati di λ contenenti R;

4) i punti di w distinti da R appartengono tutti a $\Sigma(\lambda)$.

Un punto R di λ è **metafondamentale** per λ rispetto a $\Sigma(\lambda)$, se:

1) è interno a λ, condizione implicita, questa, in quella che segue;

2) è origine di una spezzata o di una semilinea metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

(6) Questa condizione equivale a dire che l'arco di traslazione contenuto in z ha un estremo in S e l'altro interno a TS.

Si noti che un punto di λ, fondamentale rispetto a $\Sigma(\lambda)$ ed interno ad uno dei lati di λ, è origine o di un raggio fondamentale, univocamente determinato, o di un segmento fondamentale, univocamente determinato anch'esso, le due alternative escludendosi a vicenda.

Invece un punto di λ, metafondamentale rispetto a $\Sigma(\lambda)$, può essere, anche se interno a uno dei lati di λ, origine contemporaneamente di più spezzate o di più semilinee metafondamentali.

È poi manifesto che un vertice di λ, di prima categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, non può essere per λ e $\Sigma(\lambda)$ fondamentale o metafondamentale.

Si osservi infine che, se la semilinea w considerata è metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, dalle condizioni impostele segue che il segmento RU ed il raggio u sono, ciascuno, diretti come uno degli assi coordinati.

6. - Teoremi di esistenza. - Come già nel n. 4, sia $\lambda = Q_0 Q_1 \dotplus \ldots \dotplus Q_{n-1} Q_n$ un arco elementare di traslazione di n lati, di origine Q_0 e termine Q_n e (se $n > 1$) di vertici $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$; $\sigma(\lambda)$ sia la traiettoria generata da λ e $\Sigma(\lambda)$ uno dei due campi a lei adiacenti.

Inoltre si indichi con m il numero (eventualmente nullo) dei vertici di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

Allora sussistono i seguenti teoremi:

a) Se $n = 1$ (e quindi $m = 0$), esistono punti di λ fondamentali per $\Sigma(\lambda)$ -
[v. Kerékjártó, III), pag. 95; Scorza Dragoni, I), nn. 28 e 29];

b) Se $n = 2$ ed $m = 0$, ogni lato di λ contiene (nell'interno) punti fondamentali relativi a λ e $\Sigma(\lambda)$ -
[Scorza Dragoni, XXII), n. 6; ciò si trova implicito anche in v. Kerékjártó, III), pag. 96];

c) Se $n \geq 3$ ed $m = 0$, il nucleo di λ contiene (nell'interno) almeno un punto fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$; -
[Scorza Dragoni, XX), teorema III); Scorza Dragoni, XXII), n. 6; un cenno di ciò nel caso $n = 3$ sembra ravvisarsi anche in v. Kerékjártó, II), n. 3, alinea primo];

d) Se $m > 0$ *(e quindi* $n > 1$*), o* λ *contiene punti fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$*, oppure il nucleo di* λ *ne contiene di metafondamentali* -
[SCORZA DRAGONI, XXII), n. 7];

e) Se $m > 0$ *(e quindi* $n > 1$*), e se* Q_1 *è di prima categoria per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$*, o il nucleo di* λ *contiene punti metafondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$*, o la spezzata* $Q_1 Q_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_{n-1} Q_n$ *contiene punti fondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$ -
[SCORZA DRAGONI, XXII), n. 7];

f) Se $m > 0$ *(e quindi* $n > 1$*) e se* Q_{n-1} *è di prima categoria per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$*, o il nucleo di* λ *contiene punti metafondamentali per* λ *e* $\Sigma(\lambda)$*, o la spezzata* $Q_0 Q_1 \dot{+} \ldots \dot{+} Q_{n-2} Q_{n-1}$ *ne contiene di metafondamentali* -
[SCORZA DRAGONI, XXII), n. 7]. Una maggiore precisazione, nei casi $n = 2$ ed $m = 0$ oppure $n \geq 2$, $m > 0$ e $Q_1 [Q_{n-1}]$ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$, si trova in SCORZA DRAGONI, XXVI); ma qui ci contenteremo di questo cenno.

7. - Segmenti caratteristici e rette caratteristiche di un segmento elementare di traslazione. Decomposizioni regolari. - Sia $\lambda = Q_0 Q_1$ un segmento elementare di traslazione, di origine Q_0 e termine Q_1; $\sigma(\lambda)$ la traiettoria generata da λ; $\Sigma(\lambda)$ il campo adiacente a $\sigma(\lambda)$, situato alla sinistra di chi percorra λ nel verso positivo, cioè il campo **positivo**; e $\Sigma'(\lambda)$ l'altro campo adiacente, quello **negativo.**

I **segmenti caratteristici positivi** di λ sono i segmenti di traslazione contenuti nei segmenti fondamentali relativi a λ e $\Sigma(\lambda)$; in maniera analoga si definiscono i segmenti caratteristici **negativi.**

Le **rette caratteristiche positive** e **negative,** di λ, sono, rispettivamente, le rette che contengono raggi fondamentali, rispettivamente relativi a λ e $\Sigma(\lambda)$ ed a λ e $\Sigma'(\lambda)$.

Naturalmente i concetti di rette e segmenti caratteristici si possono, volendo, porre per un qualunque segmento di traslazione.

È poi evidente che i segmenti caratteristici di un segmento elementare di traslazione sono anch'essi segmenti elementari di traslazione, e che le rette caratteristiche hanno la direzione dell'asse x o quella dell'asse y.

Le definizioni qui poste sono casi particolari (perfettamente sufficienti per gli scopi attuali) di quelle date in Scorza Dragoni, XXVII), prefazione. Ivi si parla di segmenti e raggi fondamentali, rette e segmenti caratteristici di un arco di traslazione qualunque, e naturalmente non vi è luogo di imporre condizioni di ortogonalità; e si accenna soltanto a condizioni del tipo quando si considerano segmenti di traslazione paralleli ad una direzione fissa. Questi cenni ci saranno molto utili adesso, che le ipotesi attuali ci consentono definizioni più restrittive ed enunciati più penetranti.

Incominciamo col trasportare al caso attuale la nozione [data in Scorza Dragoni, XXVII), prefazione] di decomposizione regolare di una totalità di segmenti di traslazione di una traslazione piana generalizzata; e naturalmente consideriamo un insieme W di segmenti elementari di traslazione di t.

La totalità W si dice **decomponibile in modo regolare, suscettibile di una decomposizione regolare,** se è possibile scindere W in un numero finito di classi $W_1, \ldots, W_p$, costituenti una **decomposizione regolare** di W, tali, che:

1) $W_1, \ldots, W_p$ siano a due a due prive di elementi comuni;

e che:

2) i segmenti di traslazione contenuti in W_n $(n = 1, \ldots, p)$ abbiano comune almeno uno stesso segmento caratteristico positivo o una stessa retta caratteristica positiva ed almeno uno stesso segmento caratteristico negativo o una stessa retta caratteristica negativa.

Orbene, è noto che:

Ogni totalità di segmenti elementari di traslazione di t, costituita da segmenti con l'origine in un insieme limitato (del piano), è suscettibile di una decomposizione regolare,

come risulta dal n. 19 della mia Memoria XXVII), nel quale anzi vien dato un teorema ancor più generale.

8. - Elementi caratteristici e rette caratteristiche di prima categoria per un arco elementare di traslazione con due lati. Decomposizioni semiregolari. - Sia $\lambda = \varrho_0 \varrho_1 \dot{+} \varrho_1 \varrho_2$ un segmento elementare di traslazione con due lati; $\sigma(\lambda)$ la traiettoria generata da λ; $\Sigma(\lambda)$ il campo adiacente a $\sigma(\lambda)$ rispetto al quale ϱ_1 è di prima categoria, brevemente, il campo adiacente di **prima categoria,** l'altro campo adiacente verrà detto di **seconda categoria** (si noti che queste nozioni dipendono da λ).

Diremo **segmenti caratteristici di prima categoria** di λ i segmenti di traslazione contenuti nei segmenti fondamentali relativi a λ e a $\Sigma(\lambda)$; e chiameremo **rette caratteristiche di prima categoria** di λ le rette che contengono raggi fondamentali relativi a λ e $\Sigma(\lambda)$.

Una totalità W^0 di archi elementari di traslazione a due lati viene detta **suscettibile di una decomposizione semiregolare,** o **decomponibile in modo semiregolare,** se è possibile scindere W^0 in un numero finito di classi $W_1^0, \ldots, W_p^0$, costituenti una **decomposizione semiregolare** di W^0, tali che:

1) $W_1^0, \ldots, W_p^0$ siano a due a due prive di elementi comuni; e che:

2) gli archi elementari di traslazione contenuti in W_n^0 $(n = 1, \ldots, p)$ abbiano comune almeno uno stesso segmento caratteristico di prima categoria o una stessa retta caratteristica di prima categoria.

Ebbene, come corollario di risultati precedenti [Scorza Dragoni, XXVII), n. 24] si ha che:

Una totalità di archi elementari di traslazione a due lati è decomponibile in modo semiregolare, se i suoi elementi sono contenuti in uno stesso rettangolo;

e quest'ultima condizione è certamente soddisfatta se le origini di questi elementi descrivono un insieme limitato (perchè allora è limitato anche l'insieme descritto dal termine di quegli elementi, ecc.).

9. - Segmenti ortofondamentali e spezzate parafondamentali. Teoremi di esistenza. - Sia $\lambda = \varrho_0 \varrho_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \varrho_{n-1} \varrho_n$ un arco elementare di traslazione di n lati; $\Sigma(\lambda)$ sia uno dei campi adiacenti alla traiettoria $\sigma(\lambda)$ generata da λ; denoti m il numero, eventualmente nullo, dei vertici di λ di seconda categoria rispetto a $\Sigma(\lambda)$.

Un segmento elementare di traslazione $\gamma = Gt(G)$ è un segmento **ortofondamentale** rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) l'intersezione di γ e λ non è vuota, e contiene anzi punti interni a λ;

2) γ è contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$, ed esistono punti di γ interni a $\Sigma(\lambda)$ - cioè i punti di γ appartenenti a $\sigma(\lambda)$ non esauriscono γ;

3) i punti interni a γ o sono interni a $\Sigma(\lambda)$ o sono interni a λ.

In formule, le 1), 2) e 3) diventano

$$[\lambda - (Q_0 + Q_n)] \cdot \gamma \neq 0 ;$$

$$[\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)] \cdot \gamma = \gamma , \quad \Sigma(\lambda) \cdot \gamma \neq 0 ;$$

$$[t(\lambda) \dot{+} t^{-1}(\lambda) \dot{+} t^2(\lambda) \dot{+} t^{-2}(\lambda) \dot{+} \ldots .] \cdot \gamma \subset G + t(G) ;$$

e si riconosce quindi che i segmenti ortofondamentali sono anche segmenti quasifondamentali, secondo una terminologia introdotta da me altrove [Scorza Dragoni, XX), n. 2], la differenza consistendo in questo, che adesso si vuole diversa da zero l'intersezione $[\lambda - (Q_0 + Q_n)] \cdot \gamma$ e non soltanto la $\lambda \cdot \gamma$.

punti interni di λ ed appartenenti al segmento ortofondamentale γ son detti **ortofondamentali** per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Uno, $\Sigma(\gamma)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\gamma)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e l'altro contiene tutti i punti di $\sigma(\lambda)$ non appartenenti a $\sigma(\gamma)$, come è noto [Scorza Dragoni, XX), lemma IX)]. Se $\tau = RS$ è un segmento fondamentale, relativo a γ e $\Sigma(\gamma)$, di origine R, e se R appartiene a λ (nel qual caso R è anche interno a λ), R e τ son fondamentali anche rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$, come è evidente [e come del resto è implicito nella dimostrazione data in Scorza Dragoni, XV), lemma V); ved. anche Scorza

Dragoni, XX), lemma XVII)]. Invece se R, interno a γ, non appartiene a λ, esiste su λ almeno un punto interno, F, che sia interno a λ e tale che il segmento FR e λ abbiano comune soltanto F; allora anche FR e $\sigma(\lambda)$ hanno comune soltanto il punto F [in virtù della 3)], epperò FR appartiene a $\Sigma(\lambda)$, al pari di R, una volta privato del punto F; ed $FR \dotplus RS$ è, come si riconosce facilmente, uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine F, dopo di che $FR \dotplus RS$ è anche una spezzata metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Un arco elementare di traslazione $\delta = D_0 D_1 \dotplus D_1 D_2$ $[D_2 = t(D_0)]$, con due lati, è una spezzata **parafondamentale** rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1′) posto $\delta' = D_0 D_1$ e $\delta'' = D_1 D_2$, se δ' non ha punti interni a λ, esiste un segmento $d' = D_1 D'$ tale che δ' e d' siano allineati ed abbiano comune soltanto D_1, che d' abbia soltanto l'estremo D' su $\sigma(\lambda)$, questo estremo risultando anzi interno a λ, che d' non incontri $t(d')$, $t^{-1}(\delta)$ e $t(\delta)$; analogamente, se δ'' non ha punti interni a λ, esiste un segmento $d'' = D_1 D''$ tale che δ'' e d'' siano allineati ed abbiano comune soltanto D_1, che d'' abbia soltanto l'estremo D'' su $\sigma(\lambda)$, questo estremo risultando anzi interno a λ, che d'' non incontri $t(d'')$, $t^{-1}(\delta)$, $t(\delta)$;

2′) δ è contenuto in $\sigma(\lambda) + \Sigma(\lambda)$, ed esistono punti di δ interni a $\Sigma(\lambda)$;

3′) i punti interni a δ o sono interni a $\Sigma(\lambda)$ o sono interni a λ;

4′) il campo di prima categoria adiacente a $\sigma(\delta)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$.

