Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Giuseppe Scorza Dragoni

Ancora a proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 18 (1949), p. 115-139

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1949__18__115_0>

ANCORA A PROPOSITO DI ALCUNI TEOREMI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Memoria (*) *di* GIUSEPPE SCORZA DRAGONI (*a Padova*).

Nella Memoria *A proposito di alcuni teoremi sulle equazioni differenziali ordinarie* (1) diedi una risposta « esauriente e definitiva » ad alcune pubblicazioni del CINQUINI. Dichiarai che dopo di quella risposta non ne avrei date altre sull'argomento; anzi, che non avrei nemmeno preso in considerazione quel qualche cosa che il CINQUINI avrebbe certamente detto nella illusione di poter replicare efficacemente a quella mia.

In seguito vi fu un Collega che volle tentare l'impresa disperata di una composizione amichevole della polemica. Per non entrare in dettagli, che potrebbero far individuare, anche se non venissero nominate, persone estranee alla faccenda, mi limiterò a dire che si rimase, il CINQUINI libero di replicare come meglio gli fosse piaciuto, io di reagire come meglio avessi ritenuto opportuno.

Mi avvalgo ora di questa libertà; me ne avvalgo ora che il CINQUINI ha risposto pubblicamente a quella mia Memoria (2).

Il CINQUINI ha voluto dare la migliore dimostrazione della inefficacia che io avevo facilmente vaticinata per la sua replica.

(*) Pervenuta in Redazione il 26 gennaio 1949.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XV (1946), pagg. 60-131. Per una *Rettifica*, questi « Rendiconti », vol. XVI (1947), pagg. 1-2.

(2) S. CINQUINI, *Sopra il metodo della scuola dell'Arzelà per il problema di Nicoletti per le equazioni differenziali ordinarie* [« Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXX (1947-48), fascicolo I]. Gli estratti di questo lavoro sono in circolazione da qualche giorno. Per indicare la mia Memoria citata in (1), mi uniformerò al simbolo usato dal CINQUINI nella Nota qui ricordata; epperò indicherò con $\mathfrak{Q}$) quella mia Memoria. Chiamerò invece $\mathfrak{Z}$) la Nota del CINQUINI.

Il CINQUINI ha voluto dare nuove prove di scarsa correttezza polemica: mutila infatti periodi e pagine in guisa essenziale, e dopo di averne stravolto il senso risponde trionfalmente. Il CINQUINI dà nuovamente l'impressione che la sua competenza in alcuni degli argomenti in questione sia di una profondità assai dubbia.

Queste affermazioni possono sembrare gravi: saranno giustificate nelle pagine seguenti (3).

§ 1.

1. - Trascrivo *ad litteram* il n. 2 di Z).

« Venendo a rispondere ad alcuni punti del contenuto di Ω), rileviamo che l'A. afferma [Ω), pag. 60] che « i §§ 1 e 2 non hanno . . . nessuna consistenza scientifica ». Essi si riferiscono ad alcune inesattezze contenute in precedenti lavori dello SCORZA DRAGONI, sulle quali non vogliamo ritornare. Ci limiteremo a due soli rilievi (VIII) (4):

1) Nella Nota lincea *C*) dello SCORZA DRAGONI leggesi (n. 2, pag. 47): « A questo scopo, nello strato $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < y' < +\infty$ poniamo $\varphi_1(x, y, y') = [1 + \text{tg h}(y - y_1(x))]\, \varphi(x, y_1(x), y')$, $\varphi_2(x, y, y') = [1 + \text{tg h}(y - y_2(x))]\, \varphi(x, y_2(x), y')$, ... Allora φ_1 e φ_2 sono continue e

(3) Per comodità, le pubblicazioni del CINQUINI, di ZWIRNER e mie verranno ricordate (finchè possibile) con lo stesso simbolo usato in Ω). Così *A*), *B*), *C*), *D*), *E*), *F*), *G*), *H*), *I*) sono lavori miei, per le cui indicazioni bibliografiche si vedano rispettivamente le note (5), (6), (11), (12), (17), (22), (22), (25), (59) di Ω); invece *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*), *h*), *i*), *l*), *m*) sono i lavori di ZWIRNER citati in Ω) nelle note (14), (20), (24), (25), (28), (40), (62), (66), (66), (69), (76); mentre I), II), III), IV), V), VI), VII), VIII), IX), X) corrispondono a quei lavori del CINQUINI, che questi nella nota (2) di Z) chiama rispettivamente 1), 9), 10), 6), 3), 5), 2), 4), 8), 7).

(4) Le cifre romane in corpo minore si riferiscono a note a piè di pagina contenute nei lavori originali; queste note verranno riportate qui soltanto quando se ne vorrà discorrere.

Per esempio, questa nota (VIII) dice « Vogliamo precisare, a proposito delle prime righe della pag. 65 (n. 3) di Ω), che la nostra [cioè del CINQUINI] crescenti rispetto a $y, \ldots$». Nella Memoria Ω) lo Scorza Dragoni scrive tra l'altro (n. 7, pag. 72): « perchè il problema, di fronte al quale ci si trovava nella mia Nota lincea, non era di prolungare la funzione φ, mediante funzioni del tipo $\varphi(x, y_i(x), y') \cdot \cdot [1 + \chi(y - y_i(x))]$, in modo di farla risultare continua, ecc. ...; bensì quello di prolungare la funzione φ in modo da farla risultare continua, ecc. ...». Ci consenta l'A. di aggiungere una parola: il problema che si presentava nella Nota lincea *C*) era proprio quello di prolungare la funzione φ in modo conveniente, ma la stessa Nota lincea contiene un esplicito ed effettivo prolungamento della funzione φ in una forma tale che, *contrariamente a quanto l'A. aveva espressamente affermato nel luogo stesso,* le funzioni $\varphi_i(x, y, y')$, $(i = 1, 2)$ non risultano sempre crescenti rispetto a y (fatto essenziale per applicare il criterio del n. 1 di *C*)).

2) Nella nota (XXI) a piè della pag. 221 della nostra Nota III) abbiamo scritto: « Tale artificio è indicato anche dal prof. Scorza Dragoni (n. 4, Osservazione II, p. 211), ma in modo inesatto, perchè lo Scorza Dragoni pone $g = f$, là dove $|f| \leq H$; $g = H$,

frase (che figura alla fine del n. 2 di III)): « e in modo evidente ne segue l'asserto » sottintende le ultime cinque righe del n. 42 di Ω) ». Ed ecco ora le prime righe della pag. 65 di Ω): « L'ultima deduzione fra virgolette è, immagino, appunto quella che si nasconde sotto il « e in modo evidente ne segue l'asserto » del Cinquini . . . ». Ed ecco ora la deduzione fra virgolette contenuta nella pagina 64 di Ω): « . . . per questo risultano soddisfatte disuguaglianze analoghe alle (6); esso è quindi un elemento unito anche per la (1) . . . ». Dalla nota (VIII) del Cinquini un lettore frettoloso potrebbe essere indotto a pensare che la mia « immaginazione » si sia ingannata. Ma se andasse a controllare cosa dicono le ultime cinque righe del n. 42 di Ω), troverebbe che in esse viene appunto dimostrato che « per questo risultano soddisfatte disuguaglianze analoghe alla (6) . . . »! La nota (VIII) è quindi una replica apparente, – beninteso, se replica era nelle intenzioni del Cinquini, e non soltanto nel modo con cui il Cinquini si è espresso.

