Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Scorza Dragoni

Sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 15 (1946), p. 8-24

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1946__15__8_0>

SULLA DEFINIZIONE ASSIOMATICA DELL' AREA DI UNA SUPERFICIE

Nota di Giuseppe Scorza Dragoni *(a Padova)*

La lunghezza di una curva è suscettibile di un' unica definizione assiomatica [1], nel senso che un funzionale di curva continua coincide con la lunghezza, se è additivo ed inferiormente semicontinuo, se si riduce alla lunghezza sulle poligonali e se assume valori uguali per curve congruenti [2].

La questione analoga per le superficie è stata presa in esame da Zwirner [3], che le ha dato una risposta affermativa nel caso delle superficie decomponibili in numero finito o un' infinità numerabile di parti, a bordo rettificabile, rappresentabili (ciascuna rispetto ad un conveniente sistema d' assi) mediante un' equazione del tipo $z = f(x, y)$, con $f(x, y)$ continua in un dominio semplicemente connesso e dotata, nell' interno del dominio, di derivate parziali prime continue.

In questa Nota mi propongo di dimostrare che un risultato analogo vale, anche se le funzioni quali la $f(x, y)$ sono assolutamente continue secondo Tonelli. Per maggiori precisazioni si vedano i numeri 5 e 6.

Raggiungerò il mio scopo, sfruttando in modo essenziale il fatto che una funzione di due variabili, dotata quasi ovunque

(1) G. Barba, *Sulla definizione di lunghezza di una curva* [« Note ed Esercitazioni Matematiche » vol. 6 (1931), pagg. 16-18].

(2) Quest' ultima condizione, meno restrittiva di quella posta inizialmente da Barba, è essenziale; ved. G. Scorza Dragoni, *Un' osservazione sui funzionali additivi e semicontinui di curva* [« Bollettino dell' Unione Matematica Italiana », vol. XIII (1934), pagg. 23-30].

(3) G. Zwirner, *Sulla definizione d' area di una superficie* [« Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », Tomo XCVII, Parte II (1937-38), pagg. 409-416].

di derivate parziali prime, è quasi ovunque dotata di un differenziale asintotico regolare, giusta una proprietà trovata indipendentemente e quasi contemporaneamente da RADÓ [4], da CACCIOPPOLI e da me [5]. Il § 1 è appunto dedicato a ricordare

[4] T. RADÓ, *On the derivative of the* LEBESGUE *area of continuous surfaces* [« Fundamenta Mathematicae », vol. XXX (1938), pagg. 34-39] nn. 13-14 ; *On absolutely continuous transformations in the plane* [« Duke Mathematical Journal », vol. IV (1938), pagg. 189-221] pagg. 219-220.

[5] R. CACCIOPPOLI e G. SCORZA DRAGONI, *Necessità della condizione di* WEIERSTRASS *per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie* [« Memorie della R. Accademia d'Italia », Classe di Scienze fis., mat. e nat., vol. IX (1938), pagg. 251-268], § 3.

In questa Memoria (loco citato, pag. 251) « la necessità della condizione di WEIERSTRASS per la semicontinuità, sopra una data superficie, di un integrale doppio del Calcolo delle Variazioni, in forma non parametrica, è dimostrata nelle ipotesi più generali possibili, cioè supponendo soltanto la data superficie rappresentata da una funzione *assolutamente continua* ».

Questa Memoria è stata presentata, all'Accademia d'Italia, nella seduta dell'11 marzo 1938.

Ciò non ostante il CINQUINI nel vol. XX (1939) del « Zentralblatt für Mathematik », a pag. 135, ha creduto di poterla riassumere nei termini seguenti:

« Il s'agit d'une question étudiée, il y a qualques années, par Mc. SHANE et par le relateur. – Le nouveau résultat descend d'une propriétè des fonctions $z(x, y)$ absolument continues (dans le sens de M. TONELLI), mise en evidence, tout récemment, par M. RADÓ (ce Zbl. *19*, 88), qui pourtant (*sic!*), n'est pas cité par les Aut.: cette propriété est appellée, dans le Memoire en question, différentiabilité asymptotique régulière. – Le théorème établi est le suivant: Soi $f(x, y, z, p, q)$ finie et continue avec f_p, f_q, et soit $z(x, y)$ absolument continue (dans le sens de M. TONELLI) et telle que l'intégral $I_D[z] = \iint\limits_D f\left(x, y, z(x, y), \frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}\right) dx\, dy$ soit finie; alor pour la semicontinuité inférieure de $I_D[z]$ sur une surface donnée S $(z = z_0(x, y))$, il faut que, presque partout sur S, et pour tous le $\overline{p}, \overline{q}$, soit $E\left(x, y, z_0(x, y); \frac{\delta z_0}{\delta x}, \frac{\delta z_0}{\delta y}; \overline{p}, \overline{q}\right) \geq 0$. – La démonstrations, à cause du résultat de M. RADÓ, se réduit à celle du relateur ».