Si noti che se nessun punto di δ' è interno a λ, di guisa che esiste d', la curva semplice aperta $\tau' = d' \dotplus \delta' \dotplus t^{-1}(\delta'')$ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine D'; analogamente per la curva $\tau'' = d'' \dotplus \delta'' \dotplus t(\delta')$, se δ'' non ha punti interni a λ. E la cosa si riconosce facilmente. Di qui si trae che, nel primo caso, tutti i punti di d' distinti da D' sono interni [cfr. Scorza Dragoni, I), n. 25] ad uno stesso campo adiacente a $\sigma(\delta)$, il quale non potrà essere che quello di seconda categoria; considerazioni analoghe valgono nel secondo caso. E ancora: nel primo caso D', che non appartiene a $\sigma(\delta)$, è un punto di $\sigma(\lambda)$ contenuto nel campo di seconda categoria adiacente a $\sigma(\delta)$, inoltre $\sigma(\lambda)$ o $\sigma(\delta)$ non si tagliano mai, a norma della 4'), dunque un punto di $\sigma(\lambda)$ o appartiene a $\sigma(\delta)$ o è interno al campo di seconda categoria adiacente a $\sigma(\delta)$; analogamente nel secondo caso. Inoltre, nel primo caso tutti i punti di d' diversi da D' sono interni a $\Sigma(\lambda)$: infatti, in questa ipotesi, D_1, che non può essere interno a λ, a norma della 3') deve essere interno a $\Sigma(\lambda)$, da cui la tesi, data la $\sigma(\lambda) \cdot d' = D'$; analogamente nel secondo caso. Circostanze analoghe si presentano anche se $\delta \cdot \lambda$ non è vuota, e precisamente nel senso che allora, in virtù della 2') e a norma di risultati noti [cfr., per esempio, Scorza Dragoni, XX), lemma IX)], uno dei due campi adiacenti a $\sigma(\delta)$ è contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e l'altro contiene tutti i punti di $\sigma(\lambda)$ che non appartengono a $\sigma(\delta)$; e la 4') dice poi che questo ultimo è quello di seconda categoria e il primo quello di prima categoria.

Gli eventuali punti di δ interni a λ e i punti D' e D'' (se esistono) son detti **parafondamentali** per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Se si tengono presenti le definizioni introdotte nel n. 3 della mia Memoria XX), si riconosce facilmente che i punti là detti semifondamentali in senso stretto son anche parafondamentali, per poco che siano interni a λ; e che le spezzate semifondamentali in senso stretto son anche parafondamentali. Dopo di ciò, il teorema IV) di quella mia Memoria [Scorza Dragoni, XX), pag. 97] porge immediatamente che:

Se λ è un arco elementare di traslazione e $\Sigma(\lambda)$ uno dei campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$, esiste (almeno) un raggio fondamentale, relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$, ovvero esiste (almeno) un segmento, rispetto a λ e $\Sigma(\lambda)$ o fondamentale od ortofondamentale, oppure esiste (almeno) una spezzata parafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$; queste alternative non si escludono a vicenda. Se λ è un segmento, oppure se λ ha due lati e $\Sigma(\lambda)$ è per λ il campo di prima categoria adiacente a $\sigma(\lambda)$, ogni lato di λ contiene almeno un punto fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$.

10. – Corollari. – Come ho già avuto occasione di affermare altrove [Scorza Dragoni, XX), n. 40, oss. 4); XXII), prefazione], l'ultimo teorema del numero precedente si presta a dedurre quelli del n. 6.

A ciò bastano evidentemente le osservazioni che seguono.

Sia λ un arco elementare di traslazione e $\Sigma(\lambda)$ uno dei campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$.

Denoti γ un segmento ortofondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$, $\Sigma(\gamma)$ il campo adiacente a $\sigma(\gamma)$ contenuto in $\Sigma(\lambda)$, K un punto di γ interno a λ, H un punto fondamentale per γ e $\Sigma(\gamma)$.

Allora H è per definizione interno a γ; quindi, a norma delle 1) e 3) del n. 9, è lecito supporre il segmento KH dotato del solo punto K comune con λ (in caso contrario basterebbe sostituire K col più vicino ad H dei punti comuni a λ ed HK), a patto naturalmente di non escludere che HK possa degenerare nel solo punto H, se H stesso è interno a λ. Dopo di ciò, per la 3) del n. 9, tutti i punti di KH diversi da K risultano interni a $\Sigma(\lambda)$. Inoltre, poichè H è interno a γ e K appartiene a γ, il segmento KH non ha punti comuni con la sua immagine nella t.

Se H è origine di un segmento fondamentale HH' relativo a γ e $\Sigma(\gamma)$, è ormai facile dedurre [cfr. peraltro SCORZA DRAGONI, II), nota ([58]) a piè di pag. 248] che la spezzata $KH \dot{+} HH'$ è sempre uno pseudoarco (elementare) di traslazione, di prima specie, di origine K; che tutti i punti di $KH \dot{+} HH'$ distinti da K appartengono a $\Sigma(\lambda)$; che l'arco di traslazione contenuto in $KH \dot{+} HH'$ è il segmento di traslazione contenuto in HH'. In definitiva: se $H = K$, HH' è un segmento fondamentale anche per λ e $\Sigma(\lambda)$; se $H \neq K$, $KH \dot{+} HH'$ è una spezzata metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Con ragionamenti analoghi si riconosce che se è $H = K$ ed H è origine di un raggio h, fondamentale per γ e $\Sigma(\gamma)$, h è anche fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$; e che se è $H \neq K$ ed H è del pari origine di un raggio h, fondamentale per γ e $\Sigma(\gamma)$, la semilinea $KH \dot{+} h$ è metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$.

Insomma: o K è fondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$ o K è metafondamentale.

Denoti ora $\delta = D_0 D_1 \dot{+} D_1 D_2$ una spezzata parafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, $\Sigma(\delta)$ sia il campo adiacente a $\sigma(\delta)$ e contenuto in $\Sigma(\lambda)$ e $\Sigma'(\delta)$ l'altro campo adiacente a $\sigma(\delta)$: allora D_1 è di prima categoria rispetto a $\Sigma(\delta)$, e (quindi) di seconda rispetto a $\Sigma'(\delta)$. E si ponga di nuovo $\delta' = D_0 D_1$ e $\delta'' = D_1 D_2$. E sia M' un punto fondamentale relativo a δ e $\Sigma(\delta)$ contenuto a δ' (e quindi interno a δ', perchè necessariamente diverso da D_1); M'' un punto fondamentale relativo a δ e $\Sigma(\delta)$ interno a δ''. Inoltre, se δ' ha punti che risultino interni a λ, sia L' uno di questi (eventualmente eguale ad M'), tale che il segmento $L'M'$ abbia soltanto il punto L' su λ; se δ'' ha punti che risultino interni a λ, sia L'' uno di questi, tale che $L''M''$ e λ abbiano comune soltanto il punto L'': la legittimità di queste posizioni, segue dalla 3') del n. 9. Se nessun punto di δ' è interno a λ, si dia a $d' = D'D_1$ lo stesso significato che nella 1') del numero precedente; così pure per $d'' = D''D_1$, se nessun punto di δ'' è interno a λ.

Ciò premesso, si noti che nè $L'M'$ nè $D'M'$ incontrano le loro immagini nella t; analogamente per $L''M''$ ed $M''D''$.

Inoltre un ragionamento analogo a quello svolto a proposito di K e γ, prova che L', se esiste, è o fondamentale o metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$; e che in questo secondo caso alla spezzata o semilinea metafondamentale di origine L' si può imporre di avere un vertice in M' e di contenere il segmento od il raggio fondamentale di origine M' e relativo a δ e $\Sigma(\delta)$. E così per L''.

Invece, se esiste d' e se M' è origine di un segmento $M'N'$ fondamentale per δ e $\Sigma(\delta)$, un ragionamento analogo a quello svolto per K e γ, prova che $D_1 M' \dotplus M'N'$ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine D_1; dopo di che basta ricordare (n. 9) che i punti di $D'D_1$ diversi da D_1 sono interni a $\Sigma'(\delta)$, che quelli di $D_1 M' \dotplus M'N'$ appartengono a $\sigma(\delta) + + \Sigma(\delta)$ e che le traiettorie e i relativi campi adiacenti sono invarianti nella t, per dedurre che $D'D_1 \dotplus D_1 M' \dotplus M'N'$ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di origine D', atteso che $D'D_1$ non incontra $t(D'D_1)$. E in questo caso D' è origine di una spezzata metafondamentale, che ha un vertice in M' e contiene il segmento di origine M' e fondamentale per δ e $\Sigma(\delta)$.

E ancora, se esiste D' e se M' è origine di un raggio fondamentale m' relativo a δ e $\Sigma(\delta)$, D' è sempre un punto metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, origine di una semilinea metafondamentale che ha un vertice in M' e contiene il raggio m' fondamentale per δ e $\Sigma(\delta)$.

In maniera del tutto analoga si riconosce che D'', se esiste, è un punto metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, origine di una spezzata metafondamentale del tipo $D''M'' \dot{+} M''N''$ o di una semilinea metafondamentale del tipo $D''M'' \dot{+} m''$, con $M''N''$ segmento ed m'' raggio fondamentali per δ e $\Sigma(\delta)$.

Questo sarebbe sufficiente per dimostrare l'affermazione fatta all'inizio del numero attuale. Ma prima di chiudere questo numero, osserviamo ancora che dalla proposizione *b*) del n. 3 è facile dedurre un risultato affine a quelli qui stabiliti.

Precisamente $\tau = RS$ sia un segmento fondamentale relativo a λ e $\Sigma(\lambda)$ e Q un punto fondamentale relativo al segmento di traslazione λ^0, contenuto in τ, e a quel campo adiacente a $\sigma(\lambda^0)$ che non contiene $\sigma(\lambda)$, diciamolo $\Sigma(\lambda^0)$. Allora da quella proposizione *b*) segue subito che R è punto metafondamentale per λ e $\Sigma(\lambda)$, origine di una spezzata metafondamentale, che contiene il segmento fondamentale di origine Q e relativo a λ^0 e $\Sigma(\lambda^0)$, o di una semilinea metafondamentale, che contiene il raggio fondamentale relativo a λ^0 e $\Sigma(\lambda^0)$ di origine Q, a seconda che Q è appunto origine di un segmento o di un raggio fondamentale per λ^0 e $\Sigma(\lambda^0)$.

11. – Un'altra semplice conseguenza. – Sia ora Λ un insieme di archi elementari di traslazione. E denoti λ l'elemento corrente di Λ; $\Sigma(\lambda)$ e $\Sigma'(\lambda)$ siano i due campi adiacenti a $\sigma(\lambda)$, per esempio $\Sigma(\lambda)$ quello positivo e $\Sigma'(\lambda)$ quello negativo (7).

Suppongasi che, nei riguardi di $\Sigma(\lambda)$, λ ammetta o almeno un segmento fondamentale, il cui segmento di traslazione varii in una certa totalità A di segmenti elementari di traslazione, o almeno un segmento ortofondamentale, contenuto in una certa altra totalità B di segmenti elementari di traslazione, o una spezzata parafondamentale, variabile in una certa totalità C di archi elementari di traslazione di due lati. Analoghe circostanze

(7) Le considerazioni che seguono non si trovano in miei lavori precedenti.

si presentino rispetto a $\Sigma'(\lambda)$ ed analogo significato abbiano $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{C}'$.

E si ammetta che $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}'$ siano suscettibili di decomposizioni regolari **in senso stretto,** cioè di decomposizioni regolari siffatte che i segmenti di traslazioni di ciascuna delle classi che le costituiscono abbiano comune almeno uno stesso segmento caratteristico positivo e almeno uno stesso segmento caratteristico negativo; e che $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{C}'$ siano suscettibili di decomposizioni semiregolari **in senso stretto,** cioè siffatte che gli archi elementari di traslazione di ciascuna delle classi che le costituiscono siano dotati di almeno uno stesso segmento caratteristico di prima categoria ([8]).

Allora, se si rammentano le cose dette nel n. 10, è evidente che è possibile determinare un numero finito di segmenti elementari di traslazione $u_1, \ldots, u_p$, $u'_1, \ldots, u'_p$ (non necessariamente *tutti* distinti a due a due), siffatti, che se λ è un elemento di Λ, esiste sempre (almeno) un u_h che possa pensarsi come segmento **metacaratteristico** per λ e $\Sigma(\lambda)$, cioè come segmento di traslazione di una spezzata metafondamentale di λ e $\Sigma(\lambda)$ ed (almeno) un u'_h suscettibile di una interpretazione analoga nei riguardi di $\Sigma'(\lambda)$. Diremo perciò che Λ ammette **decomposizioni metaregolari in senso stretto** ([9]).

12. - Un'osservazione. - Si noti che le spezzate e le semilinee metafondamentali realizzano una proprietà di minimo, nel senso che se A e B sono due punti di una spezzata (o semilinea) metafondamentale, l'arco di spezzata (di semilinea) compreso fra A e B ha lunghezza minima nella classe delle spezzate, semplici o non, passanti per A e B e dotate di un numero finito di lati, diretti ciascuno come uno degli assi coordinati.

([8]) L'ipotesi che le decomposizioni regolari e semiregolari considerate siano tali in senso stretto non è essenziale, a patto di modificare un po' il risultato cui perverremo, introducendo in esso anche semilinee metafondamentali.

([9]) Se si vuole, è facile introdurre le rette **metacaratteristiche** per λ e $\Sigma(\lambda)$, come quelle che contengono semirette appartenenti a semilinee metafondamentali per λ e $\Sigma(\lambda)$.

13. – Il teorema fondamentale sulle traiettorie. – Sebbene si tratti di cosa di scarso interesse per il seguito, desidero ricordare che nelle dimostrazioni dei teoremi ricordati in questo paragrafo interviene, continuamente, il successivo teorema fondamentale sulle traiettorie di una traslazione piana generalizzata (qualunque):

Una curva c, del piano (x, y), taglia la propria immagine nella traslazione generalizzata (qualunque) t del piano (x, y), se esiste un tale arco di traslazione λ di t da aversi $[t^{-1}(\lambda) \dotplus t^{-2}(\lambda) \dotplus t^{-3}(\lambda) \dotplus \ldots] \cdot c \neq 0$, $\lambda \cdot c = 0$, $[t(\lambda) \dotplus t^{2}(\lambda) \dotplus t^{3}(\lambda) \dotplus \ldots] \cdot c \neq 0$

[Brouwer, III), teorema 6; v. Kerékjàrtó, III), pag. 92, teorema II′); Scorza Dragoni, XIX), nn. 23 e 24, XIII), prefazione]; insieme con esso intervengono anche alcune sue estensioni [Scorza Dragoni, XIII), XXVII), nn. 8 e 13] alle quasi-traiettorie.

Dal teorema fondamentale sulle traiettorie si deduce subito che:

Se λ è un arco di traslazione di t e τ uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine R, soddisfacente alle relazioni $\tau \cdot \lambda = R$, $[t^{-1}(\lambda) \dotplus \lambda \dotplus t(\lambda)] \cdot \tau = R$, si riduce ad R anche l'intersezione di τ con $\sigma(\lambda)$, di guisa che tutti i punti di τ diversi da R appartengono ad un medesimo campo adiacente a $\sigma(\lambda)$;

infatti, nell'eventualità contraria, spostiamoci su $\sigma(\lambda)$, a partire da R e in un verso opportuno, fino al primo punto, H, comune a τ e a $\sigma(\lambda)$ e diverso da R; allora H è esterno a λ, $t^{-1}(\lambda)$, $t(\lambda)$; epperò, poichè R appartiene a λ, il sottoarco di $\sigma(\lambda)$ di estremi H ed R contiene nell'interno un arco di traslazione; il che è assurdo, visto che τ non taglia la propria immagine.