Repliche apparenti, sempre se repliche erano nelle intenzioni del Cinquini, sono anche:

il n. 4 di Z), nel quale il Cinquini non risponde a nessuno degli appunti mossigli nel § 4 di Ω), mentre invece dice: « In risposta a tutto il § 4 di Ω), ci limitiamo a far presente che il nostro inciso . . . « in forma un po' ambigua » si riferiva alla frase dello Scorza Dragoni . . . « e la cosa è banale », là dove $|f|>H$». A tale nostro appunto risponde lo Scorza Dragoni [Ω), n. 2, pag. 64]: «Questa citazione è reticente ed ambigua.... Ed è molto improbabile che il lettore.... possa immaginare che, in quell'Oss. II), io mi proponga appunto di far rilevare come il mio criterio si possa ricondurre al caso che la f sia limitata». Non c'è nulla nè di reticente nè di ambiguo, perchè dalla nostra nota a piè di pagina, ora riportata, è ben evidente che la funzione g definita dallo Scorza Dragoni soddisfa sempre alla disuguaglianza $|g|\leq H$, cioè che essa è limitata».

2. - Incominciamo col restituire il suo esatto colore a quanto riportato dalla pagina 60 di Ω): «Debbo avvertire il lettore che i §§ 1 e 2 non hanno, specialmente il secondo, nessuna consistenza scientifica. In essi mi difendo da alcuni appunti, mossimi

nell'incertezza se tale apprezzamento fosse rivolto o all'idea di ricondurre la dimostrazione . . . al caso dei polinomi o alla parte rimanente della nota (XII) a piè delle pp. 168-169 di VI)»;

la nota (IV) di Z);

la nota (XI) di Z), perchè la Nota *d*) di Zwirner non contiene soltanto considerazioni di topologia piana dalle quali si sarebbe potuto dedurre una certa proposizione, ma contiene una dimostrazione di quella tal proposizione, che non è stata enunciata esplicitamente, perchè non ve ne era bisogno, attesi gli scopi di Zwirner;

tutto il capoverso β) del n. 3 di Z) [iniziato dal Cinquini con: «Le considerazioni sviluppate al § 3 di Ω) sembrano rivolte a sminuire l'importanza della nostra Memoria V); ma nel giudicare tanto minutamente una pubblicazione di alcuni anni prima è necessario riflettere sullo sviluppo della teoria a quella data»], perchè da diversi incisi di Ω) appare evidente che l'analisi del lavoro V) del Cinquini è stata condotta tenendo presente la data di pubblicazione della V) stessa [Ω), pag. 78: « . . sta di fatto che già a quell'epoca . . .», «. . . la cosa era abbastanza evidente per chi conosceva quanto a quell'epoca si sapeva già sulle equazioni del secondo ordine . . .»; Ω), pag. 83: «Si potrebbe obbiettare che ad una visione così limpida del procedimento delineato nel n. 13 ci si è giunti soltanto adesso, dopo la memoria V) del Cinquini. Ora . . .»];

la nota (XIII) di Z), perchè in tutta la Nota Z) non si trova nessuna replica (o perlomeno nessuna replica efficace) a quanto in Ω) è stato detto a proposito delle note (XVII) e (XIX) di III) [ma si veda anche la nota (12) della Memoria presente];

e si potrebbe continuare.

dal Cinquini e riferentisi in parte a delle mie sviste. Non è colpa mia se queste sviste non hanno nessuna importanza e se il discorrere su di esse mi costringe a scendere a delle considerazioni banali ».

3. - Dopo di ciò, passando al punto 1) del n. 2 di Z), vediamo un po' cosa scrissi nel n. 5 e nel n. 6 di Ω) a proposito della mia Nota lincea *C*):

« Nella mia Nota lincea *C*), *A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per un'equazione differenziale del secondo ordine* (XI), mi occorreva di prolungare una funzione $\varphi(x, y, y')$, continua e limitata nell'insieme $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $-\infty < y' < +\infty$, in modo che la funzione prolungata, $\psi(x, y, y')$, risultasse continua e limitata per x in $a \leq x \leq b$ ed y, y' qualunque, crescente rispetto ad y per $y \leq y_1(x)$ ed $y \geq y_2(x)$. Che un tale prolungamento fosse possibile era evidente. Per comodità ho preferito esplicitarne uno, ed ho posto: $\psi = \varphi$, là dove φ era già definita, $\psi = \varphi_1$, se $y < y_1(x)$, e $\psi = \varphi_2$, se $y > y_2(x)$, con $\varphi_i(x, y, y') = \varphi(x, y_i(x), y')\,[1 + \mathrm{tg\,h}(y - y_i(x))]$. Ora è evidente che in tal modo la funzione ψ risulta crescente soltanto se $\varphi(x, y_i(x), y')$ è sempre positiva. Ma è anche evidente che basta porre $\varphi_i(x, y, y') = \varphi(x, y_i(x), y') + \mathrm{tg\,h}(y - y_i(x))$ perchè tutto vada a posto. Il Cinquini ha richiamato l'attenzione su ciò nella prefazione di I), con le seguenti parole: « La dimostrazione .... data dall'A. [dimostrazione che va opportunamente corretta (VI)] sfrutta un teorema .... »; ed ecco la postilla (VI) (i corsivi sono del Cinquini): « (VI) Infatti le funzioni $\varphi_1(x, y, y')$ e $\varphi_2(x, y, y')$ - contrariamente a quanto afferma l'A. - *non sono* sempre *crescenti* rispetto ad y, perchè la $\varphi(x, y, y')$ *non* è supposta diversa da zero ». E ci troviamo di nuovo di fronte a delle affermazioni, che non dicono affatto, a chi non vada a controllare l'originale, che si tratta di sviste inessenziali! Perciò ho approfittato dell'occasione che mi veniva offerta dall'aver ripetuto la stessa svista nella Memoria *D*): *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine* (XII), stampata allora allora, per farle seguire una *Aggiunta* (XIII) in cui ridavo alla questione il suo giusto valore. Questa *Aggiunta* si chiudeva con le parole: Al CINQUINI evidentemente è sfuggito che nemmeno la $\varphi \neq 0$ sarebbe sufficiente per garantire la crescenza delle φ_i rispetto ad y », parole che venivano riferite alla postilla (VI), or ora citata » ;

e:

« A queste mie osservazioni il CINQUINI ha reagito con l'*Aggiunta* ricordata in I). In essa egli afferma, tra l'altro: « Lo SCORZA DRAGONI tiene, così, a far sapere ai suoi lettori che l'errore da Lui commesso è più grave di quello che risulterebbe dall'osservazione che io avevo fatto; e a tal riguardo nulla avrei da aggiungere . . . ». Ora nella mia *Aggiunta* io avevo detto in sostanza che « la forma effettiva » delle funzioni prolungate « non aveva alcun interesse », bastando che fossero soddisfatte alcune « condizioni qualitative, palesi e non implicanti, evidentemente, contraddizioni » e che avevo « preferito esplicitare il prolungamento per comodità »! Non occorrono commenti. Qualunque lettore può giudicare da sè della buona fede del CINQUINI! ».

Francamente non si capisce perchè il CINQUINI abbia sentito il bisogno di riparlare anche in Z) di quel povero Corinto, figlio di Giove.

4. - Non sarà poi male integrare anche quel periodo tolto da pag. 72 di Ω): « In queste righe » dell'*Aggiunta* del CINQUINI « si trovano: *a*) *uno svisamento della questione,* perchè il problema, di fronte al quale ci si trova nella mia Nota lincea, non era di prolungare la funzione φ mediante funzioni del tipo $\varphi(x, y_i(x), y')\,[1 + \chi(y - y_i(x))]$, in modo da farla risultare continua, ecc.. . . ; bensì quello di prolungare la funzione φ in modo da farla risultare continua, ecc.. . . ».

Il CINQUINI dunque è d'accordo su quello che io presento come un « perchè ». E il CINQUINI è anche d'accordo su quello di cui quel « perchè » è il « perchè »? Se sì, perchè non lo ha riconosciuto lealmente? E se no, perchè non si è difeso da questo, come da tutti gli altri appunti che gli ho mossi nel n. 7 di Ω) e nella relativa nota a piè di pagina 68?; « per ragioni di brevità » [Z), prefazione]? il CINQUINI dia a intenderlo ad altri!