Il lavoro di RADÓ, cui il CINQUINI allude, è quello del « Duke Math. Journal », presentato nel novembre del 1937, sì, ma pubblicato soltanto nel 1938 (credo nel fascicolo di marzo) ; e si noti che i quatquesta proprietà e ad indicarne altre, che però non saranno sfruttate in questa Nota.

tro fascicoli annui del «Duke Journal» portavano, sulla copertina, il primo la data «march», il secondo la data «june», ecc. Ora, come avremmo potuto Caccioppoli ed io citare quel lavoro in una Memoria presentata ad un'Accademia nella prima quindicina del marzo 1938? Può forse spiegarlo il Cinquini, egli che in un riassunto pubblicato nel marzo del 1939 non menziona l'altro lavoro di Radó, citato in (4), datato «The Ohio State University, August 1937» e pubblicato nel 1938?

Si potrebbe obbiettare che potevamo introdurre la citazione nelle bozze di stampa. Giustissimo. Ma, per quel che mi riguarda, posso osservare quanto segue: *a*) gli estratti della Memoria di Caccioppoli e mia sono stati pubblicati, come molti ricorderanno, nel giugno 1938; *b*) giusta lo schedario della biblioteca del Seminario Matematico dell'Università di Padova, il vol. XXX dei «Fundamenta Mathematicae» è stato registrato come giunto il 29 giugno 1938; mentre i fascicoli 1, 2, 3, 4 del vol. IV del «Duke Math. Journ.» lo sono stati rispettivamente sotto le date 16 settembre 1939 [dico sedici settembre millenovecentotrentanove (evidentemente c'è stato qualche disguido; ma un disguido meno imponente negli effetti sarebbe stato già sufficiente a rendere impossibile quella tal citazione)], 10 luglio 1938, 5 ottobre 1938, 16 settembre 1939 [inoltre il 16 settembre 1939 risulta anche giunto il 1° fasc. del vol. V, mentre il 2° lo è il 6 giugno 1939]; *c*) i due lavori di Radó sono stati riassunti nel «Zentralblatt für Mathematik», nel fascicolo 7 del vol. 18 e nel fascicolo 2 del vol. 19, datati rispettivamente: 8 agosto 1938 e 31 ottobre 1938.

Circa quel: «La démonstrations, a cause du resultat de M. Radó, se réduit à celle du relateur», osservo che Caccioppoli ed io abbiamo concesso molto di più, andando forse oltre i desideri dello stesso Cinquini. Nella prefazione della nostra Memoria noi diciamo infatti:

«Diamo in questo lavoro una dimostrazione della necessità della condizione di Weierstrass ... per la semicontinuità di un'integrale doppio $\iint f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$ su una data superficie. Questo risultato è stato stabilito da Mac Shane supponendo $z(x, y)$ funzione lipschitziana, ipotesi che semplifica essenzialmente il problema, tanto che Mac Shane ha potuto risolverlo direttamente per integrali multipli e funzioni z in numero qualunque. Ma nel caso generale di una funzione $z(x, y)$ supposta soltanto assolutamente continua (nel senso di Tonelli) non si posseggono finora che risultati parziali, dedotti imponendo alla funzione f condizioni restrittive estranee alla natura

§ 1.