§ 2. - Ulteriori proprietà della traslazione generalizzata t.

14. - Prime conseguenze della periodicità della t. - Le proprietà ricordate nel paragrafo precedente son vere per la t come per ogni traslazione piana generalizzata; in questo paragrafo invece indicheremo circostanze che si presentano per la t, in quanto essa è una traslazione generalizzata, che ammette come invarianti le rette di equazioni $x = 0$ ed $y = 1$ e che è periodica in x di periodo 1 (vale a dire, permutabile con la traslazione ordinaria ϑ di cui al n. 1).

Intanto se λ è un arco di traslazione di t, l'immagine $\vartheta^k(\lambda)$ di λ nella potenza k — esima di ϑ, ove $k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, è ancora un arco di traslazione di t; e la cosa è evidente. Inoltre ϑ^k muta anche la traiettoria $\sigma(\lambda)$ e i campi positivo e negativo adiacenti a questa rispettivamente nella traiettoria $\sigma(\vartheta^k(\lambda))$ e nei campi positivo e negativo adiacenti a $\sigma(\vartheta^k(\lambda))$. Se poi λ è anche (per t) un arco elementare di traslazione, $\vartheta^k(\lambda)$ è del pari un arco elementare di traslazione (di t); e ϑ^k muta segmenti e raggi fondamentali, segmenti ortofondamentali, spezzate e semilinee metafondamentali, segmenti caratteristici e metacaratteristici e rette caratteristiche e metacaratteristiche per λ in enti analoghi per $\vartheta^k(\lambda)$.

Di qui si trae facilmente [e per tutto il contenuto di questo numero si veda anche v. Kerékjàrtó, III), pag. 101; Scorza Dragoni, II), nn. 24 e 25], che, detto

$$\Gamma_h \qquad (h = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

il rettangolo

$$h \leq x < h + 1, \qquad 0 \leq y \leq 1$$

e indicata con

$$V_h$$

la totalità dei segmenti di traslazione con l'origine in Γ_h, ϑ^h muta Γ_0 in Γ_h e V_0 in V_h.

Inoltre V_0 è decomponibile in modo regolare. Sia perciò

$V_{0,1}, \ldots, V_{0,p}$ una decomposizione regolare di V_0; e denoti $u_{0,i}$ $(i = 1, \ldots, p)$ *un* segmento caratteristico positivo o *una* retta caratteristica positiva per tutti gli elementi di $V_{0,i}$ ed $u'_{0,i}$ *un* segmento caratteristico negativo od *una* retta caratteristica negativa per tutti gli elementi di $V_{0,i}$.

Allora, dalle cose dette in precedenza è facile dedurre che, se si indicano rispettivamente con $V_{h,i}$, $u_{h,i}$ ed $u'_{h,i}$ rispettivamente le immagini di $V_{0,i}$, $u_{0,i}$, $u'_{0,i}$ nella ϑ^h, $V_{h,1}, \ldots, V_{h,p}$ costituiscono una decomposizione regolare di V_h e $u_{h,i}$ ed $u'_{h,i}$ hanno per $V_{h,i}$ lo stesso significato di $u_{0,i}$ ed $u'_{0,i}$ per $V_{0,i}$.

Analogamente, sia

$$V_h^0 \qquad (h = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

la totalità degli archi elementari di traslazione con due lati e con l'origine in Γ_h. Allora ϑ^h muta V_0^0 in V_h^0.

Si consideri ora una decomposizione semiregolare (certo esistente) di V_0^0, costituita dalle classi $V_{0,1}^0, \ldots, V_{0,q}^0$; ed $u_{0,j}^0$ denoti, per $j = 1, \ldots, q$, un segmento o una retta caratteristica di prima categoria per tutti gli elementi di $V_{0,j}^0$.

Allora, naturalmente, se si indicano con $V_{h,j}^0$ ed $u_{h,j}^0$ le immagini rispettive di $V_{0,j}^0$ ed $u_{0,j}^0$ nella ϑ^h, le classi $V_{h,1}^0, \ldots, V_{h,q}^0$ costituiscono una decomposizione semiregolare di V_h^0 ed $u_{h,j}^0$ ha per $V_{h,j}^0$ un significato analogo a quello di $u_{0,j}^0$ per $V_{0,j}^0$.

Noi supporremo fissata una volta per tutte la scelta (delle classi $V_{0,1}, \ldots, V_{0,p}$, $V_{0,1}^0, \ldots, V_{0,q}^0$ e) dei segmenti e delle rette $u_{0,1}, \ldots, u_{0,p}$, $u'_{0,1}, \ldots, u_{0,p}$, $u_{0,1}^0, \ldots, u_{0,q}^0$; dopo di che diremo che $u_{h,1}, \ldots, u_{h,p}$, $u'_{h,1}, \ldots, u'_{h,p}$, $u_{h,1}^0, \ldots, u_{h,q}^0$ sono le rette e i segmenti **base** (della traslazione relativi alla striscia S); volendo una distinzione ulteriore, per le $u_{h,i}$ si userà l'attributo «**positivo**», per le $u'_{h,i}$ quello di «**negativo**» e per le $u_{h,i}^0$ l'attributo «**di prima categoria**».

Se si osserva che le $V_{h,i}$ sono a due a due prive di elementi comuni, si riconosce che ad ogni segmento di traslazione con l'origine in S corrisponde un ed un solo ente base (segmento o retta) positivo ed uno ed un solo ente base negativo. Considerazioni analoghe valgono per gli archi elementari di traslazione con due lati e con l'origine (o, il che fa lo stesso, con il vertice) in S.

15. – Ulteriori conseguenze della periodicità della t. – Rammentiamo che:

Sempre in conseguenza della periodicità della t, una linea semplice, periodica in x, con periodo dato da un numero intero, non incontra la propria immagine nella t, se contiene una semilinea che non incontri la propria immagine in t;

e la cosa peraltro è evidente.

Il risultato si applica in particolare alle parallele dell'asse x. Anzi per le parallele dell'asse x contenute (per esempio) nella striscia S esso è suscettibile [Scorza Dragoni, II), n. 22] di una ulteriore precisazione, nel senso che:

Se l'estremo superiore delle lunghezze dei segmenti diretti come l'asse x, contenuti in S e privi di punti comuni con le rispettive immagini nella t, è infinito, S contiene una retta che non incontra la propria immagine nella t.

In altri termini, ai fini della dimostrazione dell'enunciato del n. 1, noi possiamo limitarci a considerare il caso che:

1) *quell'estremo superiore sia finito, per la nostra traslazione t.*

Ammessa la 1), si deduce per esempio che i segmenti di traslazione (di t) diretti come l'asse x e contenuti in S hanno una lunghezza superiormente limitata. Ed è facile riconoscere che lo stesso accade per gli archi elementari di traslazione con due lati e con l'origine contenuta in S (infatti questa ultima condizione implica che il lato diretto come l'asse x appartenga ad S, e quindi abbia una lunghezza superiormente limitata, perchè privo di punti comuni con la propria immagine; l'altro lato appartiene anche esso ad S, come è evidente, e la sua lunghezza non può superare 1, ecc.).

Infine è immediato, sempre attesa la periodicità di t (e l'assenza per la t di punti uniti), che l'estremo inferiore delle distanze dei punti contenuti in S dalle rispettive immagini è positivo. In particolare, sono limitate inferiormente da un numero positivo le lunghezze degli archi elementari di traslazione, che abbiano un estremo in S.

§ 3. - Sulla cosiddetta «deviazione del cammino».

16. - Preliminari. - Nel seguito avremo spesso bisogno di una costruzione, introdotta da v. KERÉKJÀRTÓ [v. KERÊKJÀRTÓ, III), pag. 96], ripresa da me, con qualche variante [SCORZA DRAGONI, I), § 13, VIII) e XXI)], e detta da v. KERÉKJÀRTÓ la «deviation of the path». Ci troveremo sempre a dover applicare quella costruzione in condizioni peculiari. Ed è perciò opportuno esporre qui la costruzione particolare che ci interessa, con alcuni complementi utili per il seguito.

Desidero anche avvertire subito che il modo di realizzare una «deviation of the path» non può dirsi fissato a priori. Quello qui seguito è più vicino al punto di vista di v. KERÉKJÀRTÓ, quale trovasi esposto nella mia Nota XXI). Avremo occasione di ritornare in seguito e più chiaramente sull'argomento.

Incominciamo col fissare qualche convenzione.

Sia φ uno pseudoarco elementare di traslazione di prima specie (per t), di origine F, oppure una semilinea semplice, priva di punti comuni con la propria immagine, di origine F e costituita da un numero finito di segmenti e da un raggio, ciascuno diretto come uno degli assi coordinati. Inoltre F appartenga all'asse x ed ogni altro punto di φ abbia invece un'ordinata positiva. Se poi φ è uno pseudoarco di traslazione, si supponga che l'arco elementare di traslazione λ, contenuto in φ, si riduca ad un segmento; e si denotino con A l'estremo di φ diverso da F e con L l'estremo di λ diverso da A e quindi interno a φ. *Il punto L non sia vertice per φ.*

Si ponga ora

$$\chi = \vartheta(\varphi)\,, \quad G = \vartheta(F)\,; \quad \psi = \vartheta^{-1}(\varphi)\,, \quad K = \vartheta^{-1}(F)$$

e, se del caso,

$$B = \vartheta(A),\ M = \vartheta(L),\ \mu = \vartheta(\lambda);\ C = \vartheta^{-1}(A),\ N = \vartheta^{-1}(L),\ \nu = \vartheta^{-1}(\lambda);$$

di guisa che χ e ψ soddisfanno anch'essi alle condizioni imposte a φ.

Si supponga inoltre che:

1) *φ e χ (e, quindi, φ e ψ) abbiamo comuni punti che risultino interni sia a φ che a χ (a φ che a ψ);*

allora φ contiene uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine F, relativo a ϑ; diciamo ρ questo pseudoarco e sia P l'estremo di ρ diverso da F (per costruire ρ basta partire da F e percorrere φ sino al primo punto tale, che il tratto percorso incontri la propria immagine nella ϑ); inoltre, in virtù di quanto si è ricordato al n. 3, o $\vartheta^{-1}(P)$ o $\vartheta(P)$ appartiene a ρ (risultando anzi interno a ρ) e le due alternative si escludono a vicenda.

Denotiamo ora con U il primo punto comune a φ e χ, incontrato su φ a partire da F, e con α il sottoarco di φ di estremi F ed U; analogamente denotiamo con V il primo punto comune a φ e ψ, incontrato su φ a partire da F, e con β il sottoarco di φ di estremi F e V; naturalmente α e β si pensano contenenti gli estremi.

Premesso questo, facciamo le seguenti ipotesi:

2) *se* $\vartheta^{-1}(P)$ *appartiene a* ρ, $U \dot{+} (\varphi - \alpha)$ *contiene al più un vertice di* φ;

e

3) *se* $\vartheta(P)$ *appartiene a* ρ, $V \dot{+} (\varphi - \beta)$ *contiene al più un vertice di* φ.

E dimostriamo che:

Se $\vartheta^{-1}(P)$ *appartiene a* ρ, *i due punti* P *ed* U *coincidono*; *invece, se a* ρ *appartiene* $\vartheta(P)$, *coincidono i due punti* P *e* V;

vale a dire che:

La curva semplice e aperta ρ *coincide con* α *nella prima alternativa e con* β *nella seconda*:

anzi, *nella dimostrazione di questo n.* 16 *e del successivo ci avvarremo di ipotesi più tenui delle* 2) *e* 3), *supponendo rispettivamente che* $\varphi - \alpha$ *e* $\varphi - \beta$ *contengano al più un vertice di* φ *ed ammettendo che* U *e* V *possano eventualmente essere anch'essi vertici di* φ (*e così pure* L).

Si ammetta, per fissar le idee, che $\vartheta(P)$ appartenga a ρ.

Dalla definizione di U segue (in ogni caso) che α e $\vartheta(\alpha)$ hanno comune al più il punto U stesso; epperò P, se non coincide con U, non può appartenere ad α, perchè altrimenti riuscirebbe $\rho \cdot \vartheta(\rho) = 0$, cosa assurda. Quindi o ρ coincide con α o ρ contiene α come parte propria. In particolare, dalla 2) discende allora che $P \dot{+} (\varphi - \rho)$ è composta di uno o due tratti rettilinei.

Si percorra ora ρ a partire da F; e fra i punti di ρ di ordinata massima sia H quello che si incontra per primo; siano h la parallela per H all'asse x ed $\boldsymbol{H}$ la striscia delimitata dalla retta h e dall'asse x. Denoti infine ρ' il sottoarco di ρ di estremi F ed H.

I punti interni di ρ' sono interni ad $\boldsymbol{H}$ e ρ' divide $\boldsymbol{H}$ in due porzioni (da pensarsi come chiuse), delle quali una, $\boldsymbol{H}_1$, contiene K e l'altra, $\boldsymbol{H}_2$, contiene G.

Poichè $\vartheta^{-1}(\rho) \cdot \rho = \vartheta^{-1}(P)$ e $\rho \cdot \vartheta(\rho) = P$, tutti i punti di $\vartheta^{-1}(\rho)$ diversi da $\vartheta^{-1}(P)$ appartengono ad $\boldsymbol{H}_1 - \rho'$ e quelli di $\vartheta(\rho)$ diversi da P appartengono ad $\boldsymbol{H}_2 - \rho'$; cioè i primi son separati dai secondi, mediante ρ' ed in $\boldsymbol{H}$.

E ancora: nelle ipotesi attuali H e P son certamente distinti, perchè altrimenti $\vartheta^{-1}(P)$ sarebbe fra i punti di ρ uno di ordinata massima e interno a $\rho' (= \rho)$. Dunque P, che appartiene ad $\boldsymbol{H}_2$ in quanto punto di $\vartheta(\rho)$, non appartiene a ρ'.

Il tratto $P \dot{+} (\varphi - \rho)$ di φ parte dunque da un punto P di $\boldsymbol{H}_2 - \rho'$ ed è composto da uno o due tratti rettilinei, ciascuno diretto come uno degli assi. Inoltre φ è semplice; epperò quel tratto non incontra ρ'. Ma allora è evidente che nelle condizioni attuali $\varphi - \rho$ non può incontrare $\vartheta^{-1}(\rho)$.

Di qui e da $\vartheta^{-1}(\rho) \cdot \rho = \vartheta^{-1}(P)$ segue subito $\vartheta^{-1}(\rho)\, \varphi = = \vartheta^{-1}(P)$, cioè $\rho \cdot \chi = P$.

