RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA CINQUINI-CIBRARIO

Sopra il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 75-96

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__75_0>

SOPRA IL PROBLEMA DI CAUCHY PER I SISTEMI DI EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE

Memoria (*) *di* MARIA CINQUINI-CIBRARIO (*a Cagliari*)

I sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine:

$$\text{(I)} \qquad F_i(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots q_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove si è posto:

$$p_j = \frac{\partial z_j}{\partial x}, \quad q_j = \frac{\partial z_j}{\partial y} \qquad (j = 1, 2 \ldots, n),$$

considerati nel campo delle funzioni di variabile reale, sono stati oggetto di alcune ricerche abbastanza recenti; ci limiteremo a citare (1) i lavori di T. WAZEWSKY (2), che ha studiato un particolare sistema di equazioni non lineari a derivate parziali in

(*) Pervenuta in redazione il 16 Agosto 1947.

(1) Citeremo soltanto lavori, che si riferiscono al caso, in cui il sistema (I) sia effettivamente non lineare e sia $n > 1$, lasciando quindi da parte sia i lavori che si riferiscono a sistemi del tipo:

$$\sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(x, y) p_j + b_{ij}(x, y) q_j] + f_i(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

sia quelli relativi ad una sola equazione o ad una sola funzione incognita. Così pure non citeremo lavori, in cui il sistema (I) sia considerato nel campo delle funzioni analitiche.

(2) T. WAZEWSKI, *Sur l'unicité et la limitation des intégrales de certaines systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Ann. di Mat., S. IV, t. 15, 1936, p. 155 - 158, e: *Sur le problème de* CAUCHY *relatif à un système d'équations aux dérivées partielles*, Ann. Soc. Polonaise Math., t. 15, 1937, p. 101 - 127.

più di due variabili indipendenti, di J. SCHAUDER, [3] che con metodi funzionali ha risolto il problema di CAUCHY anche per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari in più di due variabili indipendenti e per sistemi di ordine superiore, di I. PETROWSKY [4], che si è occupato di sistemi dello stesso tipo, riconducendoli al caso di sistemi quasi lineari, di S. HALPERN [5], che ha considerato un sistema di equazioni del primo ordine in più di due variabili indipendenti. In tutti questi lavori sono introdotte condizioni restrittive circa l'ordine di derivabilità delle funzioni

$$F_i\,(x, y\,;\; z_1\,, z_2\,,\ldots, z_n;\; p_1\,, p_2\,,\ldots, p_n;\; q_1\,, q_2\,,\ldots, q_n)$$
$$(i = 1\,,\, 2\ldots, n)\,,$$

e dei valori iniziali, e si seguono metodi laboriosi.

Nel presente lavoro si mostra come il problema di CAUCHY per il sistema (I), sia pure nel caso di due sole variabili indipendenti, si possa risolvere sotto ipotesi più ampie di quelle imposte dagli autori citati e con un procedimento più semplice, tenendo conto dei risultati di una nostra memoria recente [6]. Ci limite-

[3] J. SCHAUDER, *Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbeträge der Lösungen beziehenden Abschätzungen*, Comm. Math. Elvetici (B. 9, 1937, p. 263 - 283).

[4] I. PETROWSK , *Sur le problème de* CAUCHY *pour un système d'équations aux dérivées partielles dans le domaine réel*, C. R., t. 202, 1936, p. 1010 - 1012.
e: *Ueber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen*, Rec. Math. Moscou (2), 2, 1937, p. 815 - 870.

[5] S. HALPERN, *Sur les conditions pour que le problème de* CAUCHY *pour un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre soit correctement posé*, C. R. Acad. Sc., U. R. S. S., (2), 18, 1938, p. 227 - 230.

[6] M. CINQUINI - CIBRARIO, *Un teorema di esistenza e di unicità per un sistema di equazioni alle derivate parziali*, Ann. di Mat., S. IV, T. XXIV (1945), p. 157 - 175. I risultati e i procedimenti di tale memoria sono completamente indipendenti da quelli di FRIEDRICHS e LEWY, che anzi completano in un punto essenziale (cfr. : K. FRIEDRICHS *u.* H. LEWY, *Das Anfangswertproblem einer beliebigen nichtlinearen hyperbolischen Dif-*

teremo qui a considerare il caso, in cui il sistema (I) sia *del tipo iperbolico*, rimandando a un successivo lavoro lo studio di altri casi.

Nel § 1 si enuncia, sotto opportune ipotesi, il risultato fondamentale del lavoro, contenuto nel TEOREMA I, che cioè il problema di CAUCHY per il sistema (I) ammette uno e un solo sistema di soluzioni; nel § 2 si riconduce la dimostrazione del TEOREMA I alla risoluzione di un certo problema per il sistema di equazioni delle caratteristiche del sistema (I). Il § 3, valendosi dei risultati della nostra memoria, citata in [6], prova che tale problema ammette uno e un solo sistema di soluzioni; il § 4 mostra che tale sistema di soluzioni conduce effettivamente a un sistema di integrali del sistema (I), che soddisfano il TEOREMA I. Il § 5 è dedicato al caso particolare $n = 2$, in cui si hanno alcune riduzioni nelle ipotesi; nel § 6 si studiano i sistemi quasilineari, per i quali ipotesi, metodi e risultati si semplificano notevolmente.

§ 1

Le funzioni

$$F_i(x, y;\, z_1, z_2 \ldots, z_n;\, p_1, p_2, \ldots, p_n;\, q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

siano definite in un campo D e siano ivi $D^{III} - L$ [7]; il sistema (I) sia di tipo iperbolico in tutto il campo D, cioè, posto:

$$(1) \qquad P_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j}\,;\; Q_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

ferentialgleichungen beliebiger Ordnung in zwei Variablen. Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeitsbereich der Lösung, Math. Ann. B. 99, 1928, p. 200 - 221), per quanto nel presente lavoro ci si ispiri in qualche punto ai metodi dei citati autori.