5. - Per parlare del punto 2) del n. 2 di Z), converrà riassumere di che si tratta. Nella Nota A) io diedi un teorema per il problema al contorno

$$(1)\qquad y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0, \ldots, \quad y(x_n) = 0$$

per l'equazione

$$(2)\qquad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))\,;$$

in questo teorema la funzione f poteva anche non essere limitata, ma nell'Osservazione II) del n. 4 di A) feci osservare che « il teorema del n. 3 si riconduce facilmente al caso che f sia limitata . . . ». Nella prefazione di III) il CINQUINI scrisse « . . . inoltre, si fa presente che anche il criterio » del n. 3 di A) « si può dedurre, come è ben naturale, in poche parole anche da un caso particolarissimo di un nostro teorema (III), citato anche dallo SCORZA DRAGONI (IV) » e sviluppò la deduzione relativa nel n. 2 di III), dimostrando che *il mio criterio si poteva dedurre dal caso che la funzione f fosse limitata, con un ragionamento che presentava soltanto differenze formali* (*nè poteva essere altrimenti*) *rispetto a quello contenuto in quella mia Osservazione* II), *ricordata dal* *C i n q u i n i* *appunto in quella nota* (XXI) *di* III) ! Pertanto a pag. 64 di Ω), scrissi : « Questa citazione è reticente ed ambigua. Essa infatti tace che cosa io mi proponga di fare in quell'Oss. II), introducendo quell'artificio. Ed è molto improbabile che il lettore di questa postilla [la (XXI) di III)] *e delle parole* [del CINQUINI] *ricordate in* 1) *e in* 3) possa immaginare che, in quell'Oss. II), io mi proponga appunto di far rilevare come il mio criterio si possa ricondurre al caso che la f sia limitata ». Nel rispondere a queste frasi il CINQUINI ha soppresso quindi diverse parole, fra cui alcune in corsivo (nell'originale !). Non occorrerebbero commenti ! Ma non sarà male rilevare che lo stesso CINQUINI in Z), pur dopo avere soppresso quelle parole, dice soltanto « è ben evidente che la funzione g definita dallo SCORZA DRAGONI soddisfa sempre alla disuguaglianza $|g| \leq H$, cioè che essa è limitata »; ma non osa dire « . . . è ben evidente che lo SCORZA DRAGONI aveva già rilevato nell'Osservazione II) di A) quello che poi io ho ripresentato nel n. 2 di III) » !

§ 2.

6. – Il § 3 di Ω) è dedicato ad una *mise au point* di diverse questioni collegate col seguente

TEOREMA I) – *Se le funzioni $f_k(x_1,\ldots, x_m)$ sono continue nel rettangolo m — dimensionale R individuato dalle limitazioni $|x_1| \leq 1,\ldots, |x_m| \leq 1$ ed $f_k(x_1,\ldots, x_m)$ è negativa sulla faccia, F_k, di R contenuta nell'iperpiano $x_k = -1$ e positiva su quella, G_k, contenuta nell'iperpiano $x_k = 1$ $(k = 1,\ldots, m)$, le funzioni f_k si annullano simultaneamente in almeno un punto interno ad R* (5).

Fra le altre cose, in quel paragrafo mostro che lo ZWIRNER ha preceduto il CINQUINI nel ricondurre il problema di NICOLETTI al teorema I) (6).

Tacendo di legami fra il teorema I) ed una proposizione di BIRKHOFF–KELLOGG, tacendo di altre circostanze accennate in Ω) e sviluppate da ZWIRNER e da me in Noticine posteriori, ecc...., ricorderò che in quel paragrafo, a piè della pagina 85, ho sostanzialmente osservato che:

Il teorema I) equivale evidentemente al

TEOREMA II) – *L'origine delle coordinate è interna ad ogni insieme ottenuto per trasformazione (univoca e) continua di R, in modo che l'immagine di F_k sia contenuta nel semispazio $x_k < 0$ e quella di G_k nel semispazio $x_k > 0$;*

che:

Questo teorema II) si trova enunciato da BROUWER nella

(5) È questo il teorema cui il CINQUINI allude in Z) quando parla di proposizione C.

Per brevità non mi occuperò del fatto (notissimo e peraltro evidente) che f_k si può anche supporre non negativa su G_k e non positiva su F_k.

(6) Si veggano le Note *c*), *d*) ed *e*) di ZWIRNER. Ivi lo ZWIRNER sviluppa le sue deduzioni [sia pure senza enunciare esplicitamente il teorema I)]. in casi bidimensionali $(m = 2)$; ma nella nota (IV) di *d*) egli accenna esplicitamente al fatto che il suo procedimento non sembra legato al carattere bidimensionale del problema là trattato.

Nota *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl* [« Mathematische Annalen », vol. 70 (1911), pagg. 161–166, § 1], in una forma lievemente più restrittiva, nel senso che

TEOREMA III) – *L'origine delle coordinate è interna ad ogni insieme ottenuto da R mediante una trasformazione univoca (e continua), la quale sposti ogni punto di R di una quantità (variabile da punto a punto) minore di* 1;

e finalmente che:

BROUWER nel passo citato dimostra in effetti non il teorema III), bensì il teorema II).

Infine a piè della pagina 88 di quello stesso § 3 di Ω) ho ricordato che «... LEBESGUE nella Memoria *Sur les correspondances entre le points de deux espaces* [« Fundamenta Mathematicae », vol. 2 (1921), pagg. 256–285; nn. 3–8 e 14] sviluppa... dei ragionamenti che... portano ad un lemma di cui il teorema I) è una facile conseguenza...» (7).

7. – Nei riguardi di quel teorema I), il CINQUINI, nella nota (IX) di Z) dice: « Circa la proposizione I) lo SCORZA DRAGONI scrive [Ω), n. 18, pag. 93] che CINQUINI « non era in grado... di dire dove essa fosse dimostrata », ma che (pag. 94) essa « era proprio praticamente nota ». Però nelle pubblicazioni, anteriori al 1940 e citate dallo SCORZA DRAGONI in Ω), essa non è nè esplicitamente enunciata nè effettivamente dimostrata. Eppure, come abbiamo detto in (VI), essa era stata esplicitamente rilevata nel 1935; e quindi d'altra parte chi potrebbe escludere in modo assoluto che essa non fosse già stata stabilita in modo elementare? » (8).

Dunque, secondo il CINQUINI, non ostante che BROUWER abbia

(7) Nel passo citato si trovano altre notizie bibliografiche.

(8) Questa domanda in bocca del CINQUINI è davvero divertente. Quale sia poi la sua efficacia nella polemica lo si comprende facilmente, non appena si pensi che nel n. 21 di Ω), un numero di quel tale paragrafo 4, io scrissi: « E tutto questo che c'entra? chi ha mai contestato al prof. BRUSOTTI la capacità di dimostrare il teorema I) nell'ipotesi che le f_k [là dicevo Φ_j] fossero dei polinomi? e chi ha mai negato che questa ipotesi potesse semplificare il problema? anzi, chi ha mai negato che il teorema I) potesse essere addirittura noto? ».

esplicitamente enunciato (nel 1911) il teorema III), ma abbia effettivamente dimostrato il teorema II), che differisce soltanto formalmente dal teorema I); non ostante tutto questo, dico, BROUWER, secondo il CINQUINI, non ha « effettivamente dimostrato » il teorema I).

Concediamo pure al CINQUINI quanto desidera (col beneficio d' inventario, naturalmente).