Ma ρ deve contenere α ed è $\alpha \cdot \chi = U$; dunque è $U = P$, come volevasi.

Il caso rimanente si tratta in guisa perfettamente analoga.

Nel ragionamento svolto è implicito un altro fatto a carattere generale [cfr. v. Kerékjártó, III), pag. 93, teorema IV)]. Ecco di che si tratta.

Se $\vartheta^{-1}(P)$ appartiene a ρ, cioè se $\rho \cdot \vartheta(\rho) = P$, denotiamo con j la spezzata semplice e chiusa costituita da ρ, da FG e dall'arco di $\vartheta(\rho)$ di estremi G e P, con J l'insieme aperto e limitato che j delimita, con i la spezzata semplice e chiusa costituita da $\vartheta^{-1}(\rho)$, da KF e dall'arco di ρ di estremi F e $\vartheta^{-1}(P)$ e con I l'insieme aperto e limitato contornato da i. Allora risulta $j = \vartheta(i)$ e quindi $J = \vartheta(I)$. Inoltre J ed I giacciono da bande opposte di ρ; e precisamente J appartiene ad $\boldsymbol{H}_2$ ed I appartiene ad $\boldsymbol{H}_1$. In particolare, $\vartheta^{-1}(\rho)$ *non ha punti interni a* J [*anzi è* $\vartheta^{-1}(\rho) \cdot J = \vartheta^{-1}(P)$] *e* $\vartheta(\rho)$ *non ne ha di interni ad* I [*e riesce* $\vartheta(\rho) \cdot I = 0$].

Circostanze analoghe si presentano naturalmente se $\vartheta(P)$ *appartiene a* ρ, *cioè se* $\rho \cdot \vartheta(\rho) = \vartheta(P)$.

Anzi noi abbiamo dimostrato qualcosa di più; noi abbiam infatti visto che:

Se $\vartheta^{-1}(P)$ *appartiene a* ρ, $\vartheta^{-1}(\rho)$ *non ha punti comuni con il sottoarco di* χ *di estremi* G *e* $P (= U)$; *se* $\vartheta(P)$ *appartiene a* ρ, $\vartheta(\rho)$ *non ha punti comuni con il sottoarco di* ψ *di estremi* K *e* $P (= V)$.

Attesa poi la convenzione sui versi fissata nel n. 1, nella prima alternativa ρ giunge su χ dalla banda che risulta a sinistra di chi percorra χ a partire da G; nella seconda ρ giunge su ψ dalla banda che risulta alla destra di chi percorra ψ a partire da K.

17. - **Lemmi.** - Approfondiamo ora l'esame del caso che φ sia, per t, uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine F; e ricordiamo che allora l'arco λ, di traslazione per t e contenuto in φ, è stato supposto rettilineo.

Conservate naturalmente tutte le notazioni del numero precedente, dimostriamo che:

Se $\vartheta^{-1}(P)$ *appartiene a* ρ (*e quindi è interno a* ρ), *il punto* $U (= P)$ *non può essere interno al segmento di traslazione* μ *contenuto in* χ; *di guisa che* μ *appartiene per intero al sottoarco di* χ *di estremi* U *e* B.

Nelle ipotesi attuali, la $P \dotplus (\varphi - \rho)$ [$= U \dotplus (\varphi - \alpha)$] considerata nel numero precedente si riduce alla sottocurva di φ di estremi U ed A e, per l'ipotesi 2) dello stesso numero, è costituita o da un solo segmento o da due segmenti (ortogonali fra di loro).

Nella prima alternativa, si ponga

$$s = P \dotplus (\varphi - \rho) = UA .$$

Se s è verticale (diretto cioè come l'asse y), s e $\vartheta(s)$ non hanno punti comuni; epperò U non appartiene a $\vartheta(s)$ e nemmeno a μ, anch'esso verticale e o contenuto in $\vartheta(s)$ o contenente $\vartheta(s)$. Donde la conclusione, in questa prima sottoalternativa.

Se s è orizzontale (cioè diretto come l' asse delle x) e se la ascissa di U è minore di quella di A, si proceda come segue. Se U è vertice di φ, s è anche lato di φ ed anzi quel lato che ha un estremo in A; dunque s contiene il segmento λ; epperò $\vartheta(s) = \vartheta(U)B$ contiene μ; d'altra parte è manifesto che nelle ipotesi attuali U, estremo (diciamo) sinistro di s, non può appartenere a $\vartheta(s)$; donde la conclusione voluta. Se U non è vertice di φ, U può forse appartenere a μ, ma non può certamente essergli interno (perchè altrimenti fra F ed U su φ esisterebbero punti di χ diversi da U, contro la definizione di U); ed anche in questo caso quindi si perviene alla conclusione desiderata.

Se s è orizzontale e se l'ascissa di U è maggiore di quella di A si proceda così. Se U non è vertice di φ, l'ipotesi che esso sia interno a μ conduce ad un assurdo analogo al precedente. Se U è interno a μ ed è vertice per φ, il penultimo lato di φ (nel verso che da F conduce ad A) e quindi l'ultimo lato di ρ (nel verso che da F conduce ad U) è verticale; inoltre P coincide con U (n. 16) ed U è interno a μ, dunque P è interno all'ultimo lato di χ; e P è anche interno a $\vartheta(\rho)$, nelle ipotesi attuali, quindi [atteso che χ è semplice e che $\vartheta(\rho)$ è una sottocurva di χ] P è interno anche all'ultimo lato di $\vartheta(\rho)$; e questo è assurdo, perchè l'ultimo lato di ρ e l'ultimo lato di $\vartheta(\rho)$, essendo verticali, non posson aver punti comuni. Donde la conclusione un'altra volta.

A titolo di complemento della dimostrazione si osservi, se si vuole, che nelle ipotesi attuali s non può degenerare in un punto, in virtù della 1) del n. prec.

Consideriamo ora la seconda alternativa, ponendo

$$P \dotplus (\varphi - \rho) = UT \dotplus TA .$$

Allora, se UT è orizzontale e se l'ordinata di U è minore (maggiore) di quella di A, l'ordinata di U non può essere maggiore (minore) dell'ordinata di un punto del segmento verticale λ, contenuto in TA; epperò U non può nemmeno essere interno a $\mu = \vartheta(\lambda)$. Analogamente: se UT è verticale, l'ordinata di U è diversa da quella comune a tutti i punti del segmento orizzontale λ, contenuto in TA; epperò ancora una volta U non può essere interno (anzi non può nemmeno appartenere) a $\mu = \vartheta(\lambda)$.

Si noti infine che:

Nelle ipotesi attuali $U (= P)$ è interno a $\vartheta(\rho)$, di guisa che l'arco di χ di estremi U e B contiene non soltanto il segmento μ, ma anche (e nell'interno) il punto $\vartheta(U)$.

Analogamente:

Se $\vartheta(P)$ appartiene a ρ (e quindi è interno a ρ), il sottoarco di ψ di estremi $V (= P)$ e C contiene il segmento di traslazione ν e (nell'interno) il punto $\vartheta^{-1}(V)$.

18. - Sulla «deviation of the path». - Ferme le ipotesi e le notazioni dei nn. 16 e 17, si osservi che possiamo trovare un segmento di traslazione (di t)

$$\delta = D\, t(D)$$

situato sull'asse x, contenente F nell'interno e tale che $t(D)$ sia interno al segmento FG; e ciò possiamo farlo, perchè l'asse x è invariante nella t e perchè t muta i punti del tipo $(a,0)$ in punti (di ordinata nulla e) di ascissa maggiore di a e minore di $a+1$. Allora l'asse x ha come sostegno la traiettoria $\sigma(\delta) = \ldots \dotplus t^{-1}(\delta) \dotplus \delta \dotplus t(\delta) \dotplus \ldots$ e il semipiano $y \geq 0$, privato dei punti dell'asse x, dà luogo ad uno, $\Sigma(\delta)$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\delta)$, e precisamente a quello positivo. *Inoltre è $\chi \cdot \delta = \psi \cdot \delta = 0$ e $\varphi - F \subset \Sigma(\delta)$.*

E supponiamo ora che $\vartheta^{-1}(P)$ appartenga a ρ, di guisa che, a norma di risultati precedenti, riesce non soltanto P interno a $\vartheta(\rho)$, ma anche $P = U$; epperò, atteso il significato di U, risulta $\rho \cdot \chi = U$, mentre dal fatto che U è interno a φ e dall'essere φ uno pseudoarco di traslazione di prima specie per t si trae la $\rho \cdot t(\rho) = 0$.

Si denotino ora con g_1 e g_2 i segmenti DF e $t(D)F$, con s_2 l'arco di χ di estremi G ed $U = P$ e con s_1 l'altra curva o semilinea individuata su χ da $U = P$; si ponga poi $\eta_1 = g_1 \dotplus$

$\dot{+} \rho \dot{+} s_1$, $\eta_2 = g_2 \dot{+} \rho \dot{+} s_2$ (di guisa che η_1 ed η_2 non si tagliano lungo ρ) ed $\omega_1 = \rho \dot{+} s_1$, $\omega_2 = \rho \dot{+} s_2$.

E si applichino a δ, ρ e χ le cose dette nella mia Nota XXI) a proposito dell'arco là indicato con λ, della curva là detta ρ e della linea là chiamata l.

Per riconoscere la legittimità di questa applicazione si noti intanto che ω_1 è contenuta in $\Sigma(\delta)$ a meno del punto F. Di guisa che se ω_1 è una semilinea e soddisfa alla $\omega_1 \cdot t(\omega_1) = 0$, è verificata l'alternativa contemplata nel n. 11 della mia Nota XXI). Invece, se ω_1 è una semilinea soddisfacente alla $\omega_1 \cdot t(\omega_1) \neq 0$, poichè ω_1 non passa nè per $t^{-1}(F)$ nè per $t(F)$, esiste uno pseudoarco di traslazione di prima specie (di t) di origine F e contenuto in ω_1, diciamolo τ_1. Se ω_1 non è una semilinea, tale non è nemmeno χ; allora esiste il segmento di traslazione μ, contenuto in χ, ed esso appartiene ad s_1, a norma di quanto si è visto nel n. prec.; indi è di nuovo $\omega_1 \cdot t(\omega_1) \neq 0$. E poichè ω_1 non passa mai per $t(F)$ e $t^{-1}(F)$, anche in questo caso esiste in ω_1 uno pseudoarco di traslazione di prima specie, τ_1, di origine F. Ed in entrambe queste ultime alternative, per ω_1 è soddisfatta la prima delle eventualità considerate nel n. 2 della mia Nota XXI). Quanto ad ω_2, si osservi che se per essa è $\omega_2 \cdot t(\omega_2) = 0$, risulta soddisfatta l'ultima delle possibilità ammesse nel n. 2 del mio lavoro XXI); se per essa è $\omega_2 \cdot t(\omega_2) \neq 0$, essa [non passando nè per $t(F)$ nè per $t^{-1}(F)$, in quanto contenuta in $\Sigma(\delta)$, a meno di F e G, mentre $t^{-1}(F)$ e $t(F)$ differiscono (da F e) da G, attesa la 3) del n. 1] contiene uno pseudoarco di traslazione di prima specie, τ_2, di origine F, e quindi per essa si presenta la penultima delle possibilità contemplate nel n. 2 della mia Nota XXI). Se esiste τ_i, denotiamo con F_i il termine di τ_i ed osserviamo che l'attuale punto U corrisponde a quello che nella XXI) era detto T.

Ciò premesso [ed escluso che ω_1 sia una semilinea soddisfacente alle $\omega_1 - F \subset \Sigma(\delta)$ e $\omega_1 \cdot t(\omega_1) = 0$], per la configurazione costituita da $\sigma(\delta)$, ρ e χ si presentano, almeno *a priori*, le alternative analoghe alle *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*), *h*), *i*), *k*) del n. 4 della mia Nota XXI). Ma nelle condizioni attuali, possiamo escludere subito che si presentino quelle analoghe alle *c*), *h*), *i*) e *k*); esse infatti, a norma delle osservazioni contenute nel n. 12 della mia solita Nota, implicherebbero l'esistenza di un arco di traslazione (di t) *interno* a χ (cosa assurda perchè χ o è uno pseudoarco di traslazione di prima specie oppure non incontra la propria immagine nella t). E non si possono nemmeno presentare le alternative analoghe alla a), perchè questa implicherebbe la $(\omega_1 - F) \cdot \sigma(\delta) \neq 0$; alla b), perchè la b) potrebbe presentarsi soltanto se fosse $G \subset t^{-1}(\delta)$, mentre G ha un'ascissa maggiore di quelle di D e $t(D)$; alla e), perchè questa, a norma di quanto è detto nel n. 7 della mia Nota XXI), implicherebbe l'esistenza di un arco di traslazione (di t) contenuto in s_2, mentre s_2 non può mai incontrare la propria immagine, nemmeno se χ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie [nel qual ultimo caso basterebbe infatti rammentare che U è interno a χ per avere $s_2 \cdot t(s_2) = 0$].

Dunque rimangono come possibili *a priori* soltanto le alternative analoghe alle d), f) e g) del n. 4 di quella mia Nota.

Ed esaminiamo il significato del presentarsi di ciascuna di queste singole alternative.

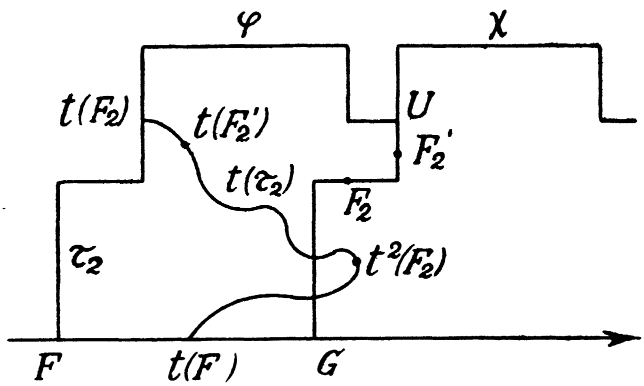
Quella analoga alla d) si presenta quando F_1 appartiene all'immagine diretta od inversa del sottoarco di χ (e di s_1) di estremi U ed F_1. In queste condizioni l'arco di traslazione di τ_1 appartiene ad s_1 [cfr. Scorza Dragoni, XXI), n. 7]; ma s_1 contiene archi di traslazione (di t) soltanto se χ è (per t) uno pseudoarco di traslazione; e in questo caso s_1 contiene soltanto un arco di traslazione (il segmento μ); dunque in questo caso deve risultare $\tau_1 = \rho \dotplus s_1$, e μ è l'arco di traslazione contenuto in τ_1.

