GIUSEPPE ZWIRNER

Condizioni sufficienti per la complanarità dei punti di un arco di curva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 197-202

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__197_0>

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA COMPLANARITÀ DEI PUNTI DI UN ARCO DI CURVA

Nota (*) *di* GIUSEPPE ZWIRNER (*a Ferrara*).

In una Nota il CACCIOPPOLI ha dato la seguente proposizione:

Una linea piana, immagine continua di un segmento di retta che abbia ovunque tangente determinata in posizione e passante per un punto fisso si riduce ad un cammino tracciato su una retta passante per tale punto (1).

Analizzando però la dimostrazione di questo teorema data dal CACCIOPPOLI, si vede che il ragionamento là svolto porta a conclusioni più generali di quelle sopra enunciate.

Infatti l'Autore, supposta dapprima la curva c a punti semplici, sfruttando soltanto il fatto che in ogni punto di c la semitangente destra (sinistra) è per es. orizzontale (2), dimostra che la curva c si può scomporre in archi parziali c_i ognuno dei quali è rappresentabile con un'equazione del tipo $y = y_i(x)$, con $y_i(x)$ funzione uniforme di x, e quindi, per l'ipotesi fatta, ne segue $y_i(x) =$ costante. Ora l'esistenza in ogni punto di c di un'unica

(*) Pervenuta in Redazione il 20 Dicembre 1948.

(1) R. CACCIOPPOLI: *Sul lemma fondamentale del calcolo integrale* [Atti e memorie dell'Acc. di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, vol. 50 (1933-34), pp. 93-98].

(2) Chiamo semi-tangente *destra* (*sinistra*) alla curva continua

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$$

nel punto P_0 corrispondente al valore t_0 del parametro, la posizione limite, se esiste, per h tendente a zero per valori positivi (negativi), della semiretta avente l'origine in P_0 e passante per $[\varphi(t_0 + h), \psi(t_0 + h)]$ con $h > 0$ $(h < 0)$.

tangente (orizzontale) viene dal CACCIOPPOLI sfruttata solamente per dedurne la costanza delle funzioni $y_i(x)$.

Ma alla stessa conclusione, come è noto ([3]), si può arrivare anche supponendo che in ogni punto di c risulti orizzontale soltanto la semi-tangente destra (sinistra). Siccome poi il caso più generale di una curva c a punti multipli viene ricondotto dall'Autore al caso precedente togliendo, diciamo così, a c i cappi ([4]), possiamo formulare il seguente teorema, che generalizza quello sopra enunciato:

Una linea piana, immagine continua di un segmento di retta, che abbia ovunque semi-tangente destra (sinistra) determinata in posizione e passante per un punto fisso si riduce ad un cammino tracciato su una retta passante per tale punto.

Mi sono proposto di estendere quest'ultimo risultato alle curve continue qualunque dello spazio e il teorema a cui sono pervenuto è il seguente:

Una linea γ dello spazio, immagine continua di un segmento di retta, che abbia ovunque semi-tangente destra (sinistra) ([5]) determinata in posizione e appoggiantesi ad una retta fissa (propria o impropria) si riduce ad un cammino tracciato su un piano passante per tale retta ([6]).

2. - Per dimostrare il teorema enunciato supponiamo dapprima che la curva γ sia a punti semplici e ammettiamo, per esempio, che sia a semi-tangente destra parallela al piano $x\,y$.

Indichiamo con ([7])

([3]) LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration*, 2e édit., p. 77.

([4]) Per uno sviluppo dettagliato della dimostrazione rimando alla Nota citata di CACCIOPPOLI.

([5]) Ovviamente la definizione di semi-tangente destra (sinistra) ad una curva dello spazio in un suo punto è del tutto analoga a quella data in loc. cit. ([2]) per una curva piana.

([6]) In una mia Nota precedente [*Alcuni teoremi di geometria diretta relativi alle curve spaziali* (Atti dell'Acc. Nazionale dei Lincei, vol. IV (1948), pp. 524-530)]. ho dimostrato il teorema sopra enunciato nella ulteriore ipotesi che la curva γ fosse a punti semplici e che in ogni punto vi fosse un'unica tangente.

([7]) Naturalmente supponiamo che $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ non siano mai simultaneamente costanti in un intervallo.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \qquad (a \leq t \leq b)$$

le equazioni parametriche di γ e con $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ i coseni direttori della semi-tangente destra in un punto P di γ corrispondente ad un valore di t interno ad (a, b).

Nelle ipotesi ammesse, la funzione

$$f(t,h) = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{\sqrt{[\varphi(t+h) - \varphi(t)]^2 + [\psi(t+h) - \psi(t)]^2 + [\chi(t+h) - \chi(t)]^2}},$$

con h esclusivamente positivo, è sempre continua in h.

Inoltre posto

$$f(t, 0) = \lambda(t)$$

valgono le relazioni

$$\nu(t) = 0, \ f(t, 0) = \lambda(t) = \lim_{h \to 0} f(t, h), \ |\mu(t)| = \sqrt{1 - \lambda^2(t)}.$$

Siccome la funzione $f(t, h)$ converge per $h \to 0$, si potrà in corrispondenza ad un numero positivo ε determinare un intervallo (α_1, β_1), contenuto in (a, b), sul quale la convergenza sia uniforme a meno di ε, cioè:

$$|f(t, h) - f(t, k)| \leq \varepsilon \qquad \text{per} \quad k < h \leq \sigma, \tag{1}$$

con σ numero positivo convenientemente scelto ([8]).