Differenziabilità asintotica

1. – Sia dato un insieme aperto e limitato E del piano $x\,y$. Una funzione $f(x, y)$, continua in E, è in E a variazione limitata (secondo Tonelli), se è dotata di derivate parziali finite $p(x, y) = f'_x(x, y)$, $q(x, y) = f'_y(x, y)$ in quasi tutti i punti di E e se queste sono sommabili in E; è assolutamente continua in E (secondo Tonelli), se per quasi tutti gli $\bar{y}$, $f(x, \bar{y})$ è assolutamente continua in ogni intervallo chiuso che appartenga alla

della questione. » [e qui citiamo anche i lavori del Cinquini, cui questi allude nel suo riassunto] « Il teorema generale per gli integrali semplici è stato dimostrato da Tonelli. Il procedimento di questo Autore consiste sostanzialmente nella costruzione di curve approssimanti la data, coincidenti con essa in alcuni tratti e rettilinee nei tratti restanti. La necessità di ricorrere a simili curve dipende ... » dal « fenomeno di Lavrentieff. *L'unica vera difficoltà che si incontra nell'estensione al caso bidimensionale* » [il carattere nell'originale è rotondo] « è dovuta al fatto che una superficie quadrabile non possiede in generale quasi ovunque un piano tangente, ma solo un piano *asintoticamente* tangente. Per superare tale difficoltà abbiamo ripreso lo studio della differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili.... Per le funzioni che ci interessano, che sono... quasi ovunque parzialmente derivabili nel senso ordinario, si può dimostrare l'esistenza di un differenziale asintotico dotato di una particolare proprietà, quella che designamo come *regolarità*. È appunto l'esistenza del differenziale asintotico regolare che consente la costruzione di superficie approssimanti la data analoghe alle curve approssimanti di Tonelli. *Dopo ciò la dimostrazione si svolge* PARALLELAMENTE A QUELLA PER GLI INTEGRALI SEMPLICI ... » [anche questo periodo nell'originale é stampato in carattere rotondo].

Circa il riassunto del Cinquini si può forse osservare ancora che esso dice soltanto agli specialisti che il risultato di Caccioppoli e mio è quello definitivo [per quanto ha tratto agli integrali doppi in forma non parametrica]; mentre è redatto in modo da mascherare questa circostanza pei non specialisti. Ma non voglio fare un processo alle intenzioni, tanto più che difficilmente un non specialista leggerà quel riassunto nel « Zentralblatt für Mathematik ».

sezione di E con la $y = \bar{y}$, analoga condizione essendo soddisfatta per quasi tutti gli $\bar{x}$ da $f(\bar{x}, y)$, e se le derivate $p(x, y)$ e $q(x, y)$, che allora esistono quasi ovunque in E, sono sommabili in E (6).

Di qui, dalla caratterizzazione data da Tonelli per le superficie quadrabili (7) e dal fatto che la quadrabilità di una superficie non dipende dagli assi coordinati, segue notoriamente che $f(x, y)$, se a variazione limitata in E, è in quasi tutti i punti di E derivabile secondo una direzione prefissata a piacere.

2. - Una funzione continua in E, diciamola ancora $f(x, y)$, è asintoticamente differenziabile in modo regolare in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di E, se esistono due costanti a e b tali che sia

$$\lim_{P \to P_0} \frac{1}{\overline{PP_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0) - a \cdot (x - x_0) - \\ - b \cdot (y - y_0)] = 0,$$

per P tendente a P_0 senza abbandonare un conveniente insieme $J(P_0)$, di densità superficiale 1 in P_0 e costituito dai contorni di tanti quadrati col centro in P_0 e coi lati paralleli agli assi.

Ciò posto, il teorema sulla differenziabilità asintotica regolare, cui si è alluso nella prefazione, dice che:

Se $f(x, y)$, continua in E, vi è quasi ovunque parzialmente derivabile, essa è dotata quasi ovunque (in E) di un differenziale asintotico regolare [e i coefficienti di questo sono quasi ovunque uguali a $p(x, y)$ e $q(x, y)$].

3. - Dimostriamo che:

Se $f(x, y)$ è continua ed a variazione limitata nell'insieme E, per quasi tutti i punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di E risulta

(6) Cfr., salvo differenze formali, L. Tonelli, *Sur la semicontinuité des integrales doubles du calcul des variations* [« Acta Mathematica », tomo 53 (1929), pagg. 325-346], n. 6.