L'alternativa analoga alla f) si presenta quando F_1 è interno a $t(\rho)$. In questa ipotesi, si dica δ_1 l'arco di traslazione contenuto in τ_1 e $\Sigma(\delta_1)$ quel campo adiacente a $\sigma(\delta_1)$ che non contiene [ved. qui, n. 3, proposizione a)] punti di $\sigma(\delta) \dotplus (\tau_1 - \delta_1)$; allora [cfr. Scorza Dragoni, XXI), n. 8] il campo $\Sigma(\delta_1)$ costeggia $\varkappa_1 = \chi \cdot \delta_1$ lungo quella banda di χ dalla quale ρ giunge su χ, cioè (ved. qui, n. 16, in fine) dalla banda di χ situata alla sinistra di chi percorra χ a partire da G.

L'alternativa analoga alla g) si presenta quando F_2 è interno a $t^{-1}(\rho)$; in questo caso, se δ_2 è l'arco di traslazione contenuto in τ_2 e $\Sigma(\delta_2)$ quel campo adiacente a $\sigma(\delta_2)$ che non contiene punti di $\sigma(\delta) \dot{+} (\tau_2 - \delta_2)$, il campo $\Sigma(\delta_2)$ costeggia $\varkappa_2 = \chi \cdot \delta_2$ lungo quella banda di χ dalla quale ρ giunge su χ, come è detto anche nella mia Nota XXI) al n. 8.

Dimostriamo ora *a posteriori* che, nel fatto, attese le condizioni attuali, anche quest'ultima alternativa va esclusa dalle possibili.

Ed invero, si riprenda in considerazione la curva semplice e chiusa $j = \rho \dot{+} FG \dot{+} s_2$ e l'insieme aperto J dei punti che essa separa dall'infinito. L'insieme $\dot{J}$ risulta alla sinistra di chi percorra j nel verso che porta da F a G senza passare per U.



Supposto ora che F_2 sia (se possibile) interno a $t^{-1}(\rho)$, e quindi $t(F_2)$ a ρ, indichisi con j' la curva semplice e chiusa costituita dal sottoarco di ρ di estremi $t(F_2)$ ed F, dal segmento $Ft(F)$ e da $t(\tau_2)$; e J' abbia un significato analogo a J. Allora J' è contenuto in $\Sigma(\delta)$ e quindi chi percorre ρ da F a $t(F_2)$ lascia alla propria destra anche J'. Inoltre $\delta_2 - t(F_2)$ è esterno a J', perchè j' ha soltanto $t(\delta_2)$ comune con $\sigma(\delta_2)$ [v. n. 5, *a*)], sicchè si può applicare un'osservazione nota [cfr. Scorza Dragoni, I), n. 9, pag. 167, quarta proposizione dall'alto]. Quindi $t(\tau_2)$ deve giungere su ρ in $t(F_2)$ dalla banda a destra di chi percorra ρ a partire da F. Cioè $t(\varkappa_2)$ parte da $t(F_2)$ staccandosi da ρ (perchè τ_2 è uno pseudoarco di traslazione di prima specie) e penetrando in J. Inoltre $t(\varkappa_2)$ non soltanto non ha punti comuni con $\rho - t(F_2)$, ma non ne ha nemmeno con s_2, perchè $\varkappa_2$ è interno a s_2 e perchè anche χ è (per t) uno pseudoarco di traslazione di prima specie, a meno che non sia addirittura $\chi \cdot t(\chi) = 0$; quindi $\tau(\varkappa_2) - \tau(F_2)$ appartiene a J.

D'altronde la semitraiettoria $t(\delta_2) \dot{+} t^2(\delta_2) \dot{+} t^3(\delta_2) \dot{+} \ldots$ è illimitata (ved. n. 2); quindi essa deve uscire di nuovo da J, senza incontrare GF perchè contenuta in $\Sigma(\delta)$, senza incontrare τ_2 (tolto che in F_2) come segue dalla a) del n. 3 e dal fatto che $\sigma(\delta_2)$ è semplice, cioè incontrando il tratto di s_2 compreso fra G ed F_2; diciamo ι questo tratto. E sia F_2' un punto di $\varkappa_2$ interno a $\varkappa_2$; allora l'arco δ_2' di $\sigma(\delta_2)$ di estremi F_2' e $t(F_2')$ è un arco di traslazione per il quale risulta $\iota \cdot \delta_2' = 0$, $\iota \cdot t^{-1}(\delta_2') \supset F_2$, $\iota \cdot [t(\delta_2') \dot{+} t^2(\delta_2') \dot{+} t^3(\delta_2') \dot{+} \ldots] \neq 0$; epperò, a norma del teorema fondamentale sulle traiettorie (ved. n. 13), l'arco ι deve tagliare $t(\iota)$, contro l'ipotesi che χ sia uno pseudoarco di traslazione di prima specie (contenente ι).

Naturalmente se $\vartheta(P)$ appartiene a ρ, valgono dei risultati analoghi nei riguardi di φ e di ψ.

19. - Complementi ulteriori. - Mantenute le notazioni del n. 18, *supponiamo che $\vartheta^{-1}(P)$ appartenga a ρ e che esista τ_1, riuscendo F_1 interno a $t(\rho)$*, cioè che si presenti, diciamo, l'alternativa f) del n. 18.

E sia F^0 un punto fondamentale o metafondamentale per δ_1 e $\Sigma(\delta_1)$; e si indichi con τ^0 un segmento o un raggio fondamentale, relativo a δ_1 e $\Sigma(\delta_1)$, di origine F^0, se fondamentale è F^0, una spezzata o una semilinea metafondamentale, relativa a δ_1 e $\Sigma(\delta_1)$, di origine F^0, se metafondamentale è F^0.

Allora, se τ^0 è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine F^0 (cioè se τ^0 è un segmento fondamentale o una spezzata metafondamentale, di guisa che in ogni caso l'arco di traslazione contenuto in τ^0 è un segmento), l'arco φ^0 somma di τ^0 e del sottoarco di φ di estremi F ed F^0 è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, come risulta dalla b) del n. 3, e l'arco di traslazione contenuto in φ^0 è un segmento di traslazione (il quale non contiene vertici di φ^0); invece, se τ^0 è una semilinea, di origine F^0 (in particolare una semiretta), la semilinea φ^0 somma di τ^0 e del sottoarco di φ di estremi F ed F^0 è una semilinea, di origine F e priva di punti comuni con la propria immagine, come risulta dalla proposizione *c*) del n. 3. In entrambi i casi risulta poi $\varphi^0 - F \subset \Sigma(\delta)$, come segue sempre dal n. 3.

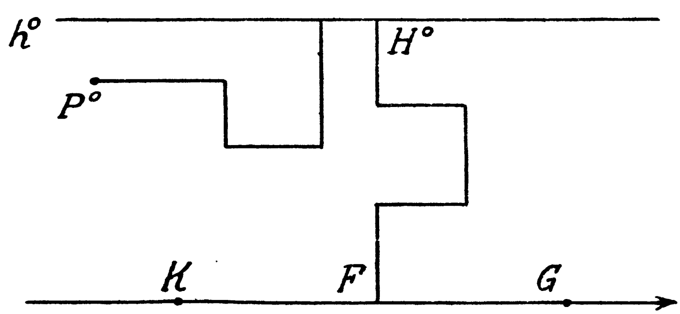
Si ponga ora $\chi^0 = \vartheta(\varphi^0)$ e $\psi^0 = \vartheta^{-1}(\varphi^0)$.

E si supponga che:

1) *φ^0 e χ^0 (e quindi φ^0 e ψ^0) abbiano comuni punti che risultino interni sia a φ^0 che a χ^0 (a φ^0 che a ψ^0).*

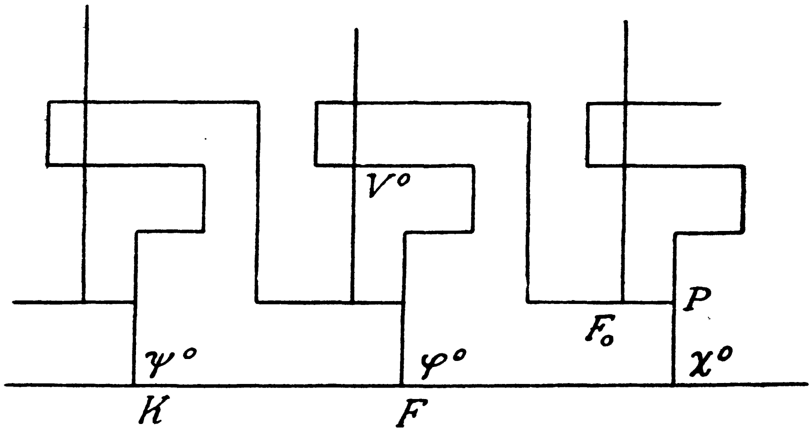
Diciamo allora (ved. n. 16) ρ^0 lo pseudoarco di traslazione di prima specie relativo a ϑ, contenuto in φ^0 e di origine F, e P^0 l'estremo di ρ^0 diverso da F.

a) E dimostriamo ora che *se F^0 è interno al sottoarco di φ di estremi $t^{-1}(F_1)$ ed U, per φ^0 son vere anche le analoghe delle condizioni* 2) *e* 3), *imposte a φ nel n. 16.* La cosa invero è immediata, se $\vartheta^{-1}(P^0)$ appartiene (e quindi è anche interno) a ρ^0, perchè nelle ipotesi attuali i punti comuni a φ^0 e χ^0 son tutti contenuti in $\tau^0 - F^0$ e perchè τ^0 possiede al più un vertice (essendo o un segmento o un raggio fondamentale oppure una semilinea o una spezzata metafondamentale), *in guisa che è senz'altro soddisfatta la condizione analoga alla* 2). Nell'eventualità che $\vartheta(P^0)$ appartenga (e quindi sia interno) a ρ^0, si proceda invece nel modo che segue. Si osservi intanto che ρ^0 contiene nell'interno punti che hanno la stessa ordinata di P^0, per esempio $\vartheta(P^0)$; di guisa che se H^0 è, fra i punti di ρ^0 aventi ordinata massima, quello più vicino ad F (su ρ^0!), H^0 è diverso da P^0. Dicansi $\rho^{0\prime}$ il sottoarco di ρ^0 di estremi F ed H^0, h^0 la parallela per H^0 all'asse x, $\mathbf{H}^0$ la striscia delimitata da questo



asse e da h^0. Allora $\rho^{0\prime}$ divide $\mathbf{H}^0$ in due porzioni $\mathbf{H}_1^0$ e $\mathbf{H}_2^0$ (da pensarsi chiuse); e di queste una $\mathbf{H}_1^0$, contiene K e l'altra,

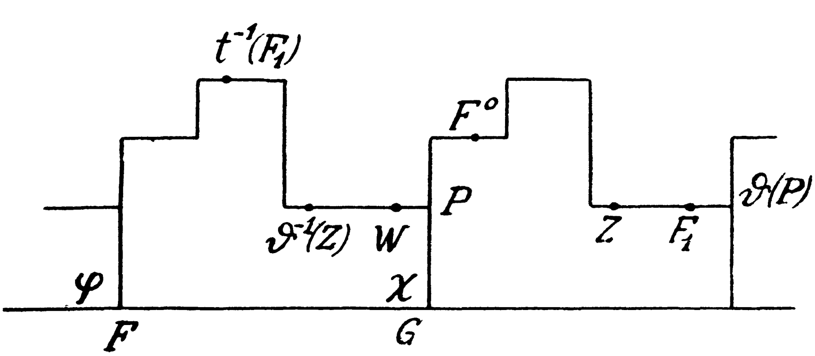
$\boldsymbol{H}_2^0$, contiene G. Inoltre è $\vartheta^{-1}(\rho^0)\cdot\rho^0 = P^0$, indi è anche $\vartheta^{-1}(\rho^0)\cdot\rho^{0\prime} = 0$; epperò $\vartheta^{-1}(\rho^0)$, che parte da K, appartiene per intero ad $\boldsymbol{H}_1^0 - \rho^{0\prime}$; e lo stesso può dirsi per P^0, che nelle ipotesi attuali è interno a $\vartheta^{-1}(\rho^0)$. Invece $\vartheta(\rho^0) - \vartheta(P^0)$, non avendo punti comuni con ρ^0, appartiene tutto ad $\boldsymbol{H}_2^0 - \rho^{0\prime}$, al pari di G. D'altronde nelle ipotesi attuali F^0 è interno a ρ [perchè interno al sottoarco di φ di estremi $t^{-1}(F_1) \subset \rho$ ed $U = P$]; epperò l'arco $\rho\cdot\rho^0$ non può incontrare la propria immagine nella ϑ; dunque P^0 deve essere interno a τ^0; e quindi la curva o semilinea $P^0 \dotplus (\varphi^0 - \rho^0)$ è contenuta in $\tau^0 - F^0$, cioè contiene al più un vertice di φ^0 (perchè τ^0 è provvisto di al più un vertice), epperò è composta da uno o due segmenti con direzioni date dagli assi; d'altra parte φ^0 è semplice; quindi basta un esame della figura per convincersi che $P^0 \dotplus (\varphi^0 - \rho^0)$ non può incontrare $\vartheta(\rho^0)$, nemmeno se $P^0\,(\neq H^0)$ appartiene ad h^0. Sia ora V^0 il primo punto di ψ^0 incontrato su φ^0 a partire da F; V^0 è certamente diverso da K e da F. E si ammetta, se possibile, che V^0