[7] Diremo che una funzione è D^n in un campo D, se essa ammette ivi tutte le derivate continue, fino a quelle di ordine n incluse; diremo che una funzione è $D \;\; - L$, quando le sue derivate n^e sono, inoltre, lipschitziane.

l' equazione:

$$
\text{(II)}\quad \begin{vmatrix} P_{11}\,dy - Q_{11}\,dx & P_{12}\,dy - Q_{12}\,dx \ldots P_{1n}\,dy - Q_{1n}\,dx \\ P_{21}\,dy - Q_{21}\,dx & P_{22}\,dy - Q_{22}\,dx \ldots P_{2n}\,dy - Q_{2n}\,dx \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P_{n1}\,dy - Q_{n1}\,dx & P_{n2}\,dy - Q_{n2}\,dx \ldots P_{nn}\,dy - Q_{nn}\,dx \end{vmatrix} = 0
$$

abbia sempre n radici reali e distinte. Dall' ipotesi che le radici della (II) sono tutte distinte, segue che per ognuna di esse il determinante a primo membro della (II) ha caratteristica uguale a $n-1$.

Sia dato nel piano xy un arco di curva di equazione: $y = f(x)$, dove $f(x)$ è una funzione D^{II} - L definita in un intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$; inoltre siano assegnate le $3n$ funzioni: $\zeta_j(x)$, $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ definite anch'esse nell'intervallo: $x_1 \leq x \leq x_2$ e ivi D^{II} - L, tali che i sistemi di valori:

$$x,\ y = f(x);\ z_j = \zeta_j(x);\ p_j = \pi_j(x);\ q_j = \chi_j(x)\ (j = 1, 2, \ldots, n),$$

per ogni x dell' intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$ siano tutti interni al campo D, e che valgano le:

$$
(2)\begin{cases} \zeta_j'(x) = \pi_j(x) + \chi_j(x)\, f'(x) \\ F_i\,[x, y(x);\ \zeta_1(x), \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x);\ \pi_1(x), \pi_2(x), \ldots, \pi_n(x); \\ \qquad \chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_n(x)] = 0 \end{cases}
$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ x_1 \leq x \leq x_2).$$

Inoltre quando nell' equazione (II) le P_{ij}, Q_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ si calcolino per $y = f(x)$; $z_j = \zeta_j(x)$; $p_j = \pi_j(x)$; $q_j = \chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, il valore $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ *non sia mai radice della (II),* comunque sia x nell' intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$ (8).

(8) Si potrebbero dare soltanto le $\zeta_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, e ottenere poi le $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ come soluzioni del sistema (2), facendo l' ipotesi che le $\zeta_j(x)$, $f(x)$ siano $\mathrm{D}^{\mathrm{III}}$ — L, e che il sistema (2) sia risolubile *in modo unico* nelle $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ nell' intorno di ogni punto $x = x_0$ dell' intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$. (Si vedrà nel § 6 che nel caso, in cui il sistema (I) sia quasi-lineare, quest' ultima condizione segue immediatamente dalla ipotesi che $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ non sia radice della (II)).

In questa ipotesi vale il:

TEOREMA I. - « *Esiste uno e un solo sistema di integrali* $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *del sistema di equazioni* (I), *che sono definiti in un campo* δ *abbastanza piccolo del piano* x, y, *contenente la curva* $y = f(x)$, *sono ivi funzioni* $D^{III} - L$, *e nei punti della curva* $y = f(x)$ *soddisfano le condizioni* [9]:

$$\text{(III)} \quad z_j[x, f(x)] = \zeta_j(x);\ p_j[x, f(x)] = \pi_j(x);\ q_j[x, f(x)] = \chi_j(x)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n;\ x_1 \leq x \leq x_2) \text{ »},$$

o, come si suol dire brevemente, *il problema di* CAUCHY *per il sistema di equazioni (I) coi valori iniziali* $\zeta_j(x)$, $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, *assegnati sulla curva* $y = f(x)$, *è risolubile in modo unico.*

§ 2

1. - Sia noto un sistema di integrali $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema di equazioni (I); la (II), in cui al posto di z_j, p_j, q_j si pongano le funzioni $z_j(x, y)$ e le loro derivate, definisce in ogni punto di una qualunque delle n superfici di equazione rispettiva $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ n direzioni, le *n direzioni caratteristiche;* di conseguenza su ognuna di tali superfici restano determinati n sistemi di curve, le *curve caratteristiche.* Se il sistema di integrali $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, \ldots, n)$ del sistema (I) soddisfa le condizioni (III), nei punti della curva $y = f(x)$ le n direzioni caratteristiche risultano determinate dalle funzioni assegnate $\zeta_j(x)$, $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$, indipendentemente dalla conoscenza del sistema di superfici integrali cercate. Le condi-

[9] Se si danno soltanto le $\zeta_j(x)$ e le $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ si determinano mediante le (2), supposte risolubili in modo unico, basta imporre soltanto la prima delle condizioni (III). Se non si fa alcuna ipotesi circa l'unicità del sistema di soluzioni $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n;$ $x_1 \leq x \leq x_2)$ del sistema di equazioni (2), la seconda e la terza delle (III) assicurano l'unicità del sistema di integrali delle (I), che soddisfano le (III).

zioni (III), il sistema (I) e le ipotesi fatte nel § 1 permettono anche di calcolare nei punti della curva $y = f(x)$ le derivate seconde e terze delle funzioni cercate $z_j = z_j(x, y)$.

Si porti l'origine in un punto della curva $y = f(x)$; non è restrittivo supporre che tutte le funzioni cercate $z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ si annullino nell'origine assieme a tutte le loro derivate prime e seconde. In queste ipotesi è dunque:

$$(1) \qquad f(0) = 0; \ \zeta_j(0) = \pi_j(0) = \chi_j(0) = \zeta_j'(0) = \pi_j'(0) = \chi_j'(0) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

e inoltre: [10]

$$(2) \qquad (F_i)_0 = 0; \ \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 = 0. \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le n superfici di equazioni rispettive $z = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ passano dunque tutte per l'origine e hanno ivi lo stesso piano tangente $z = 0$, e quindi le stesse n direzioni caratteristiche. Si supponga di avere scelto gli assi coordinati x, y *non coincidenti* con alcuna di quelle direzioni. Ne segue che, se si pone:

$$(3) \qquad P = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n1} & P_{n2} & P_{nn} \end{vmatrix}; \ Q = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{n1} & Q_{n2} & Q_{nn} \end{vmatrix}$$

e se si indicano con $\frac{dy}{dx} = \rho_r$ $(r = 1, 2, \dots, n)$ le n radici dell'equazione (II), è:

$$(4) \qquad (P)_0 \neq 0; \ (Q)_0 \neq 0; \ (\rho_r)_0 \neq 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n).$$

2. - Si pensino ora le variabili x, y; $z_1, z_2, \dots, z_n$ come coordinate in uno spazio a $n + 2$ dimensioni; il sistema di equazioni:

[10] Con $(F)_0$ intendiamo, qui e in seguito, il valore di una funzione F, quando tutte le variabili, da cui essa dipende, sono nulle.

$$z_j = z_j(x, y) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

dove le $z_j(x, y)$ sono integrali del sistema (I), supposti noti, che soddisfano le (III), definisce in tale spazio una *superficie*, nel senso ordinario, che indicheremo con Σ, e l'equazione $y = f(x)$ definisce una curva Γ di Σ.

