Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

G. Scorza Dragoni

Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un' altra variabile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 17 (1948), p. 102-106

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1948__17__102_0>

UN TEOREMA SULLE FUNZIONI CONTINUE RISPETTO AD UNA E MISURABILI RISPETTO AD UN' ALTRA VARIABILE

Nota (*) *di* G. SCORZA DRAGONI (*a Padova*).

In questa Nota mi propongo di precisare, per le funzioni reali, misurabili (secondo LEBESGUE) rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile (reale), il teorema classico di LUSIN (1) sulla quasi-continuità delle funzioni misurabili.

Mi limito a considerare funzioni $f(x, y)$, definite in un rettangolo

$$R : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \qquad (a < b, c < d, \text{ finiti})$$

ed ivi finite, misurabili rispetto ad x, continue rispetto ad y.

Per queste funzioni la TIBALDO ha dimostrato la quasi-uniforme equicontinuità rispetto ad y (2); nel senso che, fissato un numero positivo ε, si può sempre trovare una porzione misura-

(*) Pervenuta in Redazione il 9 febbraio 1948.

(1) Nella mia Nota *Sul principio di approssimazione nella teoria degli insiemi e sulla quasi-continuità delle funzioni misurabili* [« Rendiconti del Seminario Matematico di Roma », serie 4ª, vol. I (1937), pagg. 53–58] esposi una dimostrazione diretta del teorema di LUSIN, della quale ero in possesso fin da quando scrissi la Nota *Sull' approssimazione dell' integrale di Lebesgue mediante integrali di Riemann* [« Annali di matematica pura ed applicata », serie 4ª, vol. VII (1929-30), pagg. 61–70; questa Nota fu pubblicata soltanto nel 1930, ma fu inviata alla Redazione di quella rivista nel dicembre del 1927]. Mi sfuggì allora che un' altra dimostrazione diretta del teorema di LUSIN era stata data da L. W. COHEN in *A new proof of Lusin's theorem* [« Fundamenta mathematicae », vol. IX (1927), pagg. 122-123]. Colgo qui l' opportunità di riparare all' omissione involontaria.

(2) L. TIBALDO, *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad*

bile i di $a \vdash b$ tale, che risulti $mi > b - a - \varepsilon$ (3) e che $f(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto ad y nella porzione I di R costituita da quei punti di R che hanno l'ascissa in i. Ebbene io mostrerò che alla $f(x, y)$ si può addirittura imporre di essere continua in I; il quale risultato comprende quello della TIBALDO, poichè l'insieme I si può naturalmente supporre chiuso.

1. - Preliminari. - Riassumendo, si tratta di provare che:

Se $f(x, y)$ è finita, misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nel rettangolo R, essa è ivi quasi-continua rispetto a (x, y), semiregolarmente rispetto a y;

appunto nel senso che, dato ad arbitrio il numero $\varepsilon > 0$, è sempre possibile determinare una posizione *perfetta* i di $a \vdash b$, tale da aversi $mi > b - a - \varepsilon$, $f(x, y)$ risultando inoltre continua nella corrispondente porzione perfetta di R costituita dalle intersezioni di R con le rette passanti per i e dirette come l'asse y; od anche, nel senso che $f(x, y)$ si può rendere continua, se si sopprime da R un conveniente insieme (misurabile), che abbia minori di numeri positivi prefissati la misura superficiale propria e quella lineare della sua proiezione ortogonale sull'asse x.

Potrei dedurre questo risultato servendomi di quello della TIBALDO. Ma preferisco ricondurlo alla seguente proposizione, implicitamente dimostrata da CESÀRI (4) e dalla TIBALDO utilizzata (5) appunto per stabilire il suo teorema di continuità quasi-uniforme:

Nelle ipotesi poste, il massimo e il minimo in $c \leq y \leq d$ di $f(x, y)$, in quanto funzione di y, sono funzioni di x misurabili in $a \vdash b$.

una e continue rispetto ad un' altra variabile. Applicazioni [« Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei », serie 8ª, vol. II (1947), pagg. 146–152], n. 3.

(3) Come di consueto, denoterò con mE la misura dell' insieme E, supposto misurabile (secondo LEBESGUE).

(4) L. CESÀRI, *Sul teorema di densità in senso forte* [« Annali della Scuola normale superiore di Pisa », serie 2ª, vol. VIII (1939), pagg. 301–307], nota (13).

(5) ed estesa; cfr. loc. cit. (2), n. 1.

Naturalmente questo mi costringerà a riesporre in parte il ragionamento sfruttato dalla TIBALDO in quell'occasione (6).

2. - Dimostrazione. - Dato il numero naturale n, dividiamo l'intervallo $c \vdash\!\dashv d$ in n parti uguali mediante i punti $y_{n\,\tau} = c + \tau \dfrac{d-c}{n}$, ove $\tau = 0, 1, \ldots, n$; e per ogni x di $a \vdash\!\dashv b$ diciamo $\omega_{n,t}(x)$, con $t = 1, \ldots, n$, l'oscillazione di $f(x, y)$ per $y \geq y_{n,t-1}$ e $\leq y_{n,t}$. Allora, a norma dell'osservazione di CESÀRI, $\omega_{n,t}(x)$ è una funzione misurabile in $a \vdash\!\dashv b$. E tale è notoriamente (7) anche $\Omega_n(x)$, se $\Omega_n(x)$ denota il più grande degli n numeri $\omega_{n,1}(x), \ldots, \omega_{n,n}(x)$ per ogni x di $a \vdash\!\dashv b$. Inoltre risulta

$$\lim_{n \to +\infty} \Omega_n(x) = 0 \qquad (a \leq x \leq b), \tag{1}$$

attesa la continuità di $f(x, y)$ rispetto ad y.