(7) Tonelli, *Sulla quadratura delle superficie* [« Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Licei », Serie 6a, vol. III (1926), Nota I, pag. 357-362].

$$(1)\qquad \lim_{P \to P_0} \frac{1}{\overline{PP_0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0) - p(x_0, y_0)(x - x_0) - \\ - q(x_0, y_0)(y - y_0)] = 0,$$

se P è un punto di E che tende a P_0 senza abbandonare un conveniente insieme di densità superficiale in 1 *in P_0 e costituito dai contorni e dalle diagonali di tanti quadrati col centro in P_0 e coi lati paralleli agli assi.*

Nelle ipotesi poste possiamo applicare il risultato del n. 2; vale a dire, possiamo appunto soddisfare alla (1) per quasi tutti i punti P_0 di E, se P tende a P_0 senza abbandonare un conveniente insieme $J(P_0)$, di densità 1 in P_0 e costituito dai contorni di tanti quadrati aventi il centro in P_0 e i lati diretti come gli assi.

Supponiamo ora che in P_0 esistano anche le derivate secondo le direzioni delle bisettrici degli assi. Con ciò a P_0 sono ancora consentite quasi tutte le posizioni in E. E dimostriamo che la (1) vale, anche se P è un punto di E del tipo $(x_0 + h, y_0 + h)$, oppure del tipo $(x_0 + h, y_0 - h)$, h tenendo a zero in modo qualunque.

Infatti, h tenda a zero in modo che $P \equiv (x_0 + h, y_0 + h)$ appartenga anche a $J(P_0)$, dalla (1) segue, assumendo naturalmente $\sqrt{2} > 0$,

$$(2)\qquad \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{|h|} [f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)] - \\ - \frac{h}{|h|} p(x_0, y_0) - \frac{h}{|h|} q(x_0, y_0) \right] = 0;$$

e quindi (in conformità di risultati elementari)

$$(3)\qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{2}\, h} = \frac{p(x_0, y_0)}{\sqrt{2}} + \\ + \frac{q(x_0, y_0)}{\sqrt{2}},$$

sempre per h tendente a zero in modo che P appartenga a $J(P_0)$.

Ma d' altra parte il limite a primo membro della (3) esiste, per ipotesi, anche se h tende a zero in modo qualunque. Quindi la (3) è valida senza eccezioni. Dalla (3) si risale alla (2) e da questa a quella che si ottiene dalla (1), quando P è del tipo $(x_0 + h, y_0 + h)$.

Se invece le coordinate di P sono del tipo $(x_0 + h, y_0 - h)$ ed h tende a zero in modo che P appartenga a $J(P_0)$, dalla (1) si ha successivamente

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{|h} [f(x_0 + h, y_0 - h) - f(x_0, y_0)] - \frac{h}{|h|} p(x_0, y_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{|h|} q(x_0, y_0) \right] = 0,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 - h) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{2}\, h} = \frac{p(x_0, y_0)}{\sqrt{2}} - \frac{q(x_0, y_0)}{\sqrt{2}},$$

ecc.

Osservazione - Si comprende facilmente che la (1) deve continuare a sussistere in quasi tutto E, anche se si aumenta il numero (finito) delle rette passanti per P_0 e lungo le quali sia consentito a P di muoversi liberamente. Le direzioni di queste rette non dovranno dipendere da P_0.

Si potrebbe anzi dimostrare facilmente, sempre per $f(x, y)$ a variazione limitata in E, che la (1) è valida in quasi tutti i punti P_0 di E, se P tende a P_0 senza abbandonare un conveniente insieme, di densità superficiale 1 in P_0, costituito dai contorni e dai raggi di tanti n-goni ($n = 3, 4, \ldots$), regolari, omotetici, coi centri in P_0 e con le direzioni dei lati indipendenti da P_0, - per raggi di un poligono regolare s' intendono i segmenti che hanno un estremo nel centro l' altro nei vertici del poligono -.

4. - Circa la differenziabilità asintotica di una funzione $f(x, y)$ assolutamente continua in E, mi limiterò a dire che, al tempo delle nostre ricerche sulla necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale doppio (del calcolo delle variazioni in forma ordinaria) sopra una data superficie, CACCIOPPOLI dimostrò un teorema, il quale permetteva di ritenere come altamente presumibile che:

Se $f(x, y)$ è assolutamente continua in E, la (1) è soddisfatta in quasi tutti i punti P_0 di E, se P tende a P_0 in E, senza abbandonare un conveniente insieme di densità superficiale 1 in P_0 e costituito dal contorno di tante circonferenze col centro in P_0.

Come è naturale, se questo teorema è vero, esso può essere completato in modo analogo a quello tenuto nel n. prec. nei riguardi del teorema del n. 2.