Se:

$$\frac{dy}{dx} = \rho_r(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

sono le n radici dell'equazione (II), e se nel secondo membro delle (6) si sostituiscono alle z_j, p_j, q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ le n funzioni $z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, date dalle (5), e le loro derivate, le (6) definiscono sulla superficie Σ n sistemi di curve, che chiameremo ancora curve caratteristiche.

Nei punti della curva Γ le n tangenti caratteristiche sono determinate dalle funzioni assegnate: $z = \zeta_j(x)$; $p_j = \pi_j(x)$; $q_j = \chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ indipendentemente dall'ipotesi che siano note le n funzioni (5). Si consideri ora, in particolare, il sistema delle n tangenti caratteristiche nell'origine; per le ipotesi fatte nessuna di tali tangenti coincide colla tangente alla curva Γ nell'origine. Si faccia ruotare di π la tangente alla curva Γ nell'origine nel piano tangente a Σ; tale tangente si sovrapporrà successivamente a tutte le tangenti caratteristiche nell'origine. Si considerino la prima e l'ultima di queste; partendo dall'origine si faccia variare con continuità il punto lungo la curva Γ e si considerino in ogni punto la prima e l'ultima tangente caratteristica, collo stesso ragionamento tenuto per l'origine. Se ρ_1 e ρ_2 sono le radici dell'equazione (II), corrispondenti a queste due tangenti, si prendano come linee coordinate su Σ proprio i due sistemi di curve caratteristiche, definiti su Σ dalle due equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \rho_1(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n); \\ \frac{dy}{dx} &= \rho_2(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si introducano su Σ due parametri λ, μ, scelti come segue [11]: sulla curva Γ di Σ, nei punti della quale è $y = f(x)$, sia $\lambda = x$, $\mu = -x$ (così che nei punti di Γ è: $\lambda + \mu = 0$), e i due sistemi di curve caratteristiche, definiti dalle (7), abbiano equazioni $\mu = cost.$, $\lambda = cost.$ rispettivamente.

3. – Introdotti così i parametri λ, μ, nei punti di Σ le x, y; z_j; p_j; q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ sono funzioni di λ, μ; precisamente sia:

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad & x = x\ (\lambda, \mu),\ y = y\ (\lambda, \mu);\ z_j = \bar{z}_j\ (\lambda, \mu);\ p_j = \\
& = \bar{p}_j\ (\lambda, \mu);\ q_j = \bar{q}_j\ (\lambda, \mu) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Si ponga:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& X_i = \frac{\partial F_i}{\partial x};\ Y_i = \frac{\partial F_i}{\partial y};\ Z_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial z_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \\
& \left(\frac{dF_i}{dx}\right) = X_i + \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}\, p_j;\ \left(\frac{dF_i}{dy}\right) = Y_i + \sum_{j=1}^{n} Z_{ij}\, q_j \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}
\right.
$$

Si consideri il sistema di curve caratteristiche $\mu = cost.$, corrispondenti, come si è detto, alla radice ρ_1 della (II); lungo tali curve sono soddisfatte le [12]:

[11] Circa il modo in cui sono introdotti i parametri λ, μ, cfr.: K. Friedrichs *u.* H. Lewy, l. c., 1 Teil, § 3, p. 206.

[12] Per il sistema delle equazioni (IV_1) cfr.: E. Goursat, ***Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes***, t. II., Paris, Hermann, 1898, Chap. X, n. 214, form. (30), (33), (34); pp. 318 - 319. Vi è qui qualche differenza nelle notazioni; inoltre alle equazioni: (α) $F_i\,(x, y; \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n; \bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n; \bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n) = 0$, considerate dal Goursat, sono qui sostituite le equazioni che si ottengono, derivando le (α) rispetto a λ, e non si è tenuto conto della equazione (34), data dal Goursat, perchè la (34), come osserva il Goursat stesso, è conseguenza delle precedenti.

$$
(\mathrm{IV}_1)\quad\begin{cases} y_\lambda = \rho_1 x_\lambda\,;\ \bar{z}_{j\lambda} = \bar{p}_j\, x_\lambda + \bar{q}_j\, y_\lambda & (j = 1\,,2\,,\ldots\,,n) \\ \left(\dfrac{d F_i}{d x}\right) x_\lambda + \left(\dfrac{d F_i}{d y}\right) y_\lambda + \sum\limits_{j=1}^{n} (P_{ij}\, \bar{p}_{j\lambda} + Q_{ij}\, \bar{q}_{j\lambda}) & \\ & (i = 1\,,2\,,\ldots\,,n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{(1)} \left(\dfrac{d F_i}{d x}\right) x_\lambda + \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{(1)}\, P_{ij}\, \bar{p}_{j\lambda} = 0\,, & \end{cases}
$$

dove le $h_i^{(1)}$ $(i = 1\,,\ 2\,,\ldots,\ n)$ soddisfano il sistema delle [13]:

$$
(9)\qquad \sum_{i=1}^{n} (P_{ij}\, \rho_1 - Q_{ij})\, h_i^{(1)} = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots\,,n)\,,
$$

certo risolubile per valori non tutti nulli delle $h_i^{(1)}$ $(i = 1\,,2\,,\ldots\,,n)$, perchè ρ_1 è una radice dell'equazione (II).