Ed ora andiamo a vedere che cosa mai il CINQUINI dica nella nota (VI) di Z). Ecco: « Proprio in questi giorni ci viene gentilmente segnalato che la proposizione I) era già stata utilizzata in: M. GOLOMB, *Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen* ecc. [Math. Zeitschift., Bd 39 (1935), pp. 45 75], vedi pag. 55. Ivi la proposizione I) viene rilevata come conseguenza del teorema di BROUWER ».

Dunque, a quanto pare, GOLOMB avrebbe rilevato esplicitamente ed effettivamente dimostrato il teorema I).

Concediamo anche questo al CINQUINI.

Nella (VI) il CINQUINI non specifica a quale teorema di BROUWER egli alluda; ma, se non mi inganno, in tutta la Z), quando egli parla di teorema di BROUWER intende riferirsi al seguente

TEOREMA IV) – *Una trasformazione univoca e continua di R in una sua parte, lascia almeno un punto invariato* (9).

Comunque non sarà male andare a controllare anche il passo di COLOMB, citato dal CINQUINI. Ivi GOLOMB, nel corso di una dimostrazione e salvo qualche differenza nei simboli, dopo di aver osservato che le funzioni f_k da lui considerate sono appunto negative su F_k e positive su G_k, conclude testualmente: « Daraus folgt, z. B. nach dem Brouwerschen Verschiebungssatze (IX), dass

(9) Come è noto, per la validità del teorema basta che appartenga ad R l' immagine della frontiera di R. Ed una ulteriore estensione è stata data da SPERNER, *Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene* [« Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität » vol. 10 (1934), pagg. 1-47], pag. 6.

das Gleichungssystem $f_k = 0$ (10) mindestens ein reelles Lösungssystem d_k besitzt ».

Ora il Verschiebungssatz di Brouwer considerato da Golomb è proprio il teorema III); *che se il Cinquini avesse dei dubbi in proposito, osservi che nella nota* (IX) *a piè di quella tal pagina 55, Golomb rimanda proprio a « Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. Math. Annalen,* **70**, *S. 161-165 »* !

Via tutto questo è troppo divertente! Sarei proprio curioso di vedere che cosa il Cinquini tirerà fuori per mettersi d'accordo con se stesso! Forse egli si immagina che sarebbe replica efficace dire che, dopo tutto, il teorema II) è equivalente al teorema IV) (11) e che quindi non è del tutto sbagliato dire che Golomb deduce il teorema I) dal teorema IV)? O forse preferirà dire che di quella notizia, gentilmente fornitagli e sostanzialmente esatta, egli si è affrettato ad avvalersene in Z), senza preoccuparsi di vedere che cosa esattamente essa significasse e senza nemmeno lontanamente sospettare che egli avrebbe finito col trovarsi in palese e flagrante contraddizione con se stesso? (12).

8. – Esaminiamo ora un po' il contenuto dei passi di Lebesgue ricordati in Ω) a piè di pag. 88 e qui alla fine del n. 6.

(10) Come dissi di già, i simboli usati da Golomb sono diversi.

(11) La cosa è vera; i teoremi II) e IV) sono entrambi notoriamente equivalenti al teorema I); naturalmente il Cinquini avrebbe bisogno di riconoscere questa equivalenza senza passare per il teorema I), ma la sua replica rimarrebbe sempre inefficace,

(12) Il non avere citato il lavoro di Golomb in Ω), e nelle Noticine che ho successivamente dedicate al teorema I), si traduce anche per me in un appunto; ma di tutt'altra natura! L'appunto che mi si può fare è questo: che a distanza di anni (se non addirittura nel momento in cui scorsi il lavoro di Golomb) a me sfuggì che in un lavoro, il quale suscitò il mio interesse soltanto parzialmente (più per i risultati ivi contenuti che per i procedimenti dimostrativi là seguiti), era già contenuta l'osservazione che il teorema I) si poteva considerare un altro modo di formulare il teorema II). E perchè non sembri che io stia facendo delle affermazioni gratuite, ricorderò, per tacere d'altro, che in una Nota lincea del 1935 [vol. XXII, pagg. 385-392], io diedi un'altra dimostrazione di uno dei teoremi di Golomb, ispirandomi ad un procedimento di Caccioppoli; e che ho applicato lo stesso

Per alleggerire l'esposizione, adatto le considerazioni di LEBESGUE ai simboli attuali, inoltre enuncio soltanto un caso particolare del

procedimento in una Memoria, pubblicata in questi «Rendiconti» [vol. VII, pagg. 1-35]; per provare che io non ho approfondite a suo tempo le dimostrazioni di GOLOMB, ricorderò che nella nota (V) di quest' ultima Memoria dissi, senza prendere nessun partito: «Sui risultati di GOLOMB relativi al sistema (3) SCHAUDER . . . sembra fare delle riserve . . .».

Comunque, se il CINQUINI vuole fare suo questo appunto, faccia pure. Ma mi permetta di ricordargli la parabola del fuscello e della trave.

Mi spiegherò subito, dopo di aver rifatto un po' di storia, per riuscire più chiaro.

Dunque, in un riassunto pubblicato nel «Zentralblatt für Mathematik», vol. 25, pag. 324, io scrissi, a proposito dei teoremi contenuti nella Nota X) del CINQUINI: «Alle diese Resultate sind auch Folgerungen eines topologischen Satzes von CACCIOPPOLI [Rend. Acc. Naz. dei Lincei, VI s., **13**, 498-502, dies. Zbl. **2**, 32]».

Il CINQUINI si affrettò a pubblicare la sua II), in cui, per «far rilevare che una tale asserzione del Signor SCORZA DRAGONI non ha, fino ad oggi alcun fondamento», si sbracciò a dimostrare che i suoi teoremi non seguivano da quelli che CACCIOPPOLI dava là per le equazioni differenziali; concludendo: «Non occorre dunque aggiungere parola per metter in evidenza che dai risultati che figurano nella Nota del CACCIOPPOLI, citata dallo SCORZA DRAGONI, non segue alcuna delle nostre proposizioni».

Dopo la II) del CINQUINI uscì la Nota *f*) di ZWIRNER, nella quale naturalmente era pienamente riconosciuto che la mia affermazione aveva tutti i fondamenti desiderabili; un' altra applicazione degli stessi procedimenti feci io nella Nota *A*), nella quale ripetei che i teoremi dati da CINQUINI nella X) erano «tutti conseguenze della proposizione di CACCIOPPOLI ricordata nella nota (III)».

Ed il CINQUINI allude appunto a questa affermazione della *A*), quando nella nota (XIX) a piè della pag. 220 di III), scrive: «Ad altra . . . affermazione» di SCORZA DRAGONI «risponde già una nostra recente Nota . . .», la II), «ci limitiamo qui a soggiungere quanto abbiamo posto in evidenza in (XVII)». Ora la nota (XVII) di III) afferma sì: «Mettiamo ancora in rilievo che lo ZWIRNER impiega una Nota di nove pagine . . . per mostrare che il nostro teorema citato in (III) è «conseguenza» dell' osservazione di CACCIOPPOLI; è dunque ben evidente che, se pur i teoremi da noi stabiliti per via elementare si possono ritrovare anche con mezzi più elevati (ma l' interessante sarebbe proprio il viceversa!), ciò non è una semplice «conseguenza» come il prof. SCORZA DRAGONI va sentenziando con molta facilità e con irriducibile insistenza, ma richiede la pubblicazione di lavori che riempiono parecchie pagine», la nota (XVIII) di III), dico, contiene sì le affermazioni ricordate; ma, checchè il CINQUINI dica nella (XIII) di Z), lo scrivere «ci limitiamo a soggiungere», non significa ritrattare le affermazioni precedenti. Eplemma di LEBESGUE (naturalmente quel caso che maggiormente ci interessa) e lo presento nella forma più adatta (senza per questo

però, dato per di più che quella tal nota (XIX) di III) viene ancora ricordata la II) come risposta ad altra mia affermazione, io avevo tutto il diritto di ritenere, come feci nelle ultime righe del n. 29 di Ω), che il CINQUINI ancora credesse la sua II) una replica efficace; e quindi ritenni opportuno spiegare al CINQUINI quale fosse quel benedetto «topologischer Satz». Comunque, dato e non concesso che il CINQUINI, nel momento in cui scriveva la III) non avesse bisogno di ulteriori spiegazioni su quel «teorema topologico», di simili spiegazioni il CINQUINI aveva certamente bisogno quando scrisse la II).