§ 2.

POSIZIONE DEL PROBLEMA RELATIVO ALL'AREA DI UNA SUPERFICIE ENUNCIATO DEL TEOREMA

5. - Indichiamo con $\{S\}$ la classe delle superficie, il cui elemento corrente S goda delle seguenti proprietà:

a) S è rappresentabile parametricamente mediante tre equazioni del tipo

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{4}$$

dove $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$ sono continue in tutti e derivabili in quasi tutti i punti di un insieme Γ (del piano $u\,v$), limitato, chiuso, delimitato da una o più curve chiuse, rettificabili, semplici, disgiunte [8];

b) S è quadrabile, cioè ha l'area (secondo LEBESGUE) finita;

c) l'area $\mathcal{A}(S)$ di S è uguale all'integale classico

$$\mathcal{A}(S) = \iint_\Gamma \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}\, du\, dv \text{ [9]};$$

[8] Cioè prive a due a due di punti in comune. Allora queste curve sono al più un' infinità numerabile.

[9] Per caratterizzazioni analitiche di superficie siffatte, ved. L. CESARI, *Sulle trasformazioni continue e sull' area delle superficie* [« Memo-

d) Γ si può decomporre in un numero finito o in un' infinità numerabile di domini chiusi (e limitati)

$$\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots$$

(privi a due a due di punti interni comuni), delimitati ciascuno da curve disgiunte, semplici, chiuse e rettificabili, in modo tale che, detta $S^{(n)}$ la porzione di S in cui le (4) portano $\Gamma^{(n)}$, $S^{(n)}$ abbia (l' area espressa dall' integrale classico esteso a $\Gamma^{(n)}$, abbia) i bordi rettificabili e sia rappresentabile, rispetto a un conveniente sistema d' assi, mediante un' equazione del tipo $\zeta = g_n(\xi, \eta)$, con $g_n(\xi, \eta)$ continua in un insieme chiuso $\overline{D}^{(n)}$, delimitato da una o più curve disgiunte chiuse (e rettificabili) di Jordan, ed assolutamente continua nell' insieme aperto $D^{(n)}$, ottenuto da $\overline{D}^{(n)}$ col privare questo della frontiera.

Dalle *b*), *c*), *d*) segue facilmente

$$\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(S^{(1)}) + \mathcal{A}(S^{(2)}) + \ldots \tag{5}$$

6. - Un funzionale $\varphi(S)$, definito in $\{S\}$ è additivo, se per ogni [10] decomposizione di S in parti $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots$ quali quelle considerate in *d*), riesce

rie dell' Acc. d' Italia», Classe di Sc. fis., mat. e nat., vol. XII (1941), pagg. 1305-1397], § 12; *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica* [«Bollettino dell' Unione mat. it.», serie II, vol. IV (1942), pag. 109-117], n. 7. L' A. suppone che Γ sia un quadrato.

Una caratterizzazione analoga, basata su una definizione di area diversa da quella di Lebesgue, è stata indicata da R. Caccioppoli in *Trasformazioni piane, superficie quadrabili, integrali di superficie* [«Rendiconti del Circolo matematico di Palermo» vol. LIV (1930), pagg. 217-262], n. 14. Ai risultati di Caccioppoli sonó state mosse obbiezioni essenziali da Radó e Reichelderfer in *A theory of absolutely continuous trasformations in the plane* [«Trans. Am. Math. Soc.», vol. 49 (1941) pag. 258-307], pagg. 260-261. La risposta di Caccioppoli, che riafferma categoricamente l' esatezza della sua teoria, si trova nel riassunto della Memoria di Radó e Reichelderfer, che ho pubblicato nel «Zentralblatt für Mathematik», vol. 24 (1941) pag. 387.