Fissato poi il numero positivo ε, scegliamo una porzione perfetta e_n di $a \vdash\!\dashv b$, in modo che sia $m\, e_n > b - a - \dfrac{\varepsilon}{2}$ e che in e_n risultino continue tutte le funzioni $f(x, y_{n,1}), \ldots, f(x, y_{n,n})$; la cosa è possibile appunto perchè ciascuna delle n funzioni scritte è misurabile in $a \vdash\!\dashv b$; di guisa che è consentito applicare a ciascheduna il teorema di LUSIN (8) e giungere in maniera ovvia al risultato. Inoltre è anche lecito ammettere che la successione $e_1, e_2, e_3, \ldots$ sia monotona decrescente.

E denotiamo ora con E_n la porzione perfetta di R, costituita dai punti di R i quali abbiano l'ascissa in e_n. Allora anche la successione $E_1, E_2, E_3, \ldots$ è monotona decrescente.

Inoltre gli insiemi misurabili

$$e = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \ldots = \lim_{n \to +\infty} e_n \;;\; E = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \ldots = \lim_{n \to +\infty} E_n$$

(6) È superfluo avvertire che in questo lavoro uso il postulato di ZERMELO.

(7) Cfr. C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* [Teubner, Lipsia (1918)], cap. VII, § 352, pag. 381, teorema 10; per tutto questo primo alinea, cfr. anche loc. cit. (2), n. 3.

(8) loc. cit. (7), cap. VII, § 371, pag. 410, teorema 7.

si trovano in una relazione reciproca analoga a quella che lega e_n ed E_n; e per il primo di essi riesce, notoriamente,

$$me = \lim_{n \to +\infty} me_n \geq b - a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Indi, se $me > 0$ (per il che basta supporre ε abbastanza piccolo), possiamo scegliere una porzione perfetta i di e, soddisfacente alla

$$mi > b - a - \varepsilon$$

e tale che in essa la (1) valga uniformemente. E ciò a norma del teorema di SEVERINI - EGOROFF [9].

Orbene, io dico che $f(x, y)$ *è continua, rispetto ad* (x, y), *se la si considera come data soltanto nella porzione* I *di* R *costituita da quei punti di* R *che hanno l'ascissa in* i.

Dato il numero positivo η, si scelga infatti p in maniera tale, che in tutto i risulti $\Omega_p(x) < \eta$.

Determinato p, si scelga un numero positivo σ, tanto piccolo, che se α e β son punti di i $(\subset e_p)$ soddisfacenti alla $|\alpha - \beta| < \sigma$, risulti

$$|f(\alpha, y_{p,q}) - f(\beta, y_{p,q})| < \eta \qquad (q = 1, 2, \ldots, n).$$

Inoltre è lecito supporre σ minore anche di $\dfrac{d-c}{p}$; per modo che, se γ e δ son due punti di $c \vdash\!\dashv d$ soddisfacenti alla $|\gamma - \delta| < \sigma$, almeno uno, ϑ, dei numeri $y_{p,q}$ differisce per meno di $\dfrac{d-c}{p}$ sia da γ che da δ. Nelle quali condizioni, per ogni x di i risulta

$$|f(x, \gamma) - f(x, \vartheta)| \leq \Omega_p(x) < \eta,$$
$$|f(x, \delta) - f(x, \vartheta)| \leq \Omega_p(x) < \eta.$$

([9]) loc. cit. ([7]), cap. VII, § 354, pag. 382, teorema 12.

Detti allora (α, γ) e (β, δ) due punti di I per i quali riesca $|\alpha - \beta| < \sigma$, $|\gamma - \delta| < \sigma$ e dato a ϑ il significato precedente, si trova

$$|f(\alpha,\gamma) - f(\beta,\delta)| \leq |f(\alpha,\gamma) - f(\alpha,\vartheta)| + |f(\alpha,\vartheta) - f(\beta,\vartheta)| + \\ + |f(\beta,\vartheta) - f(\beta,\delta)| < 3\eta\ ;$$

donde appunto la continuità (uniforme) di $f(x, y)$ in I. E la dimostrazione è ultimata.

3. - Osservazioni. - Il teorema dimostrato permette di ricondurre il teorema di esistenza dato da CARATHÉODORY per la equazione $y' = f(x, y)$ (10) - nell'ambito del teorema classico di PEANO (con la f continua). E ciò utilizzando, con le evidenti modificazioni del caso, un procedimento di approssimazione già seguito da me altrove (11).

Un'altra questione spontanea è quella di precisare, in un senso evidente, il risultato raggiunto, nel caso che $f(x, y)$ sia continua in R separatamente nelle due variabili (12).

L'estensione poi del teorema del n. 1 a funzioni $f(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, complessivamente misurabili rispetto a un gruppo e complessivamente continue rispetto a un altro gruppo di variabili, non sembrerebbe presentare difficoltà concettuali.

(10) loc. cit. (7), cap. XI, § 583, pag. 672, teorema 2.

(11) G. SCORZA DRAGONI, *Teoremi di unicità relativi a un problema al contorno per un sistema di due equazioni differenziali lineari, ordinarie, del primo ordine* [«Rendiconti del Seminario matematico di Padova», vol. XII (1941), pagg. 30-50], n. 5.

(12) Per risultati relativi a queste funzioni e per altre notizie bibliografiche, ved. H. HAHN, *Ueber funktionen mehrerer Veränderlicher, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind* [«Mathematische Zeitschrift», vol. IV (1919), pagg. 306-313]; S. KEMPISTY, *Sur les fonctions quasi-continues* [«Fundamenta mathematicae», vol. XIX (1932), pagg. 184-197], nella quale ultima Nota la nozione di quasi-continuità è intesa in un senso completamente diverso dall'attuale.