Lungo le curve caratteristiche $\lambda = cost.$, del sistema corrispondente alla radice ρ_2 della (II), si considerino, fra le equazioni analoghe alle (IV_1), soltanto le:

$$
(\mathrm{IV}_2)\quad\begin{cases} y_\mu = \rho_2\, x_\mu \\ \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{(2)} \left(\dfrac{d F_i}{d x}\right) x_\mu + \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{(2)}\, P_{ij}\, \bar{p}_{j\mu} = 0\,, \end{cases}
$$

dove le $h_i^{(2)}$ soddisfano il sistema lineare, che si ottiene dal sistema (9), ponendo in esso ρ_2 al posto di ρ_1.

Si considerino ora gli altri $n - 2$ sistemi di caratteristiche, corrispondenti alle radici ρ_3, $\rho_4,\ldots,$ ρ_n della (II). Nei punti delle caratteristiche del sistema corrispondente alla radice ρ_r $(r = 3,\ 4,\ldots,\ n)$, λ e μ sono funzioni di uno stesso parametro t_r; lungo tali caratteristiche si consideri, tra le equazioni analoghe alle (IV_1), l'unica equazione:

$$
(\mathrm{IV}_3)\qquad \sum_{i=1}^{n} h_i^{(r)} \left(\frac{d F_i}{d x}\right) \frac{d x}{d t_r} + \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(1)}\, P_{ij}\, \frac{d \bar{p}_j}{d t_r} = 0 \qquad (r = 3,\ 4,\ldots,\ n)
$$

[13] Cfr.: E. Goursat, l. c. form. (32), p. 319.

dove si è posto:

$$(10) \qquad \frac{d}{d t_r} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d t_r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d t_r} \qquad (r = 3, 4, \ldots, n)$$

e il rapporto tra le quantità $\frac{d\lambda}{d t_r}$, $\frac{d\mu}{d t_r}$ è determinato dalla:

$$(11) \qquad \frac{d y}{d t_r} = \rho_r \frac{d x}{d t_r} \qquad (r = 3, 4, \ldots, n),$$

e dove infine le $h_i^{(r)}$ soddisfano il sistema, che si ottiene dal sistema (9), ponendo in esso ρ_r al posto di ρ_1.

4. - Dopo avere introdotto nel precedente n. 3 il sistema delle equazioni (IV_1), (IV_2), (IV_3), si vede facilmente che se esiste uno e un solo sistema di integrali $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (I), che soddisfano le condizioni (III), allora ammette uno e un solo sistema di soluzioni il seguente:

Problema a). « *Determinare un sistema di funzioni:* $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$; $\bar{z}_j(\lambda, \mu)$; $\bar{p}_j(\lambda, \mu)$; $\bar{q}_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, *definite almeno per* $|\lambda|$, $|\mu|$ *abbastanza piccoli, e ivi* $D^{II} - L$, *che soddisfano il sistema costituito dalle equazioni* (IV_1), (IV_2), (IV_3), *e che inoltre sulla retta* $\lambda + \mu = 0$ *soddisfano le condizioni:*

$$(V) \quad \begin{cases} x(\lambda, -\lambda) = \lambda, \; y(\lambda, -\lambda) = f(\lambda); \\ \bar{z}_j(\lambda, -\lambda) = \zeta_j(\lambda); \; \bar{p}_j(\lambda, -\lambda) = \pi_j(\lambda); \; \bar{q}_j(\lambda, -\lambda) = \chi_j(\lambda) \\ \qquad\qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ ».} \end{cases}$$

§ 3

1. - Nel precedente § 2 si è provato che se esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema (I), che soddisfano le (III), allora ammette anche uno e un solo sistema di soluzioni il Problema a), ivi enunciato. Ora si dimostra facilmente che tale problema ammette effettivamente uno e un solo sistema di soluzioni; infatti esso è un caso particolare di una questione [14] studiata nel nostro lavoro, già citato in principio.

Occorre verificare se sono soddisfatte tutte le ipotesi introdotte in tale lavoro citato. Le condizioni di derivabilità sono certo soddisfatte, per le ipotesi fatte in principio sulle $F_j(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n)$ e sulle $\zeta_j(x)$, $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Le (5) del § 1, n. 2, p. 160 del lavoro citato sono pure soddisfatte, se si tiene conto delle posizioni fatte nella nota [14], e delle diseguaglianze:

$$(1) \qquad \begin{gathered} f'(\lambda) \neq \rho_r[\lambda, f(\lambda); \zeta_1(\lambda), \zeta_2(\lambda), \ldots, \zeta_n(\lambda); \\ \pi_1(\lambda), \pi_2(\lambda), \ldots, \pi^n(\lambda); \chi_1(\lambda), \chi_2(\lambda), \ldots, \chi_n(\lambda)] \\ (r = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered}$$

[14] M. Cinquini-Cibrario, l. c. nella nota [6], § 1, n. 2; cfr. in particolare il teorema di p. 161. Il sistema delle (IV_1), (IV_2), (IV_3) si riconduce al sistema (1) di p. 159 di tale lavoro, quando si ponga $\rho = \rho_1$, $\sigma = \frac{1}{\rho_2}$; $u_1(\lambda, \mu) = y(\lambda, \mu)$; $u_2(\lambda, \mu) = x(\lambda, \mu)$, si indichino con $u_3(\lambda, \mu)$, $u_4(\lambda, \mu), \ldots, u_m(\lambda, \mu)$ le altre funzioni incognite $\bar{z}_j(\lambda, \mu)$, $\bar{p}_j(\lambda, \mu)$, $\bar{q}_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, si ponga $h = 2n + 3$, $k = 2n + 4$, $l_1 = 2n + 5$, $l_2 = 2n + 6, \ldots, l_{n-3} = 3n + 1$, $m = 3n + 2$ (quindi $l_{s+1} = l_s + 1$, $s = 1, 2, \ldots, n - 4$), e infine si ponga: $U_1(\lambda) = f(\lambda)$, $U_2(\lambda) = \lambda$, $U_r(\lambda) = \zeta_j(\lambda)$ $(r = 3, 4, \ldots, n + 2;\ j = 1, 2, \ldots, n)$; $U_r(\lambda) = \pi_j(\lambda)$ $(r = n + 3, n + 4, \ldots, 2n + 2;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, $U_r(\lambda) = \chi_j(\lambda)$ $(r = 2n + 3, 2n + 4, \ldots, 3n + 2;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. L'equazione della curva γ del piano λ, μ, introdotta a p. 160 di tale lavoro e ivi indicata con $\mu = f(\lambda)$, oppure con $\lambda = g(\mu)$, nel caso presente si riduce semplicemente a $\lambda + \mu = 0$.