Concludendo: se il CINQUINI vuole muovere a me l'appunto di essermi lasciato sfuggire cinque o sei righe di un lavoro di GOLOMB, faccia pure; ma non dimentichi come egli, pur essendo avvertito che in un lavoro di CACCIOPPOLI vi era un teorema topologico che si prestava a dedurre i suoi, ha avuto l'abilità di farsi sfuggire quel teorema.

Invece di passare sotto silenzio una simile ingenuità, il CINQUINI, nella nota (XIV) di Z), terzo alinea, scrive: «Ma vogliamo rilevare che nella Nota *A*) lo SCORZA DRAGONI non aveva precisato quale fosse l'«Osservazione di CACCIOPPOLI» a cui si riferiva, mentre essa [riportata al n. 28 (pag. 103), e designata in Ω) teorema di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI] figura nel lavoro di CACCIOPPOLI [luogo citato in (X) di Ω)] in caratteri ordinari (*sic!*) senza che in alcun modo sia tipograficamente richiamata l'attenzione del lettore». Via, ma tutto questo è veramente troppo enorme! Invece, il CINQUINI, non ancora soddisfatto, continua «Inoltre nella dimostrazione che forma oggetto della Nota *f*) ZWIRNER cita soltanto il teorema di BROUWER, e nella dimostrazione della Nota *l*) rinvia alla Nota *f*)». E che colpa ho io, se il CINQUINI non è stato capace di accorgersi, leggendo le Note *f*) ed *l*), che in queste lo ZWIRNER si dimostra quel caso particolare del teorema di BIRKHOFF- KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI che lo interessava? Anche di questo io ho già avvertito il CINQUINI: si veda la nota (LII) di Ω).

E poi, vogliamo, dopo tutto, andare un po' a leggere quelle parole di «colore oscuro», cioè, per essere più fedeli al dettato del CINQUINI, quelle parole scritte «in caratteri ordinari»? Eccole (CACCIOPPOLI, loc. cit. pag. 500): «. . . Sicchè la trasformazione (3) ammetterà certamente elementi uniti se converte lo spazio Σ delle funzioni u continue con le loro derivate u_1 , . . . , u_q in un insieme compatto (II); ciò avverrà, per es., se la F è limitata, risultando allora per ipotesi v , v_1 , . . . , v_q equicontinue ed equilimitate. Ma si trova subito un risultato più generale: non occorre infatti che tutto lo spazio Σ, basta che una sua porzione Σ' sia trasformata in un insieme compatto in essa contenuto, purchè allora Σ' sia così costituita da ammettere, al pari di Σ, come modelli topologici approssimanti campi n dimensionali semplicemente connessi (III). Quest'ultima circostanza si presenterà, p. es., se Σ' è dedotta da Σ imponendo un limite superiore M

introdurre modificazioni essenziali). Dato, dunque, il numero naturale q, consideriamo gli iperpiani di equazioni

$$x_k = \frac{p}{q} \qquad (p = 0, \pm 1, \ldots, \pm q; \; k = 1, \ldots, m)$$

e mediante questi decomponiamo R in tanti intervallini m — dimensionali, definiti mediante limitazioni del tipo

$$\frac{s}{q} \leq x_k \leq \frac{s+1}{q} \qquad (s = -q, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q-1; \; k = 1, \ldots, m)$$

Siano ora $J_1, \ldots, J_m$ degli insiemi somma ciascuno di alcuni di questi intervallini; e si supponga che J_k contenga F_k e sia privo di punti comuni con G_k. Si indichino con I_1 l'involucro chiuso dell'insieme dei punti frontiera di J_1 interni ad R; con I_2 l'involucro chiuso dell'insieme dei punti interni ad R e di frontiera (su I_1) per l'intersezione $I_1 \cdot J_2; \ldots$. Ciò premesso, nei passi di Lebesgue citati (e precisamente nei nn. 5, 6, 7 ed 8) è dimostrato che gli insiemi $I_1, \ldots, I_m$ son tutti non vuoti. È questo il lemma di Lebesgue cui alludevo a piè di pagina 88 di Ω) ([13]). *E si comprende subito in che senso il lemma di Lebesgue possa essere utilizzato per dimostrare il teorema* I). *Se si sviluppano tutte le deduzioni, si ottiene in sostanza l'estensione al caso di m qualunque delle considerazioni svolte dal Cinquini nel n. 7 di* Z) *per* $m = 2$; *vale*

ai valori assoluti di $u, u_1, \ldots, u_q, \ldots$». Via, non credo che debba riuscire molto difficile comprendere che questo è un risultato topologico, piuttosto ricco di conseguenze!

In conclusione l'ultimo alinea della nota (XIV) di Z) è, a voler essere generosi, una replica apparente.

Repliche apparenti sono anche i primi due alinea della stessa nota (XIV) di Z). E non scenderò in dettagli ulteriori.

([13]) Volendo avrei potuto dire: esiste un punto interno ad R e comune alle frontiere di $J_1, \ldots, J_m$, allontanandomi un po' di più (ma sempre presso che formalmente) dall'esposizione di Lebesgue, Un passaggio al limite condurrebbe a dare al lemma di Lebesgue la forma con cui esso si trova esposto nella mia Nota *Sull'esistenza di soluzioni per un sistema di n equazioni in n incognite* [«Pontificia Academia Scientiarum, Acta», vol. X (1946), pagg. 127-134], n. 1, Oss. II.

a dire, in sostanza (in sostanza, beninteso !), nel n. 7 di Z) il Cinquini non ha fatto altro che ricondurre il teorema I), *per* $m = 2$, *al lemma di Lebesgue*!

Epperò in Ω) non avevo forse tutti i torti a dire che il teorema I) era praticamente già noto, diversi anni prima del 1935!

9. - Nel § 3 (e nel § 4) di Ω) ho anche esaminato una situazione di fatto relativa a un curioso modo di procedere del Cinquini. Chi desideri maggiori dettagli veda i nn. 17-22 di Ω). Qui mi limiterò ad osservare quanto segue.

In Z) il Cinquini, dopo di aver dato la sua versione dell'antefatto, conclude: « Causa questa nostra mancata presa di posizione, nel § 3 di Ω) ci vengono mossi svariati appunti (IX) per aver usufruito in VI) della proposizione I), ammettendo che essa fosse già nota almeno nel caso in cui le funzioni f_k siano razionali intere. A tal riguardo basterebbe ricordare alcune parole di Giuseppe Vitali (X): «il matematico possiede una particolare intuizione che gli permette di sentire la verità della verità, anche se mancano gli elementi logici di una tale persuasione....», le quali sono del tutto confermate dall'obbiettiva realtà delle cose: 1) *la proposizione* I) *è pienamente valida;* 2) *essa può essere stabilita elementarmente.* Ma è più efficace rilevare che questa duplice realtà fa apparire del tutto superfluo il contenuto di quelle pagine del § 3 in cui si dilunga l'artificiosa polemica dello Scorza Dragoni ».