(10) Beninteso, *ogni* nel senso: qualunque sia l' insieme base Γ, la rappresentazione parametrica (4), la decomposizione di Γ in parti

$$\varphi(S) = \varphi(S^{(1)}) + \varphi(S^{(2)}) + \ldots \tag{6}$$

Ciò premesso, ci proponiamo di dimostrare che:

Un funzionale $\varphi(S)$ di S, non negativo ed inferiormente semicontinuo [11] *in $\{S\}$, che assuma valori uguali per superficie congruenti e coincida con $\mathcal{A}(S)$ sulle superficie poliedriche, coincide con $\mathcal{A}(S)$ in tutto $\{S\}$.*

In virtù delle ipotesi fatte nel n. 5 e delle (5) e (6), basta dimostrare la

$$\varphi(S) = \mathcal{A}(S), \tag{7}$$

se S è a bordi rettificabili e può essere rappresentata tutta mediante un' unica equazione del tipo

$$z = f(x, y), \tag{8}$$

con $f(x, y)$ continua in un insieme chiuso e limitato $\bar{E}$, delimitato da curve disgiunte, semplici, chiuse e rettificabili $j_1, j_2, \ldots$ ed assolutamente continua in $E' = \bar{E} - (j_1 + j_2 + \ldots)$. E per dimostrare la (7), nei §§ 3 e 4, si procederà per assurdo.

Se la (7) non è verificata per una certa superficie S_0, rappresentata da un' equazione quale la (8), ecc...., deve essere

$$\varphi(S_0) \leq \lambda^* \mathcal{A}(S_0), \tag{9}$$

con λ^* conveniente, positivo e minor d' uno, perchè $\mathcal{A}(S_0)$ coincide col minimo limite delle aree delle superficie poliedriche tendenti ad S_0, e quindi assume su S_0 il massimo fra i valori di tutti i funzionali, inferiormente semicontinui in $\{S\}$, che si riducono all' area ordinaria sulle superficie poliedriche.

Si osservi che, a norma della nota [10], se

$$E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots$$

$\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots$ tali che, ecc. Avverto inoltre che alcune delle ipotesi fatte servono soltanto per snellire la trattazione che segue.

[11] Per queste ipotesi, ved. anche loc. cit. [3].

è una decomposizione di E in insiemi chiusi, delimitati ciascuno da curve disgiunte, semplici, chiuse e rettificabili, privi a due a due di punti interni comuni e portati dalla (8) in porzioni $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)} \ldots$ di S_0, a bordi rettificabili, riesce soddisfatta l'analoga della (6).

§ 3

Dimostrazione del teorema precedente

7. - Denotiamo con δ, ε, μ, ν, ρ cinque numeri positivi prefissati (vedremo come).

Indichiamo con I una porzione chiusa di E, tale che $m(\overline{E} - I) = m(E - I) < \varepsilon$, dove m sta a indicare la misura secondo Lebesgue, e che le derivate parziali $p(x, y)$ e $q(x, y)$ di $f(x, y)$ siano continue su I. Ciò è notoriamente possibile; volendo si confronti loc. cit. nota ([5]), n. **6**.

In virtù del teorema del n. 2, è lecito supporre che a tutti i punti $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di I si possano associare una successione di quadrati $Q_1(P_0)$, $Q_2(P_0), \ldots$ interni ad E, coi centri in P_0, coi lati infinitesimi e paralleli agli assi, in modo che valga la (1) del n. 3, se $P \equiv (x, y)$ tende a P_0 mantenendosi sui contorni di $Q_1(P_0)$, $Q_2(P_0), \ldots$ Inoltre è lecito supporre che sui lati di $Q_1(P_0)$, $Q_2(P_0), \ldots$ la funzione $f(x, y)$ subordini funzioni assolutamente continue.

Pel teorema geometrico di Vitali, applicato all'insieme I ed ai quadrati Q, esistono r punti $P_1 \equiv (x_1, y_1), \ldots,$ $P_r \equiv (x_r, y_r)$, di I ed r quadrati, $T_1(P_1) = Q_{n_1}(P_1), \ldots,$ $T_r(P_r) = Q_{n_r}(P_r)$, in modo che:

α) $T_1(P_1), \ldots, T_r(P_r)$ siano a due a due privi di punti comuni ed abbiano i lati minori di δ;

che:

β) posto $C = T_1(P_1) + \ldots + T_r(P_r)$, sia $m(I - I \cdot C) < \mu$, e quindi anche $m(\overline{E} - C) = m(E - C) \leq m(E - I) + m(I - I \cdot C) < \varepsilon + \mu$; mentre $m(C - C \cdot I) \leq m(E - I) < \varepsilon$; e che:

γ) sia

$$(10) \qquad |f(x,y) - f(x_i, y_i) - p(x_i, y_i)(x - x_i) - \\ - q(x_i, y_i)(y - y_i)| < \overline{PP_i} \cdot \nu \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

se $P \equiv (x, y)$ si mantiene sul contorno $t_i(P_i)$ di $T_i(P_i)$, sul quale le funzioni di una variabile subordinate da $f(x, y)$ sono assolutamente continue.