che seguono dall'ipotesi fatta che la tangente alla curva Γ non sia una tangente caratteristica. Tenendo conto del modo, in cui nel precedente § 2 si sono introdotti i parametri λ, μ, si vede facilmente che è soddisfatta l'ipotesi A) del § 1, n. 2, p. 160-161 del nostro lavoro. Circa le condizioni (4) del § 1, n. 2, p. 160 del lavoro citato, esse, tranne la prima, sono conseguenza immediata del fatto che il sistema (I) è del tipo iperbolico. In quanto alla prima di tali condizioni (4) già citate, si vede facilmente che nel caso attuale, in cui il sistema è quello delle (IV_1), (IV_2), (IV_3), tale condizione è soddisfatta se è:

$$P \neq 0 \,; \qquad Q \neq 0 \,, \tag{2}$$

dove con P e Q si indicano i due determinanti, definiti dalle (3) del § 2, n. 1 del presente lavoro, e se inoltre, posto:

$$H = \begin{vmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(1)} \dots & h_n^{(1)} \\ h_1^{(2)} & h_2^{(2)} \dots & h_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1^{(n)} & h_2^{(n)} \dots & h_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{3}$$

è:

$$H \neq 0 \,. \tag{4}$$

Ora per le prime due delle (4) del § 2, n. 1 del presente lavoro, i due determinanti P e Q sono diversi da zero, almeno per $|x|, |y|; |z_j|; |p_j|; |q_j|$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ (e quindi per $|\lambda|, |\mu|$) abbastanza piccoli.

Basterà dunque provare ancora che è diverso da zero il determinante H.

2. - Per provare la (4) si ragioni per assurdo; se è $H = 0$, si possono determinare delle quantità $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ non tutte nulle([15]), in modo che valgano le:

$$\sum_{r=1}^{n} h_s^{(r)} \xi_r = 0 \qquad (s = 1, 2, \dots, n) \,. \tag{5}$$

([15]) Poichè le $h_1^{(r)}, h_2^{(r)}, \dots, h_n^{(r)}$, per un dato r, non sono tutte nulle contemporaneamente per il modo, in cui sono state definite, si vede subito che *almeno due* delle $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ non sono nulle contemporaneamente.

Si considerino le:

$$(6)\qquad \sum_{s=1}^{n}(P_{st}\,\rho_r - Q_{st})\,h_s^{(r)} = 0 \qquad (r=1,2,\ldots,n;\,t=1,2,\ldots,n),$$

che definiscono le $h_s^{(r)}$; per ogni t fissato si moltiplichino le (6) per ξ_r e si sommi per r variabile da 1 a n; tenuto conto delle (5), si ottengono le:

$$(7)\qquad \sum_{s=1}^{n} P_{st}\sum_{r=1}^{n} h_s^{(r)}\,\rho_r\,\xi_r = 0 \qquad (t=1,2,\ldots,n).$$

Poichè il determinante P è diverso da zero, almeno per $|\lambda|, |\mu|$ abbastanza piccoli, segue che:

$$(8)\qquad \sum_{r=1}^{n} h_s^{(r)}\,\rho_r\,\xi_r = 0 \qquad (s=1,2,\ldots,n).$$

Confrontando le (5) e le (8), segue che, se il determinante H ha caratteristica $n-1$, è:

$$(9)\qquad \frac{\xi_1\,\rho_1}{\rho_1} = \frac{\xi_2\,\rho_2}{\rho_2} = \ldots = \frac{\xi_n\,\rho_n}{\rho_n},$$

da cui segue che almeno due delle radici ρ_r $(r=1,2,\ldots,n)$ dell'equazione (II) coincidono [16], contro l'ipotesi, fatta nel § 1, che l'equazione (II) abbia radici tutte distinte.

Se la caratteristica del determinante H è $n-h$, il sistema (5) ammette h sistemi linearmente indipendenti di soluzioni: $\xi_r^{(l)}$ $(r=1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots,h)$; poichè, per le (8), anche le $\xi_r^{(l)}\rho_r$ $(r=1,2,\ldots,n)$ costituiscono, per ogni indice l $(l=1,2,\ldots,h)$, un sistema di soluzioni del sistema (5), segue che si possono determinare delle quantità $u_1, u_2,\ldots, u_h$, in modo che valgano, p. es., le;

$$(10)\qquad \xi_r^{(1)}\,\rho_r = \sum_{j=1}^{h}\xi_r^{(j)}\,u_j \qquad (r=1,2,\ldots,n).$$

[16] Cfr. la precedente nota [15].

Si supponga ora, p. es., che sia diverso da zero un minore estratto dalle ultime $n-h$ colonne; si possono dare ad arbitrio $\xi_1^{(l)}, \xi_2^{(l)}, \ldots \xi_h^{(l)}$; $(l = 1, 2, \ldots, h)$, in modo da avere h sistemi linearmente indipendenti di soluzioni. In particolare si può porre:

$$(11) \quad \xi_r^{(r)} = 1\,(r = 1, 2, \ldots, h);\; \xi_r^{(l)} = 0\,(r, l = 1, 2, \ldots, h;\, r \neq l).$$

Dalle prime h delle (10) segue subito:

$$(12) \qquad u_1 = \rho_1;\; u_2 = u_3 = \ldots = u_h = 0;$$

e quindi dalle successive:

$$(13) \quad \xi_{h+1}^{(1)} \rho_{h+1} = \xi_{h+1}^{(1)} \rho_1;\; \xi_{h+2}^{(1)} \rho_{h+2} = \xi_{h+2}^{(1)} \rho_1, \ldots;\; \xi_n^{(1)} \rho_n = \xi_n^{(1)} \rho_1.$$

Se allora una almeno delle $\xi_r^{(1)}$ $(r = h+1, h+2, \ldots, n)$ è diversa da zero, è in corrispondenza $\rho_r = \rho_1$, contro l'ipotesi fatta che l'equazione (II) abbia radici tutte distinte. Altrimenti dalle (5) segue:

$$(14) \qquad h_1^{(1)} = h_2^{(1)} = \ldots = h_n^{(1)} = 0,$$

il che non è, per il modo in cui sono state determinate le $h_s^{(1)}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ mediante le (9) del § 2, n. 3.