Ma le parole di Vitali, incontrovertibili e lapalissiane per qualunque matematico (tanto da non aver bisogno davvero di essere sostenute mediante l'autorità dello stesso Vitali) non permettono a nessuno, nemmeno al Cinquini, una « lunga promessa con l'attender corto »; non permettono davvero al Cinquini di promettere nella prefazione di un lavoro più di quanto il lavoro effettivamente contenga [si veda la fine del n. 17 di Ω)]; non permetteno davvero al Cinquini di affermare nel testo di una conferenza: « Si conclude che... » [quando non si è « in grado nè di dimostrare » la conclusione desiderata « nè di dire dove essa è dimostrata »], e di scrivere in nota a piè di pagina: « Questa conclusione, se non sembra evidente nelle attuali ipotesi in cui le

f_k sono funzioni continue... si deduce nel seguente modo dal caso, che riteniamo noto, in cui le f_k sono funzioni razionali intere... », – precisamente si veggano la prefazione e le pagine 168–169 di VI).

Ed è appunto questo curioso modo di procedere, e non una mancata presa di posizione del CINQUINI, la causa di alcuni degli svariati appunti che in Ω) vengono mossi al CINQUINI. Naturalmente, poichè si tratta più che altro di una questione morale, il secondo « più efficace » argomento addotto dal CINQUINI a sua discolpa è *a priori* di una efficacia assai dubbia (*a priori* appunto perchè in esso non si ravvisa alcuna considerazione di indole etica). Epperò non starò ad insistervi oltre.

§ 3.

10. – Nel § 6 di Ω) io precisavo il mio pensiero nei riguardi dei metodi per lo studio di problemi (non lineari) in analisi funzionale, prendendo in esame quelli che risalgono a BIRKHOFF, KELLOGG, SCHAUDER e CACCIOPPOLI (per tacere di altri) e il cosiddetto metodo di SEVERINI per lo studio del problema di NICOLETTI.

In quel paragrafo precisai implicitamente (ved. per es. il n. 31) il punto di vista dal quale erano preferibili i metodi di BIRKHOFF - KELLOGG - SCHAUDER CACCIOPPOLI e quello dal quale era preferibile il metodo di SEVERINI (*alias*, in quali casi erano preferibili i primi e in quali il secondo).

Inoltre (per tacere dei nn. 32 e 33) nel n. 34, allo scopo di essere meglio inteso, esposi a che cosa si riduceva il metodo di BIRKHOFF - KELLOGG - SCHAUDER - CACCIOPPOLI quando si voleva trattare il problema (1) per l'equazione (2), a secondo membro minore in modulo di una funzione sommabile (è inutile qui precisare dove) della sola x, e nel n. 35 esposi la soluzione dello stesso problema ottenuta col metodo di SEVERINI. E paragonai fra di loro le due soluzioni nei nn. 36 e 37.

Conclusi osservando che i due metodi facevano uso, il primo, del teorema IV) [equivalente al teorema I)] per ogni valore di

m, del teorema di ASCOLI sugli insiemi di funzioni equicontinue ed equilimitate, del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale (e dei teoremi fondamentali della teoria della misura); il secondo, del teorema I) per $m = n - 1$, del teorema di ASCOLI, del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale e [almeno per quanto fino a quel momento si sapeva, perchè ancora non erano state pubblicate alcune ricerche di STAMPACCHIA, annunciate e largamente riassunte, nella loro sostanza, per quel che aveva tratto il problema (1) per la (2), nella nota (LXVII) di Ω)] del teorema di esistenza e di dipendenza continua dai valori iniziali per le soluzioni di un'equazione differenziale soddisfacente ad opportune condizioni.

Feci osservare che il vantaggio di richiedere l'uso del teorema I) con m uguale soltanto ad $n - 1$ diventava « molto illusorio non appena » fosse richiesto di studiare il problema (1) per la (2), con l'ordine della (2) prefissato a piacere [Ω), a piè di pag. 123; si vegga anche il terzo alinea del n. 37]. E conclusi:

« Sicchè la posizione mentale del CINQUINI nei riguardi del problema di NICOLETTI, studiato per equazioni differenziali d'ordine prefissato a piacere, è la seguente:

α) deve in sostanza ammettere la conoscenza del teorema» IV) « di BROUWER per spazi euclidei ad un numero qualunque di dimensioni, — conoscenza che, in virtù dell'osservazione di MIRANDA, non potrà mai superare, in quanto a profondità di pensiero, quella del teorema 1) — ;

β) conosce un procedimento, quello del n. 34, che permette di dare una risposta affermativa al problema di NICOLETTI [e non al problema di NICOLETTI soltanto], applicando in maniera elegante, rapida e semplice il teorema d'ASCOLI e il teorema di BROUWER (oltre a quello di passaggio al limite sotto il segno di integrale, naturalmente);

ma lui preferisce seguirne un altro

j) che non è più rapido (presuppone note cose che il metodo del n. 34 può trattare simultaneamente al problema di NICOLETTI, e cioè una risposta al problema di CAUCHY);

jj) che non è più semplice;

jjj) che non si è rivelato finora capace di condurre a risultati e procedimenti così proteiformi come sono quelli che Caccioppoli ed altri hanno dato, ispirandosi ad una visione geometrica dei problemi dell' analisi funzionale (LXVI);

jjjj) che rispetto a quello sviluppato nel n. 34 può avanzare una sola pretesa gratuita di vantaggio (LXVII): di richiedere l' uso del teorema I) in ispazi la cui dimensione è minore dell' ordine dell' equazione per cui il problema di Nicoletti è posto, mentre l' altro ha bisogno del teorema di Brouwer per ispazi euclidei ad un numero qualunque di dimensioni.

Se al Cinquini piace assumere e compiacersi di mantenere posizioni mentali del genere, faccia pure; ma non dia ad intendere di avere *messo le cose a posto in modo chiaro e definitivo* (LXVIII) ».

11. - Ecco ora le risposte del Cinquini ai punti *j*), *jj*), *jjj*), *jjjj*), intercalate da mie osservazioni, [si vegga il n. 6, β) di Z)]:

« Ora:

j) la risoluzione del problema di Cauchy è cosa ben nota e elementare, altrettanto non può dirsi per la teoria degli spazi funzionali e per i concetti di topologia richiesti dal teorema di B. K. S. C. riportato al n. 28 di Ω) (pag. 103). Per solito un metodo elementare appare più lungo di un metodo più elevato ma ciò è tutta apparenza: nel caso in questione non bisogna dimenticare di tenere conto di quelle considerazioni non elementari che sono necessarie per giungere a stabilire il citato teorema di B. K. S. C. » ;

Il Cinquini commette una delle solite confusioni: le mie parole sotto la *j*) del n. prec. si riferiscono al n. 34 di Ω); e in quel numero non si fa nessun uso del teorema generale enunciato nel n. 28 della stessa Ω), bensì si mostra a quale semplice ed elegante trattazione del problema (1) per la (2) si pervenga, quando si faccia uso del metodo di Birkhoff – Kellogg – Schauder – Caccioppoli; per quanto detto nel n. 34 non occorrono conoscenze più elevate di quelle che occorrono per comprendere il n. 35 di Ω) [e questo anche se per dimostrare il teorema IV) si ricorre al ragionamento usato a suo tempo da Birkhoff e Kellogg invece che (all'osservazione di MIRANDA e) alla dimostrazione fornita poi dal BRUSOTTI per il teorema I), nel caso che le f_k siano polinomi];

« *jj*) la maggior semplicità (che lo SCORZA DRAGONI vorrebbe negare senza alcuna motivazione) del metodo della Scuola dell'ARZELÀ è evidentissima: a prescindere dalla proposizione I) esso richiede soltanto nozioni e proposizioni elementari che sono alla base della teoria delle funzioni di variabile reale, in antitesi a quanto abbiamo rilevato nel precedente capoverso relativamente al teorema di B. K. S. C., il cui enunciato è già ben astruso»;

che io neghi senza motivazione una maggiore semplicità... è falso! per negare questa maggiore semplicità io ho fornito il migliore dei motivi che si potesse desiderare: ho esposto i due metodi applicandoli ad uno stesso problema (particolare, ma tipico)! basta leggere quei nn. 34 e 35 di Ω)! invece il CINQUINI per motivare la «evidentissima maggiore semplicità...» commette la solita confusione, riferendosi al teorema generale del n. 28 di Ω) invece che alle considerazioni di quel n. 34;