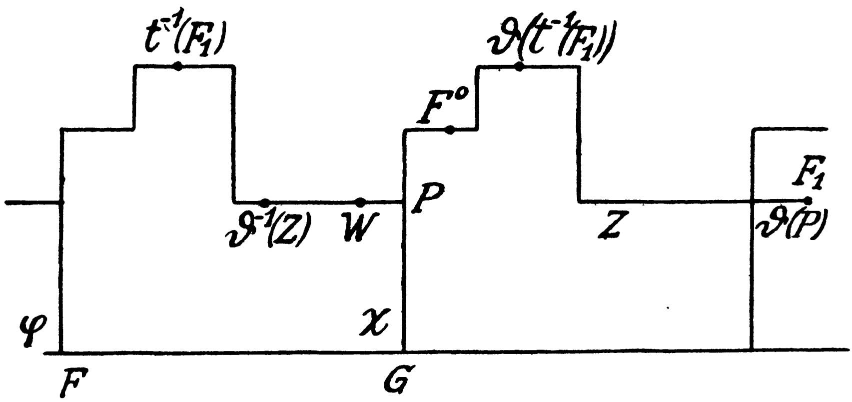
appartenga a $\varphi^0 - (\tau^0 - F^0) = \rho\cdot\rho^0$. Allora V^0, in quanto punto di ψ^0, appartiene o a $\psi^0 - [\vartheta^{-1}(\tau^0) - \vartheta^{-1}(F^0)]$ od a $\vartheta^{-1}(\tau^0) - \vartheta^{-1}(F^0)$; ma la prima alternativa è da escludersi, perchè ρ e $\vartheta^{-1}(\rho)$ non hanno comuni punti che siano interni sia a ρ che a $\vartheta^{-1}(\rho)$; indi V^0 è un punto di $\vartheta^{-1}(\tau^0) - \vartheta^{-1}(F^0)$. Vale a dire: $\vartheta(V^0)$ è un punto di $\tau^0 - F^0$, contenuto in $\vartheta(\rho\cdot\rho^0)$ e non interno a ρ^0. Se $P^0 = \vartheta(V^0)$, $\vartheta^{-1}(P^0)$ appartiene a ρ^0; e quindi non può appartenere a ρ^0 il punto $\vartheta(P^0)$, perchè ρ^0 è uno pseudoarco di traslazione di prima specie di ϑ. Ma ciò sarebbe contro le ipotesi; dunque P^0 deve precedere $\vartheta(V^0)$ su φ^0 a partire da F. Cioè $(\varphi^0 - \rho^0)$ contiene $\vartheta(V^0)$, che appartiene a $\vartheta(\rho^0)$. E questo è impossibile, a norma di quanto si è testè visto. L'essere pervenuti ad un assurdo prova che V^0 deve appartenere a $\tau^0 - F^0$. Ma allora è chiaro che al più uno dei vertici di φ^0 può non essere interno al sottoarco di φ^0 di estremi F e V^0; cioè che *la condizione analoga alla* 3) *del n.* 16 *è soddisfatta anche per* φ^0.

b) *Esaminiamo ora cosa possa dirsi nel caso che F^0 appartenga invece al sottoarco di χ di estremi U ed F_1, cioè all'arco $\varkappa_1 = \chi \cdot \delta_1$.*

In questo caso F^0 è diverso da F_1, perchè interno per definizione a δ_1; nell'intorno di $\varkappa_1$ le due curve φ^0 e χ hanno comuni soltanto punti di $\varkappa_1$, perchè τ^0 e δ_1 ed *a fortiori* τ^0 e $\varkappa_1$ hanno comune soltanto F^0 e perchè la $U = P$, vera nel caso attuale, implica la $\rho \cdot \chi = P$ (di guisa che $\varphi^0 \cdot \chi$ si riduce al sottoarco di $\varkappa_1$ di estremi U ed F^0 più gli eventuali punti comuni a τ^0 e χ, tutti esterni a $\varkappa_1$); inoltre φ^0 e χ (o φ^0 e τ_1) si toccano lungo $\varkappa_1$, perchè (ved. n. 18) nelle ipotesi attuali $\Sigma(\delta_1)$ costeggia δ_1 dalla stessa banda dalla quale ρ giunge su χ e perchè $\tau^0 - F^0$ appartiene a $\Sigma(\delta_1)$. Oltre a ciò ricordiamo (n. 16, in fine) che ρ giunge su χ dalla banda di χ situata alla sinistra di chi percorra χ a partire da G ed osserviamo che $\Sigma(\delta_1)$, essendo a sinistra di chi percorra $\varkappa_1$ da P ad F_1, è anche il campo positivo adiacente a $\sigma(\delta_1)$. Il punto $t^{-1}(F_1)$ è, su φ, compreso tra F e P; ma F_1 può sia precedere $\vartheta(P)$ che coincidere con esso o



seguirlo, se si percorre χ a partire da G. Se su χ il punto F_1 è compreso fra G ed $\vartheta(P)$, coincidendo eventualmente con $\vartheta(P)$, diciamo Z un punto interno al sottoarco di δ_1 di estremi F^0 ed F_1 e interno altresì al lato di δ_1 avente un estremo in F_1 (si rammenti che F_1 è estremo per τ_1 e quindi per δ_1, sicchè quel lato di δ_1 è determinato). Se invece su χ il punto $\vartheta(P)$ è compreso fra G ed F_1, riuscendo diverso da F_1, diciamo Z



un punto interno al sottoarco di δ_1 di estremi F^0 e $\vartheta(P)$ ed al lato di $\vartheta(\rho)$ avente un estremo in $\vartheta(P)$. In entrambe le alternative diciamo poi W un punto di δ_1 interno a δ_1 ed all'arco di ρ di estremi $\vartheta^{-1}(Z)$ e P, anzi W viene anche supposto interno a un lato di δ_1, al pari di Z; inoltre W sia abbastanza vicino a P, tanto da valere le cose che diremo.

Ciò premesso si osservi che *in entrambe le alternative il sottoarco x di δ_1 di estremi W e Z non incontra $\vartheta(x)$, come non incontra $t(x)$.*

Sia ora v una spezzata con i lati diretti come gli assi, avente W e Z come estremi, con gli estremi soltanto su δ_1 (condizioni queste legittime, fra l'altro perchè W e Z son interni a lati di δ_1 e non son vertici di δ_1), contenuta in un ζ — intorno di x [10], situata alla sinistra di chi percorra δ_1 nel verso positivo (cioè

[10] Luogo dei punti del piano che hanno da x una distanza minore del numero positivo ζ.

da $t^{-1}(F_1)$ a F_1, passando nell'ordine per W, P, F^0 e Z). In virtù di quest'ultima condizione e del fatto che ρ giunge su χ alla sinistra di chi percorra χ a partire da G, cioè nel verso che conduce da P ad F_1, *v non incontra il sottoarco di χ di estremi G e P*, non appena ζ sia abbastanza piccolo. Inoltre è chiaro che, sempre se ζ è abbastanza piccolo, *v non incontra nemmeno* $\vartheta(v)$ e $t(v)$, perchè vuote sono le intersezioni $z \cdot \vartheta(z)$ e $z \cdot t(z)$; e che risulta pure vuota l'intersezione di v e $\sigma(\delta_1) - \delta_1$, perchè tale risulta quella di z e di $\sigma(\delta_1) - \delta_1$ essendo z interno a δ_1 ed essendo $\sigma(\delta_1)$ omeomorfa ad una retta [ved. n. 2; ved. anche Ghezzo, I), n. 3], sicchè $\sigma(\delta_1) \cdot v = \delta_1 \cdot v = W + Z$. Di qui discende che i punti interni a v appartengono tutti ad uno stesso campo adiacente a $\sigma(\delta_1)$ [cfr. Scorza Dragoni, XX), nota ([14])], il qual campo non può essere altri che $\Sigma(\delta_1)$, atteso che $\Sigma(\delta_1)$ è quel campo adiacente a $\sigma(\delta_1)$ a sinistra di chi percorra δ_1 nel verso positivo; inoltre si ha che $\delta' = (\delta_1 - z) \dot{+} v$ è un arco (elementare) di traslazione [cfr. Scorza Dragoni, XX), lemma X)], e che uno, $\Sigma(\delta')$, dei due campi adiacenti a $\sigma(\delta')$ è contenuto in $\Sigma(\delta_1)$, mentre l'altro contiene tutti i punti di $\sigma(\delta_1)$ che non appartengono a $\sigma(\delta')$ [cfr. Scorza Dragoni, XX), lemma XI)]. Inoltre è chiaro che, sempre se ζ è abbastanza piccolo, $\tau' = (\tau_1 - \delta_1) + (\delta_1 - z) + v$ è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, che contiene δ' come proprio arco di traslazione e che ha F come origine.

Spostiamoci ora su τ^0 a partire da F^0 sino all'ultimo punto F^* di $v \cdot \tau^0$ (intersezione certo non vuota, se ζ è abbastanza piccolo) e consideriamo la porzione τ^* ottenuta da τ^0 sopprimendo i punti diversi da F^* e compresi tra F^* ed F^0. Se τ^0 è una semiretta o la somma di un segmento e di una semiretta, lo stesso accade rispettivamente per τ^*, se ζ è abbastanza piccolo; se τ^0 è uno pseudoarco elementare di traslazione di prima specie di origine F^0 e se ζ è abbastanza piccolo, τ^* è uno pseudoarco (elementare) di traslazione di prima specie e di origine F^*; nel primo caso è anche $\tau^* \cdot t(\tau^*) = 0$. In entrambi i casi, se ζ è abbastanza piccolo, da $[t(\delta_1) + t^{-1}(\delta_1)] \cdot \tau^0 = 0$ segue $[t(\delta') + t^{-1}(\delta')] \cdot \tau^* = 0$; e quindi, attesa anche la $\delta' \cdot \tau^* = F^*$, tutti i punti di $\tau^* - F^*$ appartengono ad uno stesso campo adiacente a $\sigma(\delta')$ [cfr. Scorza Dragoni, I), nn. 18 e 19]. Si riconosce poi facilmente che, almeno se ζ è abbastanza piccolo, questo campo è $\Sigma(\delta')$; e ci limiteremo in proposito ad accennare soltanto che evidentemente $\Sigma(\delta')$ è il campo positivo adiacente a $\sigma(\delta')$ e quindi costeggia v alla sinistra di chi percorra v da W a Z, mentre è è chiaro che i punti separati dall'infinito mediante $v \dotplus z$ sono alla destra di chi percorra v da W a Z e che (sempre per ζ abbastanza piccolo) i punti $\tau^* - F^*$ non son separati dall'infinito mediante $v \dotplus z$. Un'altra osservazione: $\tau_1 - \delta_1$ appartiene al campo negativo adiacente a $\sigma(\delta_1)$; nelle cose precedenti è implicito che il campo negativo adiacente a $\sigma(\delta_1)$, che è contenuto [cfr. Scorza Dragoni, XX), lemma IX)] in uno dei due campi adiacenti a $\sigma(\delta')$, appartiene a quello negativo di questi; sicchè, sempre se ζ è abbastanza piccolo, $\tau' - \delta' = \tau_1 - \delta_1$ appartiene al campo negativo adiacente a $\sigma(\delta')$; cioè $\Sigma(\delta')$ è anche il campo adiacente a $\sigma(\delta')$ privo di punti comuni con $\tau' - \delta'$. Quindi, se indichiamo con φ^* la somma di τ^* e del sottoarco di τ' di estremi F ed F^*, φ^* è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, di origine F contenuto in $\Sigma(\delta)$, a meno dell'origine, se τ^* è uno pseudoarco di traslazione di prima specie (cioè se τ^0 è un segmento fondamentale o una spezzata metafondamentale); invece φ^* è una semilinea che non incontra $t(\varphi^*)$, se τ^* è una semilinea (cioè se τ^0 è un raggio fondamentale o una spezzata metafondamentale); nel primo caso φ^* è anche uno pseudoarco elementare di traslazione e l'arco di traslazione contenuto in φ^* è un segmento (privo di vertici di φ^*); nel secondo caso φ^* è composta da un numero finito di segmenti e un raggio, ciascuno diretto come uno degli assi, ed anche in questo caso F è l'origine di φ^* ed è l'unico punto di φ^* non contenuto in $\Sigma(\delta)$. L'esattezza di queste affermazioni discende dalle b) e c) del n. 3.

Ed ora supponiamo che F_1 appartenga al sottoarco di χ di estremi F^0 e $\vartheta(P)$, riuscendo diverso da $\vartheta(P)$. Allora τ' e $\vartheta(\tau')$ non hanno punti comuni esterni al segmento $Z F_1$, se ζ è abbastanza piccolo; e lo stesso può dirsi per τ', $\vartheta^{-1}(\tau')$ e $\vartheta^{-1}(Z)$ $\vartheta^{-1}(F_1)$. Sicchè, se si aggiunge l'ipotesi che

1*) φ^* *e* $\chi^* = \vartheta(\varphi^*)$ *abbiano comuni punti interni sia a* φ^* *che a* χ^* (lo stesso accadendo allora per φ^* e $\psi^* = \vartheta^{-1}(\varphi^*)$), il primo punto comune U^* (V^*) comune a φ^* e χ^* (a φ^* e ψ^*), incontrato su φ^* a partire da F, è necessariamente un punto di $\tau^* - F^*$, cioè di τ^0; ma τ^0 era o un segmento o un raggio fondamentale, ovvero una spezzata o una semilinea metafondamentale; quindi è chiaro che la porzione di φ^* ottenuta sopprimendo i punti diversi da U^* (da V^*) compresi tra F ed U^* (fra F e V^*) contiene al più un vertice di φ^*; cioè, che

2*) *per* φ^* *valgono a fortiori condizioni analoghe alle* 2) *e* 3) *del n.* 16).

Se F_1 *coincide con* $\vartheta(P)$ *e se* ζ *è abbastanza piccolo,* τ' *e* $\vartheta(\tau')$ hanno comune soltanto il segmento $\vartheta(W)Z$ - si rammenti che $\vartheta(W)$ e Z appartengono allo stesso lato di δ_1 –. E quindi, poichè F^0 è interno all'arco di τ_1 di estremi F e Z, è facile convincersi che *anche in questo caso valgono conclusioni analoghe alle precedenti circa la validità per* φ^* *di condizioni analoghe alle* 1), 2) *e* 3) *del n.* 16.

Si supponga ora che F_1 sia diverso da $\vartheta(P)$ e non appartenga all'arco di χ di estremi F^0 e $\vartheta(P)$. In questo caso, se ζ è abbastanza piccolo, Z è il primo punto comune a τ' e $\vartheta(\tau')$ incontrato su τ' a partire da F ed il punto $\vartheta^{-1}(Z)$ appartiene al sottoarco di τ' di estremi F e Z; inoltre fra i punti di $\tau' - F$, non interni a quell'arco, compare al più un vertice di τ', perchè Z è interno a quel lato di τ' che contiene $\vartheta(P)$ nell'interno o che ha un estremo in $\vartheta(P)$ e l'altro compreso tra F e $\vartheta(P)$ e perchè esiste al più un vertice di χ non appartenente a $\vartheta(\rho) - \vartheta(P)$, cioè non interno al sottoarco di χ di estremi F e $\vartheta(P)$. Ma allora è facile comprendere che τ' e φ^* si trovano in condizioni che rientrano in quelle esaminate sotto il caso *a*) di questo n. per φ e φ^0. E quindi, *se esistono punti comuni a* φ^* *e* $\chi^* = \vartheta(\varphi^*)$ *che sian interni sia a* φ^* *che a* χ^*, *per* φ^* *son di nuovo soddisfatte le condizioni analoghe alle* 2) *e* 3) *del n.* 16.

Naturalmente *se* P *è interno a* $\vartheta^{-1}(\rho)$ *valgono considerazioni analoghe per* φ *e* ψ.

Osservazione. - Si noti che a v si può imporre la condizione ulteriore di avere una lunghezza differente (in modulo) da quella di z per meno di una quantità positiva prefissata.