Riesce così provato che il determinante H è diverso da zero, almeno per $|\lambda|, |\mu|$ abbastanza piccoli.

3. - Nei precedenti nn. 1 e 2 si è verificato che sono soddisfatte nel caso attuale tutte le ipotesi introdotte nel nostro lavoro citato; il Problema *a)* ammette quindi uno e un solo sistema di soluzioni.

§ 4

1. - Nel § 3 si è dimostrato che il Problema a) ammette uno ed un solo sistema di soluzioni:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x = x(\lambda, \mu),\ y = y(\lambda, \mu),\ z_j = \bar{z}_j(\lambda, \mu);\ p_j = \\ = \bar{p}_j(\lambda, \mu);\ q_j = \bar{q}_j(\lambda, \mu) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Dall'unicità di tale sistema di soluzioni e dalle considerazioni del § 2 segue che esiste al più un sistema di integrali $z_j = z_j(x, y)$ del sistema (I), che soddisfano il T. I. Si deve ora provare che, viceversa, il sistema di soluzioni (1) del Problema a), di cui si è dimostrata l'esistenza, porta effettivamente a costruire un tale sistema di integrali del sistema (I).

Le funzioni (1) soddisfano, nel campo in cui sono definite, le:

$$(2)\qquad \begin{aligned} F_i\,[x(\lambda, \mu),\ y(\lambda, \mu);\ \bar{z}_1(\lambda, \mu)\ \bar{z}_2(\lambda, \mu), \ldots, \bar{z}_n(\lambda, \mu); \\ \bar{p}_1(\lambda, \mu),\ \bar{p}_2(\lambda, \mu), \ldots, \bar{p}_n(\lambda, \mu); \\ \bar{q}_1(\lambda, \mu), \bar{q}_2(\lambda, \mu), \ldots, \bar{q}_n(\lambda, \mu)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Infatti per le (IV_1) è:

$$(3)\qquad \frac{d\,F_i\,[\ldots]}{d\lambda} = 0\,,$$

e le (2) *sono soddisfatte per il valore particolare di* λ: $\lambda = -\mu$, come segue dalle condizioni (V), e dalle (2) del § 1.

Le funzioni:

$$(4)\qquad x = x(\lambda, \mu), \qquad y = y(\lambda, \mu)$$

definiscono un cambiamento di variabili che, come si vede facilmente, è invertibile, almeno per $|x|, |y|$ abbastanza piccoli ([17]);

([17]) Si tenga presente che per $\lambda = \mu = 0$ è $x = y = 0$, e che nei punti della curva $y = f(x)$, corrispondente a $\lambda + \mu = 0$, è, come si trova subito:

$$\frac{d(x, y)}{d(\lambda, \mu)} = \frac{(\rho_2 - f')(\rho_1 - f')}{\rho_2 - \rho_1}$$

che è diverso da zero (cfr. le (1) del § 3, n. 1; si ricordi inoltre che $\rho_2 \neq \rho_1$ in tutto il campo D, perchè le radici dell'equazione (II) sono tutte distinte).

ottenute dalle (4) λ, μ in funzione di x, y, sostituendo nelle $\overline{z}_j(\lambda, \mu)$, $\overline{p}_j(\lambda, \mu)$, $\overline{q}_j(\lambda, \mu)$, si ottengono certe funzioni $z_j(x, y)$, $p_j(x, y)$, $q_j(x, y)$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ che sono definite almeno per $|x|, |y|$ abbastanza piccoli, sono $\mathrm{D^{II}} - \mathrm{L}$, soddisfano il sistema di equazioni (I) e le condizioni (III).

Per provare che le funzioni $z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, così costruite, soddisfano il T. I, basta provare ancora che:

$$(5) \qquad \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial x} = p_j(x, y); \quad \frac{\partial z_j(x, y)}{\partial y} = q_j(x, y) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Ora dalle (IV_1) segue che:

$$(6) \qquad \overline{z}_{j\lambda}(\lambda, \mu) = \overline{p}_j(\lambda, \mu)\, x_\lambda + \overline{q}_j(\lambda, \mu)\, y_\lambda \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Per provare le (5) basta verificare che è anche:

$$(7) \qquad \overline{z}_{j\mu}(\lambda, \mu) = \overline{p}_j(\lambda, \mu)\, x_\mu + \overline{q}_j(\lambda, \mu)\, y_\mu, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

2. - Dalle (6) segue, tenuto conto delle (V):

$$(8) \qquad \begin{aligned} \overline{z}_j(\lambda, \mu) = \zeta_j(-\mu) + \int_{-\mu}^{\lambda} [\overline{p}_j(\nu, \mu)\, x_\nu(\nu, \mu) + \\ + \overline{q}_j(\nu, \mu)\, y_\nu(\nu, \mu)]\, d\nu, \qquad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

da cui, derivando rispetto a μ, eseguendo una integrazione per parti, e tenendo conto delle (2) del § 1 e delle (V), si ottiene:

$$(9) \qquad \overline{z}_{j\mu}(\lambda, \mu) = \overline{p}_j(\lambda, \mu)\, x_\mu + \overline{q}_j(\lambda, \mu)\, y_\mu + I_j(\lambda, \mu), \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dove:

$$(10) \qquad \begin{aligned} I_j(\lambda, \mu) = \int_{-\mu}^{\lambda} \Bigg[\frac{d\,[\overline{p}_j(\nu, \mu), x(\nu, \mu)]}{d(\mu, \nu)} + \\ + \frac{d\,[\overline{q}_j(\nu, \mu), y(\nu, \mu)]}{d(\mu, \nu)} \Bigg] d\nu \qquad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Con calcoli piuttosto laboriosi, nei quali si tiene conto delle (IV_1), (IV_2), (IV_3), delle (6) del § 3, n. 2 e delle (2) del presente paragrafo, si trova che valgono le ([18]):

$$(11) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(r)} P_{ij} I_{j\lambda} = -\frac{y_\lambda}{\rho_r} \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(r)} Z_{ij} I_j \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Si considerino le (11) come un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle $I_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, si tenga conto che il determinante dei coefficienti delle derivate $I_{j\lambda}(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ è, come si vede subito, il prodotto dei due determinanti P e H, che, come si è visto nel § 3, sono diversi da zero nel campo λ, μ considerato, e si osservi, infine, che dalle (10) segue:

$$(12) \qquad I_j(-\mu, \mu) = 0.$$

Se ne conclude che, nel campo in cui sono definite le $x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu); \bar{z}_j(\lambda, \mu); \bar{p}_j(\lambda, \mu); \bar{q}_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, è identicamente:

$$(13) \qquad I_j(\lambda, \mu) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

e che, tenuto conto delle (9), valgono le (7) e quindi le (5).