« *jjj*) le applicazioni « proteiformi » non riguardano la natura ben determinata del problema in questione»;

si tratta della preferenza da accordare ad un metodo piuttosto che ad un altro, e il fatto che il primo consenta applicazioni proteiformi è questione che non interessa!! (14);

(14) Non sarà inopportuno riportare qui alcune parole di CACCIOPPOLI [«Rendiconti del Seminario matematico di Roma», serie III, vol. I (1931-1933), pagg. 13-22; si vegga l'inizio della pagina 18], le quali rispondono indirettamente anche a quanto CINQUINI dice nella sua Z), subito dopo il suo punto *jjjj*): «passeremo in rassegna alcuni metodi per lo studio di equazioni funzionali dei tipi più svariati, e generalmente non lineari, in vista, sopratutto dei risultati preliminari e fondamentali sull'esistenza e l'unicità delle soluzioni. In fondo più che di veri e propri algoritmi, come se ne conoscono per estese classi di equazioni lineari, si tratta di alcuni principi generali semplicissimi, ma singolarmente fecondi di applicazioni, desunti da considerazioni elementari di quella che può dirsi una geometria, topologica o metrica, degli spazi funzionali; geometria di necessità molto sommaria e semplicistica, ma che, come già la tanto più complessa geometria iperspaziale, rivela un valore di suggestione che trascende quello di un comodo linguaggio convenzionale».

«*jjjj*) fra la proposizione I) e il teorema di Brouwer (ancorchè fra loro equivalenti) c' è una differenza sensibilissima (la quale costituisce un primo rilevante vantaggio a favore della proposizione I)), non solo per il fatto che la prima si presenta come la naturale estensione del noto teorema relativo a una funzione continua (di una sola variabile) che assume valori di segno contrario negli estremi di un intervallo, ma anche perchè, come abbiamo già rilevato, la prima offre all' intuizione un' evidenza veramente suggestiva, mentre altrettanto non può dirsi per il secondo. Ma c' è di più: un altro notevolissimo vantaggio che è proprio del medodo della Scuola dell' Arzelà è costituito dal fatto che la risoluzione del problema di Nicoletti (considerato, per fissar le idee, nelle condizioni del n. 1, α)) si deduce da quella del problema di Cauchy usufruendo della proposizione I) per $m = n - 1$, vale a dire in uno spazio avente dimensione uguale al numero dei parametri che si devono determinare (XIX): i valori iniziali delle $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Tutto ciò non appare dal metodo di B. K. S. C., che invece richiede il teorema di Brouwer in spazi a un numero qualunque di dimensioni (XX)»;

la differenza di fronte all' intuizione fra il teorema IV) di Brouwer e la proposizione I) non è così sensibile come il Cinquini sembra credere. Il teorema di Brouwer è, dal punto di vista dell' intuizione grossolana, altrettanto evidente che la proposizione I); che se poi ci si mette dal punto di vista di un' intuizione più raffinata anche il teorema I) non è più tanto evidente. Insomma dal punto di vista di una suggestione intuitiva i due teoremi sono sullo stesso piano, tant' è vero che essi non sono soltanto equivalenti, ma *immediatamente* equivalenti [e particolarmente luminosa è proprio la deduzione del teorema di Brouwer dalla proposizione I)]. Osservo ancora che io adduco un motivo abbastanza serio per dichiarare « molto illusorio » quel « notevolissimo » vantaggio, mentre invece l' eguaglianza fra il valore di m cui si ricorre in quel tal problema di Nicoletti e il numero di quei parametri [15] mi sembra che sia un vantaggio soltanto

[15] Nel dire questo mi riferisco al metodo (peraltro veramente elegante) di Stampacchia, esposto nella nota (LXVII) di Ω).

se lo si vuol battezzare per tale, il considerare poi quel vantaggio come « notevolissimo » è in ogni caso per lo meno esagerato ([16]).

12. – Nel n. 6 α) di Z), il CINQUINI, fra l'altro, riporta il seguente mio periodo, sopprimendo le parole qui in corsivo [ma non in corsivo nell'originale; il quale trovasi a pag. 106, di Ω)]:

« Il CINQUINI dovrebbe sapere benissimo in quanti e quali lavori io mi sia avvalso, *quando lo ho ritenuto opportuno,* di procedimenti, *diciamo*, elementari [*necessariamente* basati proprio su quei teoremi di GIULIO ASCOLI sulle famiglie di funzioni equicontinue ed equilimitate, che stanno a fondamento di quei tali metodi della Scuola di CESARE ARZELÀ] ».

Il CINQUINI esamina quindi alcuni miei lavori, per vedere quali siano i metodi ivi adoperati e conclude: « Ma la nota *A*) (1942) prova l'assoluta preferenza dello SCORZA DRAGONI per la topologia funzionale, alla quale l' A. fa appello anche nella successiva Nota *B*) ». Se il CINQUINI crede di aver concluso qualcosa, faccia pure! Io potrei anche rispondergli soltanto che « la Nota *A*) prova che quando la scrissi ritenni opportuno usufruire della topologia funzionale ». E, in verità, non mi sembra che valga la pena insistere più oltre!

§ 4.

13. – Nel n. 40 di Ω) scrissi:

« Dal lavoro *f*) di ZWIRNER... è facile vedere che il teorema dato dal CINQUINI in V)... è una *conseguenza immediata* del teorema di BIRKHOFF – KELLOGG – SCHAUDER – CACCIOPPOLI [LXIX] ([17]) »;

([16]) Tutto questo almeno finchè i procedimenti di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI e quello di STAMPACCHIA si riguardino come procedimenti dimostrativi dell' esistenza; che se poi dovessero rivelarsi (nei casi in cui il teorema d'esistenza sia corredato da uno di unicità) come procedimenti di calcolo numerico, allora quel vantaggio sarebbe un vantaggio effettivo, in quistioni di calcolo numerico.

([17]) Ed ecco la nota [LXIX]: « la cosa è ancora più evidente se si guarda all' altro lavoro » *l*) di ZWIRNER.

e aggiunsi:

« Anzi, adesso che il CINQUINI ha creduto opportuno « sentenziare », senza accorgersi o per lo meno tacendo che il farlo dopo... quella mia Oss. II) di *A*) era un portare vasi a Samo, « ... è bene ricordare che tale risultato dello SCORZA DRAGONI è *effettivamente* un'immediata conseguenza anche del teorema di BIRKHOFF e KELLOGG ... » ..., adesso egli non può stare a cavillare intorno a certe accezioni della parola « conseguenza », a meno di non ritrattarsi poco decentemente. Ebbene sappia ora che nelle ultime righe dell'Oss. IV) di *A*) è appunto implicito che il suo risultato del n. 1 di V) non è soltanto « conseguenza », ma è anche « *conseguenza immediata* » del teorema di BIRKHOFF–KELLOGG–SCHAUDER-CACCIOPPOLI (LXX); ivi infatti pongo implicitamente in rilievo che la mia Oss. II) di *A*) si trasporta concettualmente tal quale dal mio al caso considerato dal CINQUINI (LXXI) ».

Nel n. 5 di Z), il CINQUINI scrive: « Nel § 5 (XIII) e nel § 7 (XIV) di Ω), in risposta alla nostra nota (XVII) a piè della pag. 220 di III), lo SCORZA DRAGONI riafferma che il nostro teorema I) di V) è « conseguenza » del teorema di B. K. S. C. (XV); anzi al n. 40 (pag. 125) leggesi: « Dal lavoro *f*) di ZWIRNER... è facile vedere che il teorema dato dal CINQUINI... è una *conseguenza immediata* del teorema di B. K. S. C. » (XVI) »; trascura completamente l'ultimo dei miei passi su riportati; espone alcune considerazioni; mi attribuisce un intento che non ho mai avuto; e conclude trionfalmente con punto esclamativo.