20. - Ultime considerazioni. - Ora ci restano da esaminare gli altri due casi, riconosciuti come possibili nel n. 18. *Tanto per fissar le idee, sia sempre P interno a* $\vartheta(\rho)$.

a) Ferme le ipotesi dei nn. 16 e 17 e le notazioni del n. 18, *ammettiamo che* ω_1 *sia una semilinea soddisfacente alle* $\omega_1 \cdot t(\omega_1) = 0$ *ed* $\omega_1 - F \subset \Sigma(\delta)$.

In questo caso un'analisi un po' minuziosa, ma di carattere, prova che ω_1 si può modificare leggermente in guisa da ottenere una semilinea ω_1^* che soddisfaccia a vincoli simili a quelli imposti a φ, - in particolare per ω_1^* *sussistono condizioni analoghe alle* 2) *e* 3) *del n.* 16, *se vale l'analoga della* 1) *di quel numero.* Delineeremo l'analisi soltanto in caso particolare: quello che P sia un vertice di φ, e quindi $\vartheta(P)$ per χ, e che chi percorra χ a partire da G, giunto in $\vartheta(P)$ si trovi a dirigersi verso la destra del tratto fino a quel momento percorso. Consideriamo il lato $\vartheta(\varepsilon)$ di χ avente un estremo in $\vartheta(P)$ e spostiamolo di poco, facendogli subire una piccola traslazione (ordinaria) secondo la direzione a lui ortogonale e nel verso rivolto a sinistra di chi percorra χ a partire da G. Il punto $\vartheta(P)$ va in un punto $\vartheta(P')$; $\vartheta(\varepsilon)$ va in un segmento $\vartheta(\varepsilon')$. E sostituiamo $\vartheta(\varepsilon)$ con la spezzata $\vartheta(\varepsilon') \dot{+} \vartheta(P')\,\vartheta(P)$, avente un solo vertice in $\vartheta(P')$. Congiungiamo poi convenientemente un punto W interno ad ε, ed abbastanza vicino a P, con un punto Z interno a $\vartheta(\varepsilon')$, ed avente da $\vartheta(P')$ una distanza maggiore di $\overline{WP}$, mediante una spezzata v; ecc.

b) *Si supponga ora* che si presenti l'alternativa *d*) del n. 18), cioè *che φ sia uno pseudoarco di traslazione di prima specie e che tale sia anche* $\rho \dot{+} s_1$, nel qual caso è $\tau_1 = \rho \dot{+} s_1$.

Allora (ved. n. 17, in fine) il punto $\vartheta(P)$ è interno e il segmento di traslazione μ è contenuto nell'arco di χ di estremi P e B. Ma nel caso attuale, anche μ è interno a questo arco: infatti, se così non fosse, P ed M coinciderebbero; $\vartheta(P)$ sarebbe interno a μ e P a λ; λ e $\mu = \vartheta(\lambda)$, avendo punti comuni, sarebbero diretti come l'asse x; l'estremo P di $\vartheta(\lambda)$ essendo interno a λ, un estremo di λ sarebbe interno a $\vartheta(\lambda)$, cioè a μ; e τ_1 conterrebbe λ e μ, mentre τ_1, in quanto pseudoarco di traslazione di prima specie, contiene un solo segmento di traslazione. Quanto $\vartheta(P)$, esso può essere interno a μ, coincidere con M, o essere interno a $\chi - \mu$. Nel primo e secondo caso $\vartheta(P)$ è anche interno a un lato di χ (perchè L è interno a un lato di φ e quindi M ad uno di χ). In ogni caso un'analisi minuta, ma di carattere elementare, prova che basta modificare un conveniente sottoarco z di $\tau_1 - \mu$, per ottenere da τ_1 un arco $\overline{\varphi}$ soddisfacente a condizioni analoghe a quelle imposte a φ.

Conclusioni analoghe valgono, se P è interno a $\vartheta^{-1}(\rho)$.

Osservazione. - Naturalmente si può ripetere quanto si è detto alla chiusa del n. 19.

§ 4. - Su alcune eventuali applicazioni dei risultati precedenti.

21. - Preliminari. Definizione di φ_1. - Sia λ_0 un segmento di traslazione di t, contenuto nell'asse delle x. La lunghezza di λ_0 è allora minore dell'unità; la traiettoria $\sigma_0 = \sigma_0(\lambda_0)$ è il sostegno dell'asse x e i punti del piano ad ordinata positiva riempiono uno, $\Sigma_0 = \Sigma_0(\lambda_0)$, dei due campi adiacenti a σ_0.

Sia F un punto fondamentale di λ_0 relativo a Σ_0; e φ_1 il raggio o il segmento fondamentale di origine F e relativo a λ_0 e Σ_0.

Possiamo anzi supporre che, se φ_1 è un raggio, la retta che lo contiene sia una retta base; e che, se φ_1 è un segmento, il segmento di traslazione λ_1 contenuto in φ_1 sia un segmento base.

Se φ_1 è un raggio, il teorema del n. 1 è senz'altro verificato; se φ_1 è un segmento dotato di punti esterni alla striscia S, vale la stessa conclusione.

22. - Proprietà attribuite a φ_n. - Supponiamo di essere riusciti a definire φ_n (per un certo valore naturale di n) in guisa da soddisfare alle condizioni seguenti:

α) φ_n o è uno pseudoarco elementare di traslazione di prima specie di origine F, o è una semilinea composta da un numero *finito di segmenti e un raggio, diretti ciascuno come uno degli assi, l'origine della semilinea essendo sempre F;*

β) *$\varphi_n - F$ appartiene a Σ_0;*

γ) *se φ_n è uno pseudoarco di traslazione, l'arco di traslazione λ_n, contenuto in φ_n, è un segmento, l'estremo di λ_n interno a φ_n essendo interno ad un lato di φ_n;*

δ) *in quest' ultima alternativa, λ_n è un segmento base di t, ogni volta che φ_{n-1} e λ_n appartengono ad S.*

A queste condizioni bisogna aggiungerne un'altra, se le intersezioni di φ_n con $\chi_n = \vartheta(\varphi_n)$ e (perciò) di φ_n con $\psi_n = \vartheta^{-1}(\varphi_n)$ contengono rispettivamente punti interni sia a φ_n che a χ_n e sia a φ_n che a ψ_n. Precisamente, detti allora U_n e V_n i primi punti di χ_n e ψ_n rispettivamente incontrati su φ_n a partire da F e P_n il termine dello pseudoarco di traslazione ρ_n, relativo a ϑ, di prima specie, di origine F e contenuto in φ_n, ammetteremo quanto segue:

ε) *se P_n è interno a $\vartheta(\rho_n)$ [a $\vartheta^{-1}(\rho_n)$], fra i vertici di φ_n ve ne è al più uno non interno al sottoarco di φ_n di estremi F ed U_n [F e V_n].*

Nel seguito, se $\varphi_n \cdot \chi_n = 0$, porremo anche $\rho_n = \varphi_n$; se $\varphi_n \cdot \chi_n \neq 0$, indicheremo sempre con ρ_n lo pseudoarco di traslazione di prima specie, relativo a ϑ, di origine F e contenuto in φ_n. Indicheremo poi sempre con P_n (con A_n) il termine di ρ_n (di φ_n) se ρ_n (se φ_n) è uno pseudoarco di traslazione; e con Σ_n il campo adiacente a $\sigma_n = \sigma(\lambda_n)$ privo di punti comuni con σ_0.

Si noti che il teorema del n. 1 *è senz'altro vero, se ρ_n ha dei punti esterni alla striscia S.*

23. - Definizione induttiva di φ_{n+1}. - Ci proponiamo ora di definire φ_{n+1}, in guisa (che φ_{n+1} non sia uguale a φ_n e in guisa) da soddisfare a condizioni analoghe alle α), β), γ), δ) ed ε), almeno in tutti quei casi in cui il teorema del n. 1 non risulti senz' altro verificato.

a) - *Suppongasi $\rho_n = \varphi_n$.*

Allora, se φ_n è una semilinea, risulta $\varphi_n \cdot \chi_n = 0$. Il raggio contenuto in φ_n è diretto come l'asse x; ρ_n ha punti esterni ad S; e il teorema del n. 1 è valido.

Se φ_n è uno pseudoarco di traslazione di prima specie, o è $\varphi_n \cdot \chi_n = 0$, o $\varphi_n \cdot \psi_n = P_n = A_n$ o $\varphi_n \cdot \chi_n = P_n = A_n$. In ogni caso è lecito supporre che φ_n sia contenuto in S (altrimenti il teorema del n. 1 sarebbe senz' altro verificato). Denoti allora R_n un punto del segmento λ_n, fondamentale rispetto a λ_n e Σ_n. Se R_n è origine di un raggio fondamentale r_n (relativo a λ_n e Σ_n), basta porre φ_{n+1} uguale alla somma di r_n e del sottoarco di φ_n di estremi F ed R_n; e la cosa è particolarmente evidente, se si rammenta la *c*) del n. 3. Se R_n è origine di un segmento fondamentale s'_n, si dica l_n il segmento di traslazione contenuto in s'_n. Atteso che R_n appartiene ad S, S contiene s'_n, se s'_n è orizzontale oppure se S contiene almeno un punto di l_n (perchè allora S contiene uno e quindi anche l'altro estremo di l_n, in quanto immagine diretta o inversa del primo); in entrambi questi casi S contiene l_n; e in definitiva l_n o appartiene tutto ad S oppure è completamente esterno ad S, questa seconda alternativa non potendosi presentare, se l_n è orizzontale. Sia ora S_n un punto fondamentale relativo a l_n ed al campo $\Sigma(l_n)$, adiacente a $\sigma(l_n)$ e privo di punti comuni con λ_n. Se l_n è contenuto in S (in particolare, se l_n è orizzontale) è sempre lecito supporre che S_n sia un punto **base** per l_n e $\Sigma(l_n)$, cioè origine di un raggio fondamentale per l_n e $\Sigma(l_n)$ contenuto in una retta base o di un segmento fondamentale per l_n e $\Sigma(l_n)$ contenente uno e quindi un solo segmento base. Se S_n è origine di un raggio r'_n, fondamentale per l_n e $\Sigma(l_n)$, si osservi (cfr. anche n. 10) che la semilinea $R_n S_n \dot{+} r'_n$ è metafondamentale per λ_n e Σ_n; se S_n è origine di un segmento fondamentale s''_n la spezzata $R_n S_n \dot{+} s''_n$ è metafondamentale per λ_n e Σ_n, mentre il segmento di traslazione λ_{n+1} contenuto in s''_n si può sempre supporre essere un segmento base, a meno che non sia esterno ad S. Ed allora, per ottenere φ_{n+1} basta aggiungere al sottoarco di φ_n di estremi F ed R_n una volta $R_n S_n \dot{+} r'_n$ ed un'altra $R_n S_n \dot{+} s''_n$.

b) – *Suppongasi ora che* ρ_n *sia un sottoarco proprio di* φ_n.

Allora φ_n si trova nelle condizioni imposte a φ nel n. 16. E l'esistenza di φ_{n+1} segue senz'altro dalle cose dette nei nn. 17–20, se a φ_{n+1} si impongono soltanto le α), β), γ) ed ε). Per esempio, se P_n appartiene a $\rho(\vartheta_n)$ e se per φ_n si presentano circostanze analoghe a quelle imposte a φ nel n. 19, come φ_{n+1} si prenderà l'analogo (φ^0_{n+1} o φ^*_{n+1}) del φ^0 o del φ^* del n. 19, in corrispondenza ai due casi *a*) e *b*) di quel numero; se per φ_n si presentano le condizioni del n. 20, si porrà φ_{n+1} uguale all'analogo, ω^*_{n+1}, della semilinea ω^*_1 se φ_n si trova nelle condizioni del caso *a*) del n. 20, oppure si procederà, sull'analogo $\rho_n \dotplus s^*_{n+1}$ del $\tau_1 = \rho \dotplus s_1$ del caso *b*) del n. 20, così come là si è fatto per τ_1, qualora φ_n si trovi nelle con dizioni ivi contemplate.

Quindi resta da dimostrare che, almeno nei casi che interessano, si può supporre soddisfatta anche la δ).

Orbene, supposto sempre, tanto per fissare le idee, che P_n appartenga a $\vartheta(\varphi_n)$, se φ_{n+1} è uguale a $\rho_n \dotplus s^*_{n+1}$, il segmento di traslazione contenuto in φ_{n+1} è quello contenuto in $\psi_n = \vartheta(\varphi_n)$; epperò la δ) è soddisfatta per φ_{n+1}, atteso che lo è per φ_n (e quindi per ψ_n). Invece non vi è nulla da dimostrare se φ_{n+1} è una semilinea (in particolare se $\varphi_{n+1} = \omega^*_{n+1}$). Quindi rimane da considerare soltanto il caso che si presenti una delle alternative del n. 19, [con la condizione ulteriore che φ_{n+1} riesca uno pseudoarco di traslazione di prima specie (al pari di φ_n)]. E in questo caso si può ancora supporre che ρ_n sia contenuto in $\boldsymbol{S}$, perchè altrimenti il teorema del n. 1 sarebbe senz'altro verificato.

E sia R'_n un punto fondamentale, ovvero para- od orto-fondamentale relativo all'arco di traslazione, λ'_n, contenuto in $\rho_n \dotplus s^*_{n+1}$ ed al campo, Σ'_n, adiacente a $\sigma'(\lambda'_n)$ e privo di punti comuni con σ_0, cioè contenuto in Σ_0. Risulta $R'_n \subset \varphi_n \dotplus \chi_n \subset \boldsymbol{S}$.

Se R'_n è origine di un raggio fondamentale, r'_n, relativo a λ'_n e Σ'_n, φ_{n+1} si può definire in modo da riuscire una semilinea [cfr. quanto è detto in questo numero all'inizio del caso *a*)]; ed allora non vi è altro da dire. Se R'_n è origine di un segmento fondamentale, s'_n, relativo a λ'_n e Σ'_n, basta ragionare come si è fatto in *a*), quando era $\rho_n = \varphi_n$ ed R_n era origine di un segmento fondamentale relativo a λ_n e Σ_n, per concludere nel modo voluto. Se R'_n è contenuto in un segmento ortofondamentale, s'''_n, relativo a λ'_n e Σ'_n, s'''_n è contenuto in $\boldsymbol{S}$, perchè appartiene a Σ_0 e contiene un punto di $\boldsymbol{S}$ (di guisa che uno dei due suoi estremi appartiene ad $\boldsymbol{S}$) e perchè è un segmento di traslazione (di guisa che anche l'altro suo estremo appartiene ad $\boldsymbol{S}$); dopo di che si procede come in a), sostituendo il segmento (fondamentale) là detto s_n col segmento (ortofondamentale) s_n'''. Se R_n' è parafondamentale, sia w_n' una spezzata parafondamentale ad esso corrispondente (il significato dell'espressione essendo palese), relativa a λ_n' e Σ_n'. Allora w_n' può non incontrare λ_n', però è sempre contenuta in Σ_0 e le rette contenenti i lati di w_n' incontrano entrambe λ_n', cioè $\varphi_n \dotplus \chi_n$; epperò quella di esse che è orizzontale appartiene ad S; indi uno (almeno) degli estremi di w_n' appartiene ad S, epperò vi appartiene anche l'altro (perchè w_n' è un arco di traslazione); in definitiva w_n' appartiene ad S. Dopo di che, a norma delle cose dette nel n. 10, è agevole dedurre che esistono per λ_n' e Σ_n' o semilinee metafondamentali (le quali permettono di definire φ_{n+1} in guisa che φ_{n+1} sia una semilinea) o spezzate metafondamentali contenenti un segmento base (e queste conducono a definire φ_{v+1} in guisa da soddisfare anche alla δ)].