Le funzioni $z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ costruite sono dunque integrali del sistema (I), che soddisfano il T. I, nel campo in cui esse sono definite. Poichè i ragionamenti fatti nei §§ 2 - 4, relativi all'intorno di un punto determinato della curva $y = f(x)$, si possono ripetere nell'intorno di un qualunque altro punto della stessa curva, il T. I è completamente dimostrato.

([18]) Si tenga presente che, per la scelta fatta nel § 2, n. 1 degli assi coordinati, è: $(\rho_r)_0 \neq 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ (cfr. le (4) del § 2, n. 1), e quindi $\rho_r \neq 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, almeno per $|x|, |y|, |z_j|, |p_j|, |q_j|$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ abbastanza piccoli.

§ 5

Un cenno a parte merita il caso $n = 2$; in tal caso l'equazione (II) ha due radici soltanto, e si considerano solo le equazioni (IV_1) e (IV_2) e non le (IV_3). Il sistema così semplificato rientra in uno studiato da H. Lewy [19], e ripreso recentemente da noi, con alcune riduzioni nelle ipotesi [20].

Tenendo conto dei risultati di tali lavori, il T. I si può, in questo caso, dimostrare sotto ipotesi più larghe; è sufficiente che le funzioni:

$$F_1(x, y; z_1, z_2; p_1; p_2; q_1, q_2); \qquad F_2(x, y; z_1, z_2; p_1, p_2; q_1, q_2)$$

siano funzioni $D^{II} - L$ nel campo D, in cui esse sono definite, che l'equazione:

$$\text{(II')} \qquad \begin{vmatrix} P_{1,1}\, dy - Q_{1,1}\, dx & P_{1,2}\, dy - Q_{1,2}\, dx \\ P_{2,1}\, dy - Q_{2,1}\, dx & P_{2,2}\, dy - Q_{2,2}\, dx \end{vmatrix} = 0$$

abbia, in tutto D, due radici reali e distinte, che le funzioni $\zeta_1(x)$, $\zeta_2(x)$; $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$; $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ siano D^I nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$, e soddisfino le altre ipotesi enunciate nel § 1 [21]. Le funzioni $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ che sono integrali del sistema:

$$\text{(I')} \qquad \begin{aligned} F_1(x, y; z_1, z_2; p_1, p_2; q_1, q_2) = 0\,, \\ F_2(x, y; z_1, z_2; p_1, p_2; q_1, q_2) = 0 \end{aligned}$$

[19] H. Lewy, *Ueber das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen*, Math. Ann., t. 98, 1928, pp. 179 - 191; cfr., in particolare, il § 2, p. 186.

[20] M. Cinquini - Cibrario: *Intorno ad un sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*, Rendic. dell'Istituto Lombardo, Vol. LXXVI, 1942 - 43.

[21] Se si danno soltanto le $\zeta_1(x)$, $\zeta_2(x)$, e le $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$; $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ si determinano mediante le (2) del § 1, in cui si ponga $n = 2$, bisogna supporre che le $f(x)$, $\zeta_1(x)$, $\zeta_2(x)$ siano D^{II}, e che il sistema delle (2) del § 1, in cui si ponga $n = 2$, sia risolubile *in modo unico* nelle $\pi_1(x)$; $\pi_2(x)$; $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ nell'intorno di ogni punto $x = x_0$ dell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$.

e soddisfano le condizioni [22]:

$$(\mathrm{III}')\quad \begin{cases} z_1[x\,;f(x)] = \zeta_1(x)\,;\ z_2[x\,,f(x)] = \zeta_2(x)\,, \\ p_1[x\,,f(x)] = \pi_1(x)\,;\ p_2[x\,,f(x)] = \pi_2(x)\,; \\ q_1[x\,,f(x)] = \chi_1(x)\,;\ q_2[x\,,f(x)] = \chi_2(x) \end{cases}$$

riescono, nel campo δ, in cui sono costruite, semplicemente D^{II}, anzichè $D^{III} - L$.

§ 6

1. - Si consideri ora, in particolare, il caso in cui *il sistema* (I) sia *quasi-lineare,* cioè sia della forma:

$$(\mathrm{VI})\quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\left[(x, y\,; z_1, z_2, \ldots, z_n)p_j + B_{ij}(x, y\,; z_1, z_2, \ldots, z_n)\, q_j\right] = \\ = C_i(x\,, y\,; z_1\,, z_2, \ldots, z_n)\,. \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots, n)\,.$$

Le funzioni $A_{ij}(x, y\,; z_1, z_2, \ldots, z_n)$; $B_{ij}(x, y\,; z_1, z_2, \ldots, z_n)$; $C_i(x\,, y\,; z_1\,, z_2, \ldots, z_n)$ siano definite in un campo D e siano ivi $D^{II} - L$; nel campo D il sistema (VI) sia del tipo iperbolico, cioè l'equazione:

$$(\mathrm{VII})\quad \begin{vmatrix} A_{1,1}dy - B_{1,1}dx & A_{1,2}dy - B_{1,2}dx \ldots A_{1,n}dy - B_{1,n}dx \\ A_{2,1}dy - B_{2,1}dx & A_{2,2}dy - B_{2,2}dx \ldots A_{2,n}dy - B_{2,n}dx \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n,1}dy - B_{n,1}dx & A_{n,2}dy - B_{n,2}dx \ldots A_{n,n}dy - B_{n,n}dx \end{vmatrix} = 0$$

abbia sempre n radici reali e distinte, comunque varino x, y; $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nel campo D.