Precisamente, il CINQUINI mi attribuisce l'« intento di valorizzare il metodo di B. K. S. C. ». Io, invece, poichè il CINQUINI non si poteva più ritrattare decentemente avendo dichiarato che quel mio teorema era una *conseguenza immediata* del teorema di BIRKHOFF-KELLOGG, io, dico, nel § 7 di Ω), mi ero proposto soltanto di far vedere che, come le deduzioni implicite nell'Oss. II) di *A*), e sostanzialmente riprese nel n. 2 della III) dal CINQUINI, permettevano di ricondurre immediatamente il mio teorema di *A*) al [caso particolare che il secondo membro della (2) fosse limitato e quindi al] teorema di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI, così le deduzioni implicite nella fine dell'Oss. IV) di *A*) permettevano di ricondurre immediatamente il primo dei teoremi dati dal CINQUINI nella V) al [caso particolare che il secondo membro della (2) fosse minore in modulo di una funzione sommabile della sola x, cioè sempre al] teorema di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI. Che nello sviluppo dell'Oss. IV) di A) fosse anche implicito che il teorema del CINQUINI si poteva immediatamente ricondurre al caso particolare che il secondo membro della (2) fosse in modulo minore di quella tal funzione della sola x [caso che poi si poteva trattare, volendo, anche col metodo di STAMPACCHIA, esposto nella già ricordata nota (LXVII) di Ω)] era assolutamente irrilevante agli scopi che io mi ero proposto nel redigere quel § 7; – peraltro una simile circostanza l'avevo gia ricordata esplicitamente nel n. 13 della stessa Ω).

I raffronti che il CINQUINI espone nel n. 5 di Z) fra quanto faccio io nei nn. 41–44 di Ω) e quanto ZWIRNER aveva fatto in f) ed l), avrebbero senso soltanto se io avessi detto che nei lavori f) ed l) era esplicitamente dimostrato che il teorema del CINQUINI era una conseguenza immediata di quello di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI, oppure se in quei tali nn. 41-44 io mi fossi proposto di mostrare come fosse « facile vedere dai lavori » f) ed l) di ZWIRNER che... Ma poichè le cose non stanno così, è inutile *a priori* vedere in dettaglio l'esattezza sostanziale o meno dei raffronti fatti dal CINQUINI ([18]).

14. – Nella nota (XX) di Z) si legge: « Non ci indugiamo in considerazioni di natura filosofica [Ω), n. 31, pp. 106–107], perchè, come sa benissimo anche lo SCORZA DRAGONI, esse si possono sviluppare in modo da trarre le conclusioni che si preferiscono! ».

Questa frase potrebbe sembrare un'insinuazione. In realtà essa è o un'affermazione arbitraria o una constatazione di fatto. Se la si interpreta nel senso che io consideri la filosofia (diciamo la filosofia della scienza, tanto per limitare il campo) come una specie di giuoco di bussolotti, quella frase è una pura affermazione gratuita. Se la si interpreta nel senso che io ritenga che mediante stiracchiamenti sofistici sul significato delle pa-

([18]) Però quant'è carino quel: « Riflettiamo: non era *molto più lunga*, dunque era *almeno più lunga*, e quindi come può essere *immediata?* »!

role o di frasi (eventualmente mutilate in antecedenza) si possa far apparire nero il bianco, quella frase è una constatazione di fatto: a pag. 107 di Ω) scrissi invero: « Naturalmente le considerazioni generali, che ho fatto, si prestano, appunto perchè generali, ad essere svisate. Per evitare che il CINQUINI si dedichi a questa attività, non sarà inopportuno fissare in modo esplicito alcune cose, altrimenti superflue: .....».

Un altro esempio di un travisamento ottenuto stiracchiando sul significato delle parole, il CINQUINI lo offre appunto nella parte finale del n. 6 di Z). Ivi egli scrive: « In ogni caso (a prescindere da qualche differenza di vocaboli che si voglia introdurre per uniformarsi alla terminologia dello SCORZA DRAGONI) il nostro punto di vista è quello stesso che già avevamo espresso in III) (pag. 220): *i teoremi esistenziali per i problemi di valori al contorno relativi ad equazioni differenziali ordinarie si possono stabilire, senza ricorrere al metodo di Birkhoff - Kellogg - Schauder - Caccioppoli, usufruendo del metodo elementare della Scuola dell' Arzelà che non richiede nè la conoscenza del linguaggio degli spazi topologici astratti nè la conoscenza della topologia degli spazi a un numero finito di dimensioni,* quando naturalmente si attribuisca al vocabolo topologia quel significato che ha usualmente (XXI). Infine rileviamo che lo SCORZA DRAGONI riferendosi alla nostra Nota III) (pag. 220) scrive [Ω), n. 37 pag. 123]: il CINQUINI « non dia ad intendere di avere *messo le cose a posto in modo chiaro e definitivo* ». Questa affermazione è pienamente smentita dalla realtà delle cose. Infatti dopo la Nostra Nota III) che cosa non è a posto? Nelle 72 pagine della Memoria Ω) lo SCORZA DRAGONI si è dilungato a dire che le sue « sviste non hanno nessuna importanza » [cfr. Ω), pag. 60-61], e a cercare il modo per sottoporre « a critica i risultati del CINQUINI » [cfr. Ω), pag. 61], ma *lo Scorza Dragoni* ***non*** *ha potuto affermare che nei nostri lavori ci fosse qualche cosa che non era a posto.* Ha esposto soltanto le sue opinioni personali dicendosi di parere contrario al nostro, ma ciò era ben evidente dalla sua nota *A*). Quindi, quando si prescinda dal linguaggio poco accademico più volte usato dall' A. nella Memoria Ω), non si vede per qual motivo lo SCORZA DRAGONI abbia voluto riaccendere la polemica, perchè ciascuno di noi ha il diritto di preferire quel metodo che si addice al proprio punto di vista ».

Ecco, se con la frase « trovare qualcosa fuori posto » si intende trovare, poniamo, che in qualche punto di un lavoro si legge, poniamo, $g = H$ in luogo di $g = \frac{f}{|f|} H$, confesso che qualcosa del genere nei lavori del CINQUINI io non mi sono nemmeno preoccupato di andarlo a ricercare. Ma se quella frase la si interpreta nel senso generico che essa possiede, allora che per esempio (anche a prescindere dalla inaudita villania del contesto) qualcosa di spostato nell' *Aggiunta* alla Memoria I), nella II) e nella III) del CINQUINI vi fosse, in quelle 72 pagine è provato *ad abundantiam*. Qualcosa di non a posto si trova non soltanto dopo la III), ma anche dopo la Z). Per esempio, per tacere di tutte le osservazioni già fatte: il CINQUINI sembra credere [19], o per lo meno si esprime in guisa da indurre il lettore profano a credere che la trattazione del problema di NICOLETTI secondo i metodi di BIRKHOFF-KELLOGG-SCHAUDER-CACCIOPPOLI richieda nozioni sul linguaggio della teoria degli spazi topologici astratti e conoscenze di topologia degli spazi euclidei (qualunque sia il significato che si voglia dare alla parola topologia) diverse da quelle richieste, per studiare lo stesso problema, dal « metodo elementare della Scuola dell' ARZELÀ ».

Francamente il CINQUINI avrebbe fatto molto meglio ad accettare la mia Memoria Ω) in silenzio.

[19] Si vegga anche, p. es.: Z), n. 6 [punti *i*) ed *ii*)].