24. - Ultime considerazioni. - La costruzione indicata nel n. 23 conduce o alla dimostrazione del teorema del n. 1 o alla costruzione di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ e $\rho_1, \rho_2, \ldots$, con ρ_n sottocurva di φ_n; ma essa non porta senz'altro e in ogni caso al teorema del n. 1.

Ci proponiamo ora di esaminare qualche caso particolare.

Supponiamo intanto che per una conveniente successione di numeri naturali $n_1, n_2, \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$ si presentino le seguenti circostanze:

1) φ_{n_i} è uno pseudoarco di traslazione di prima specie per t $(i = 1, 2, \ldots)$;

2) Detto T_{n_i} il primo punto di $\varphi_{n_{i+1}}$ incontrato su φ_{n_i} a partire dal termine A_{n_i} di φ_{n_i} e posto $t_{n_i} = T_{n_i} + (\varphi_{n_{i+1}} - \varphi_{n_i} \cdot \varphi_{n_{i+1}})$, T_{n_i} è interno a λ_{n_i} e t_{n_i} è uno pseudoarco di traslazione (per t), di prima specie, di origine T_{n_i}, contenuto in Σ_{n_i} a meno dell'origine;

3) φ_{n_i} *e* $\varphi_{n_i - 1}$ *sono contenuti* in S.

Allora $\lambda_{n_i} = Q_{n_i} A_{n_i}$ è un segmento base di t, atteso che φ_{n_i} appartiene ad S al pari di $\varphi_{n_i - 1}$.

Poichè i segmenti base di t si possono ottenere tutti considerando le immagini di un numero finito di essi nelle diverse potenze di ϑ, la successione $n_1, n_2, \ldots$ contiene infinite coppie di numeri n_i, n_j tali che λ_{n_i} sia l'immagine di λ_{n_j} in una conveniente potenza non identica di ϑ. E sia p, q (p minore di q) una coppia siffatta, anzi quella fra le coppie siffatte che si ottiene minimizzando prima p e poi q.

Ammettiamo (senza preoccuparci di indagare se si tratti o meno di una condizione indipendente dalle altre) che

4) λ_q sia l'immagine di λ_p o nella ϑ o nella ϑ^{-1},

e dimostriamo che allora risulta

$$\Sigma_q = \vartheta(\Sigma_p)\,, \qquad \text{se} \quad \lambda_q = \vartheta(\lambda_p)\,;$$

$$\Sigma_q = \vartheta^{-1}(\Sigma_p)\,, \qquad \text{se} \quad \lambda_q = \vartheta^{-1}(\lambda_p)\,.$$

Infatti, se fosse per esempio $\lambda_q = \vartheta(\lambda_p)$ e $\Sigma_q \neq \vartheta(\Sigma_p)$, $\varphi_q - \lambda_q$ e $\chi_p - \lambda_q$ apparterrebbero una ad uno e l'altra all'altro dei due campi adiacenti a σ_q e non incontrerebbero le rispettive immagini nella t; ma allora anche la curva $(\varphi_q - (\lambda_q - Q_q)) + (\chi_p - \lambda_q)$ non incontrerebbe la propria immagine nella t, il che è palesamente assurdo, atteso che $t(F)$ è interno al segmento di estremi F e $G = \vartheta(F)$, - peraltro non si tratta che di un caso particolare e singolarmente evidente del teorema fondamentale sulle traiettorie. Donde la conclusione.

Ma allora, ammesso che sia $\lambda_q = \vartheta(\lambda_p)$, è chiaro (cfr. Scorza Dragoni, II), nn. 44 e 45] che la semilinea

$$Q_p T_p \dot{+} [t_p - \lambda_q] \dot{+} \vartheta(Q_p T_p) \dot{+} [\vartheta(t_p) - \vartheta(\lambda_q)] \dot{+}$$
$$\dot{+} \vartheta^2(Q_p T_p) \dot{+} [\vartheta^2(t_p) - \vartheta^2(\lambda_q)] \dot{+} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

non incontra la propria immagine nella t, è semplice e periodica in x di periodo 1. E il primo risultato del n. 15 ci consente di affermare che allora è vero anche il teorema del n. 1.

Analogamente se fosse $\lambda_q = \vartheta^{-1}(\lambda_p)$.

Un altro caso in cui il teorema del n. 1 è senz'altro vero è quello in cui, per un certo valore di n, φ_n è una semilinea contenuta in S; allora infatti φ_n contiene una semiretta (orizzontale) che appartiene ad S e che non incontra la propria immagine, ecc.

Osservazioni. - Il ragionamento svolto nel n. prec. fornisce in sostanza un'altra peculiare realizzazione concreta della «deviazione del cammino». Ve ne sono forse ancora (anche più semplici di quella qui descritta nel § 3). E una di queste darà la chiave per superare gli ostacoli che si parano dinanzi alla costruzione sviluppata nel n. 23, quando la si voglia indirizzare alla dimostrazione del teorema del n. 1?

Un affinamento maggiore dei risultati ottenuti nella mia Nota XXI) potrebbe forse permettere di sostituire nel terzo paragrafo la condizione che $(\varphi - \alpha)$ e χ abbiano comune il punto U soltanto con quella che $(\varphi - \alpha)$ e χ non si taglino; analogamente per $(\varphi - \beta)$ e ψ e V; questo naturalmente porterebbe a cambiare le definizioni di U e V e permetterebbe di evitare nei nn. 17-20 le modificazioni delle spezzate x nelle spezzate v (anzi, che una simile modificazione si possa a conti fatti eliminare si potrebbe forse dedurre *a posteriori* anche dalle considerazioni qui svolte nei §§ 3 e 4).

Si noti infine che nel n. 23 si è proceduto per induzione completa; ricorrendo ad una induzione transfinita si potrebbe tentare di definire una successione transfinita di curve (o semilinee) quali le φ.

BIBLIOGRAFIA

G. D. Birkhoff:

I) *Proof of Poincaré's geometric theorem* [Transactions of the American mathematical Society, vol. XIV (1913), pagg. 14-28];

II) *An extension of Poincaré's last geometric theorem* [Acta mathematica, vol. XLVII (1926), pagg. 297-311];

III) *Une generalisation a n dimensions du dernier théorème de Poincaré* [Comptes rendus de l' Académie des Sciences de Paris, vol. CXCII (1931), pagg. 196-198].

L. E. J. BROUWER:

I) *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves* [Proceedings of the R. Academy of Amsterdam, vol. XII (1909), pagg. 286-297];

II) *Ueber eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich* [Mathematische Annalen, vol. XLIX (1910), pagg. 176-180];

III) *Beweis des ebenen Traslationssatzes* [Mathematische Annalen, vol. LXXII (1912), pagg. 37-54];

IV) *Remark on the plane translation theorem* (Proceedings of the Academy of Amsterdam, vol. XXI (1918), pagg. 935-936].

E. GAU:

I) *Démonstration directe du dernier théoréme de Poincaré* [Bulletin de Sciences Mathématiques, serie 2, vol. LXIII (1919), pagg. 12-17].

S. GHEZZO:

I) *Sulla teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XVI (1947), pagg. 73-85].

B. v. KERÉKJÀRTÓ:

I) *On a geometrical theory of continuous groups* [Annales of mathematics, serie 2, vol. XXVII (1925), pagg. 105-117];

II) *Note on the general translation theorem of Brouwer* [Atti del Congresso internazionale dei Matematici, editi da Zanichelli, Bologna (1928), vol. IV, pagg. 235-238];

III) *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* [Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, vol. IV (1928), pagg. 87-102];

IV) *Ueber die Fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [ibidem, vol. VI 1934), pagg. 226-234];

V) *Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen* [ibidem, vol. VI (1934), pagg. 235-262];

VI) *Ergänzung zu meinem Aufsatz: Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen* [ibidem, vol. VII (1934), pagg. 58-59];

VII) *Ueber reguläre Abbildungen von Flächen auf sich* [ibidem, vol. VII (1934), pagg. 65-75];

VIII) *Ueber die reguläre Abbildungen des Torus* [ibidem, vol. VII (1934), pagg. 76-84];

IX) *Bemerkung ueber reguläre Abbildungen von Flächen* [ibidem, vol. VII (1934), pag. 206];

X) *Sur le groupe des translations topologiques du plan* [Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie 2, vol. III (1934), pagg. 393-400];

XI) *Sur la structure des transformations topologiques des surfaces en elles-mêmes* [L' Enseignement mathématique, vol. XXXV (1936), pagg. 297-316];

XII) *Transformations topologiques et groupes continus* [Mat. fiz. Lap., vol. XLVI (1939), pagg. 1-12].

H. Poincaré:

I) *Sur un theéorème de géométrie* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, vol. XXXIII (1912), pagg. 375-407).

J. Rej Pastor:

I) *Los últimos teoremos geométricos de Poincaré y sus applicaciones* [Union Matematica Argentina, Memorias y Monografias en Fasciculos separados, serie 2ª vol. I, n. 4 (1946), pagg. 5-42].

W. Scherrer:

I) *Translationen ueber einfach zusammenhängende Gebiete* [Viertel-jahrschift der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich, vol. LXX (1925), pagg. 77-84).

G. Scorza Dragoni:

I) *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane* [Memorie della R. Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisic., mat. e nat., vol. IV (1933), pagg. 159-212];

II) *Una estensione dell'ultimo teorema geometrieo di Poincaré* [ibidem, vol. IV (1933), pagg. 213-269];

III) *Su l'ultimo teorema geometrico di Poincaré* (ibidem, vol. VII (1936), pagg. 35-59];

IV) *Qualche teorema sulle curve di Jordan* [Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie 6, vol. XXIII (1936), pagg. 181-186];

V) *Sulle linee di Jordan* [Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, vol. XV (1936), pagg. 5-8];

VI) *Sulle traslazioni piane del Brouwer doppiamente periodiche* [Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie 6, vol. XXIII (1936), pagg. 256-261];

VII) *Su una classe di trasformazioni del piano in sè, topologiche e dirette, prive di punti uniti* [Memorie della R. Accademia d'Italia, Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. VII (1936), pagg. 215-240];

VIII) *A proposito di un teorema fondamentale per lo studio delle traslazioni piane del Brouwer* [Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Roma, serie 4, vol. I (1936-37), pagg. 110-119];

IX) *Sul teorema generale di traslazione* [Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova, vol. VIII (1937), pagg. 83-91];

X) *Sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano e sulle loro curve di accumulazione* [Memorie della R. Accademia d' Italia, Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1937), pagg. 1-75];

XI) *Un' osservazione sull' esistenza di elementi uniti nelle trasformazioni topologiche del cerchio* (Annali di Matematica pura ed applicata, serie 4, vol. XIX (1940), pagg. 45-49];

XII) *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [Abhandlungen aus Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. XIV (1941), pagg. 1-21];

XIII) *Estensione alle quasi-traiettorie di un teorema di Brouwer sulle traiettorie di un autoomeomorfismo piano* [Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fis., mat, e nat., serie 8, vol. I (1946), pagg. 156-161];

XIV) *A proposito di un teorema di Terasaka* [Pontificia Academia Scientiarum, Acta, vol. X (1946), pagg. 321-338];

XV) *A poposito di un teorema sugli archi di traslazione di un autoomeofismo del piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie 8, vol. I (1946), pagg. 697-704];

XVI) *Ancora sugli archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, privo di punti uniti e conservante il senso delle rotazioni* [ibidem, serie 8, vol. I (1946), pagg. 918-922];

XVII) *Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate* [ibidem, serie 8, vol. I (1946), pagg. 1163-1166];

XVIII) *Su alcune totalità di archi di traslazione di un autoomeomorfismo piano, conservante il senso delle rotazioni e privo di punti uniti* [ibidem, serie 8, vol. II (1947), pagg. 34-37];

XIX) *Criteri per l' esistenza di punti uniti in trasformazioni topologiche del cerchio e loro applicazioni* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 4, vol. XXV (1946), pagg. 43-65];

XX) *Un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate e sua maggiore determinazione* [Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Padova, vol. XVI (1947), pagg. 86-158];

XXI) *A proposito di una costruzione fondamentale per lo studio delle traslazioni piane generalizzate* [Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, editi dall' Università di Roma e dall' Istituto di Alta matematica, serie 5, vol. VI (1947), pagg. 353-365];

XXII) *A proposito di un teorema fondamentale sulle traslazioni piane generalizzate: considerazioni preliminari* [Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie 8, vol. III (1947), pagg. 470-474];

XXIII) — — : *proposizioni preliminari* [ibidem, vol. III (1947), pagg. 474-478];

XXIV) — — : *dimostrazione nel caso di vertici di prima categoria* [ibidem, vol. IV (1948), pagg. 50-53];

XXV) — — : *compimento della dimostrazione* [ibidem, vol. IV (1948), pagg. 180-183];

XXVI) *Un contributo ulteriore ad un teorema sulle traslazioni piane generalizzate* [ibidem, vol. IV (1948), pagg. 284-289];

XXVII) *Alcuni teoremi sulle traslazioni piane generalizzate* [Annali Triestini, editi dall'Università di Trieste, serie 4, vol. I (1947), pagg. 5-40].

E. Sperner:

I) *Ueber die Fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, vol. X (1934), pagg. 1-47].

H. Terasaka:

I) *Ein Beweis des Brouwerschen ebenen Translationssatzes* [Japanese Journal of Mathematics, vol. VII (1930), pagg. 61-69].

G. Trevisan:

I) *Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata* [Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fis., mat. e nat., serie 8, vol. III (1947], pagg. 199-203] (11).

(11) Nel «Bulletin of the American mathematical Society» [vol. 54 (fascicolo 9, settembre 1948), pag. 841] è annunciato un lavoro di S. P. Diliberto sul *Poicaré's geometric theorem* [nota aggiunta sulle bozze di stampa].