Sia dato nel piano $x\,, y$ un arco di curva $y = f(x)$, dove $f(x)$ è definita noll'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$ ed è ivi $D^{II} - L$; siano poi assegnate n funzioni $\zeta_1(x), \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x)$, definite nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$, ivi $D^{II} - L$, tali che tutti i sistemi di valori:

$$x\,, f(x)\,; \zeta_1(x), \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x)$$

per ogni x dell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$ siano interni al campo D, e inoltre tali che, se nella (VII) A_{ij}, B_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ si calcolano per $y = f(x)$, $z_j = \zeta_j(x)$ $(x_1 \leq x \leq x_2)$, il valore

[22] Cfr. per le condizioni (III') quanto si è detto nella nota [9].

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ *non sia mai radice dell'equazione* (VII), comunque sia x nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$. In queste ipotesi vale il:

Teorema II. – «*Esiste uno e un solo sistema di integrali* $z_j = z_j(x, y)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) *del sistema di equazioni* (VI), *che sono definiti in un campo δ abbastanza piccolo, contenente l'arco di curva $y = f(x)$, sono ivi $D^{II} - L$, e nei punti della curva $y = f(x)$ soddisfano le condizioni* [23]:

$$\text{(VIII)} \qquad z_j[x, f(x)] = \zeta_j(x) \qquad (x_1 \leq x \leq x_2; j = 1, 2, \ldots, n)\text{»}.$$

2. – Il T. II si dimostra con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti nei §§ 2-4 per dimostrare il T. I.

Il sistema delle equazioni (IV_1), (IV_2), (IV_3) è qui sostituito dal sistema:

$$\text{(IX)} \left\{ \begin{array}{l} y_\lambda = \rho_1 x_\lambda ; \; y_\mu = \rho_2 x_\mu \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{(1)} A_{ij} \overline{x}_{j\lambda} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{(1)} C_i x_\lambda \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{(2)} A_{ij} \overline{x}_{j\mu} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{(2)} C_i x_\mu \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{(r)} A_{ij} \dfrac{d\overline{x}_j}{dt_r} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{(r)} C_i \dfrac{dx}{dt_r} \qquad (r = 3, 4, \ldots, n), \end{array} \right.$$

[23] Nel caso del sistema (VI) non occorre considerare anche le funzioni $\pi_j(x)$, $\chi_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Come si è già osservato nella nota [8], nel caso presente tali funzioni sono determinate in modo unico per $x_1 \leq x \leq x_2$ dalle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta'_j(x) = \pi_j(x) + \chi_j(x) f'(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \{ A_{ij}[x, f(x); \zeta_1(x), \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x)] \pi_j(x) + B_{ij}[x, f(x); \\ \zeta(x), \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x)] \chi_j(x) \} = C_i[x, f(x); \zeta_1(x); \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

e ciò in conseguenza dell'ipotesi fatta che il valore $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ non sia mai una radice dell'equazione (VII) (in cui si ponga $y = f(x)$; $z_j = \zeta_j(x)$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $x_1 \leq x \leq x_2$).

dove le $h_i^{(r)}$ $(i, r = 1, 2, \ldots, n)$ sono definite dalle:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\, \rho_r - B_{ij})\, h_i^{(r)} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, n).$$

Nel sistema di equazioni delle caratteristiche compaiono quindi soltanto le $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$; $\overline{z}_j(\lambda, \mu)$, e non le $\overline{p}_j(\lambda, \mu)$; $\overline{q}_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Analogamente a quanto si è fatto nel § 2, ci si riconduce a provare che esiste uno e un solo sistema di soluzioni del:

Problema *b)*. « *Determinare un sistema di funzioni* $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$; $\overline{z}_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, *definite almeno per* $|\lambda|$, $|\mu|$ *abbastanza piccoli e ivi* $D^{II} - L$, *che soddisfano le* (IX) *e le condizioni:*

$$(\mathrm{X}) \qquad x(\lambda, -\lambda) = \lambda;\ y(\lambda, -\lambda) = f(\lambda);\ \overline{z}_j(\lambda, -\lambda) = \zeta_j(\lambda)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n) \text{ ».}$$

Considerazioni del tutto simili a quelle del § 3 provano che il Problema *b)* ammette uno e un solo sistema di soluzioni.

Come nel § 4, dalle $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu)$ si ricavano λ, μ come funzioni $D^{II} - L$ di x, y, definite almeno per $|x|$, $|y|$ abbastanza piccoli; sostituendo nelle $z_j = \overline{z}_j(\lambda, \mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, si ottengono le funzioni $z_j = z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ che, per il modo in cui sono costruite, soddisfano le condizioni (VIII). La dimostrazione, contenuta nel § 4, che le funzioni $z_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ che si sono così costruite, sono integrali del sistema (VI), è, nel caso presente, notevolmente semplificata. Precisamente, posto:

$$(2) \qquad \frac{\partial z_j}{\partial x} = p_j, \frac{\partial z_j}{\partial y} = q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

sostituendo nelle ultime n tra le (IX) a $\overline{z}_{j\lambda}$, $\overline{z}_{j\mu}$, $\frac{d\overline{z}_j}{dt_r}$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 3, 4, \ldots, n)$ le loro espressioni in funzione di p_j, q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, tenendo conto delle prime due tra le (IX), della (1) del presente paragrafo, della (11′) del § 2, n. 3, e del fatto che, come si vede facilmente, x_λ, x_μ, $\dfrac{dx}{dt_r}$ sono diversi da zero, almeno per $|\lambda|$, $|\mu|$ abbastanza piccoli, si trovano le:

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{n} h_i^{(r)} \left[\sum_{j=1}^{n} (A_{ij}\, p_j + B_{ij}\, q_j) - C_i \right] = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dalle quali, tenuto conto che, come si è visto nel § 3, il determinante H definito dalla (3) del § 3, n. 1, è diverso da zero, almeno per $|\lambda|$, $|\mu|$ abbastanza piccoli, seguono immediatamente le (VI).

3. - Anche qui vi è qualche riduzione nelle ipotesi nel caso particolare $n = 2$. Precisamente, se $n = 2$, è sufficiente che le funzioni A_{ij}, C_i siano $D^1 - L$, e che le funzioni $f(x)$, $\zeta_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ siano D^1; le funzioni $z_j = z_j(x, y)$ $(j = = 1, 2, \ldots, n)$, che si costruiscono e soddisfano il T. II, sono, in questo caso, semplicemente D^1.