Se nell'intervallo (α_1, β_1) la funzione $\lambda(t)$ risulta sempre diversa da zero, si otterrà corrispondentemente su γ un arco γ_1 la cui proiezione ortogonale sul piano xz è una curva a semitangente destra orizzontale e quindi, per quanto abbiamo visto, risulta

([8]) Cfr. loc. cit. in ([1]), pag. 96.

$$x = \chi(t) = \text{costante}$$

per $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$.

Supponiamo invece che in un punto t_1 di (α_1, β_1) risulti

$$\lambda(t_1) = 0.$$

Fissato allora un numero positivo $h_1 \leq \sigma$ si potrà in corrispondenza determinare un intervallo (α_2, β_2) contenente t_1 e contenuto in (α_1, β_1) per ogni t del quale risulti

$$| f(t, h_1) - f(t_1, h_1) | < \varepsilon,$$

e ciò per la continuità della $f(t, h)$ rispetto a t.

Di qui, dalla (1) e dalla

$$| \lambda(t) | = | f(t, 0) - f(t_1, 0) | \leq | f(t, 0) - f(t, h_1) | +$$
$$+ | f(t, h_1) - f(t_1, h_1) | + | f(t_1, h_1) - f(t_1, 0) |$$

segue, per $\alpha_2 \leq t \leq \beta_2$

$$| \lambda(t) | < 3\varepsilon$$

e quindi

$$| \mu(t) | = \sqrt{1 - 9\varepsilon^2} > \varepsilon$$

pur di aver scelto ε convenientemente piccolo.

Si otterrà quindi, per t variabile in $\alpha_2 \leq t \leq \beta_2$, su γ un arco di curva γ_2 la cui proiezione ortogonale sul piano $y\,x$ è una linea a semi-tangente destra orizzontale, e quindi

$$x = \chi(t) = \text{costante} \qquad \text{per} \quad \alpha_2 \leq t \leq \beta_2.$$

Possiamo perciò in ogni caso determinare un intervallo (α, β) contenuto in (a, b) in cui risulti

$$x = \chi(t) = \text{costante}.$$

Diciamo ora (α', β') il massimo intervallo contenente (α, β) e in cui risulta ancora $z = \chi(t) =$ costante. Due intervalli del tipo (α', β') sono esterni l'uno all'altro.

Sopprimendo allora dall'intervallo aperto (a, b) tutti i punti interni a questi intervalli massimi di costanza per la z, resterà un insieme perfetto E sull'intervallo aperto (a, b).

Dimostriamo ora che E è vuoto, con che resterà provato il teorema nella ipotesi supplementare che la curva sia a punti semplici.

Infatti se ciò non fosse si potrebbe sempre determinare un intervallo (p, q) contenuto in (a, b) e contenente punti di E, tale che in tutti i punti di E contenuti in (p, q) valesse ancora la diseguaglianza (1). Ragionando come precedentemente si verrebbe a determinare un intervallo (p_1, q_1) contenuto in (p, q) contenente punti di E e tale che in tutti questi punti risultasse sempre verificata, per es., la

$$\lambda(t) \neq 0 .$$

Consideriamo allora la curva $\bar{\gamma}$ che si ottiene dall'insieme corrispondente su γ ai punti di E contenuti in (p_1, q_1) aggregandogli gli archi di curva piana (paralleli al piano xy) che corrispondono su γ ai punti degli intervalli contigui a E in (p_1, q_1).

La proiezione ortogonale di $\bar{\gamma}$ sul piano xz è una linea a semi-tangente destra orizzontale e quindi

$$z = \chi(t) = \text{costante} \qquad \text{per} \quad p_1 \leq t \leq q_1 .$$

Ciò ovviamente sarebbe incompatibile con la definizione di E.

3. – Il caso più generale di una curva γ qualunque si riconduce al precedente con un ragionamento noto e che qui riassumiamo nelle sue linee essenziali.

Supponiamo che il teorema sia falso e consideriamo una porzione γ' di γ corrispondente all'intervallo (a', b') e tale che le z negli estremi siano diverse.

Si dimostra allora che sopprimendo da (a', b') tutti i punti interni agli intervalli (α, β) ai cui estremi corrispondono su γ punti coincidenti si ottiene da (a', b') un insieme perfetto E non vuoto e tale che a punti distinti di E che non siano estremi di intervalli contigui, corrispondono punti distinti su γ'. La linea γ'' di γ' che corrisponde ai punti di E non ha punti multipli e gli estremi di γ'' coincidono con quelli di γ'. Si può ora vedere che in ogni punto di γ'' esiste la semi-tangente destra e risulta parallela al piano xy. Infatti, identificando tra loro in E gli estremi degli intervalli contigui, prendiamo su E due punti distinti P e Q con Q alla destra di P e diciamo P'', Q'' i punti corrispondenti su γ'' (che sono punti anche di γ'). Al tendere, su E, di Q a P, mantenendosi sempre alla destra di P, il punto Q'' tende, variando su γ'' (e quindi anche su γ') a P'' e quindi la semiretta $P'' Q''$ tende a una posizione limite orizzontale. Ma qui vi è contraddizione perchè, per il risultato precedente, la curva γ'' dovrebbe giacere completamente su un piano parallelo al piano xy, contro il fatto che nei suoi estremi le z sono diverse ([9]).

([9]) Per uno sviluppo più dettagliato della deduzione rimando al n. 3 della Nota citata in ([1]).