Inoltre indichiamo con S_i la proiezione di $T_i(P_i)$, secondo l'asse z, su S_0 e con Σ_i quella sul piano asintoticamente tangente ad S_0 nel punto $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$, cioè sul piano di equazione

$$z = p(x_i, y_i)(x - x_i) + q(x_i, y_i)(y - y_i) + f(x_i, y_i).$$

8. – Ciò premesso, si noti che, data la continuità di $p(x, y)$ e $q(x, y)$ su I e dato che i lati di $T_1(P_1), \ldots, T_r(P_r)$ sono minori di δ, mentre δ è tuttora arbitrario, è lecito supporre

$$\left|\sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)} - \sqrt{1 + p^2(x_i, y_i) + q^2(x_i, y_i)}\right| < \tau \text{ (12)},$$

se τ è un numero positivo prefissato a piacere, e se (x, y) è un punto di $I \cdot T_i(P_i)$.

Ma

$$\sum_1^r {}_i \left\{\mathcal{A}(\Sigma_i) - \mathcal{A}(S_i)\right\} =$$

$$= \sum_1^r {}_i \iint_{T_i(P_i)} \left\{\sqrt{1 + p^2(x_i, y_i) + q^2(x_i, y_i)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\right\} dx\, dy =$$

$$= \sum_1^r {}_i \iint_{I \cdot T_i(P_i)} \left\{\sqrt{1 + p^2(x_i, y_i) + q^2(x_i, y_i)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\right\} dx\, dy +$$

(12) Naturalmente la radice va intesa positiva.

$$+\sum_1^r {}_i \iint\limits_{T_i P_i - I \cdot T_i (P_i} \sqrt{1 + p^2(x_i, y_i) + q^2(x_i, y_i)}\, dx\, dy -$$

$$-\iint\limits_{C - I \cdot C} \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\, dx\, dy \geq$$

$$\geq -\tau \cdot m\, E - \iint\limits_{C - I \cdot C} \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\, dx\, dy;$$

inoltre quest' ultimo integrale si può supporre piccolo a piacere, perchè l' integrale secondo LEBESGUE è una funzione assolutamente continua d' insieme, mentre $m\,(C - I \cdot C) < \varepsilon$ con ε tuttora in nostro arbitrio.

In definitiva si trova che, prefissato τ a piacere, si può supporre soddisfatta la disuguaglianza

$$\sum_1^r {}_i\, \mathcal{A}(\Sigma_i) \geq \sum_1^r {}_i\, \mathcal{A}(S_i) - 2\,\tau \cdot m\, E, \tag{11}$$

purchè δ ed ε siano stati scelti in modo opportuno.

9. - Ancora per l' assoluta continuità dell' integrale secondo LEBESGUE come funzione d' insieme e per la $m\,(E - C) < \varepsilon + \mu$, si può supporre anche

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(S_0) - \sum_1^r {}_i\, \mathcal{A}(S_i) = \\ &= \iint\limits_{E - C} \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}\, dx\, dy \leq \tau \cdot m\, E, \end{aligned} \tag{12}$$

pur di avere scelto ε e μ in modo opportuno.

Dal confronto delle (9), (11) e (12) e dall' arbitrarietà di τ, segue facilmente che riesce

$$(13) \qquad \varphi(S_0) \leq \lambda \sum_{1}^{r}{}_i \mathcal{A}(\Sigma_i),$$

se λ è un numero (positivo) maggiore di λ^* e minore di 1 e se δ, ε e μ sono stati prefissati in modo opportuno. Infatti basta che τ sia tanto piccolo da aversi $3\lambda\tau \cdot m E < (\lambda - \lambda^*) \mathcal{A}(S_0)$, perchè sia

$$\lambda \sum_{1}^{r}{}_i \mathcal{A}(\Sigma_i) \geq \lambda \sum_{1}^{r}{}_i \mathcal{A}(S_i) - 2\lambda\tau \cdot m E \geq$$
$$\geq \lambda \mathcal{A}(S_0) - 3\lambda\tau \cdot m E >$$
$$> \lambda \mathcal{A}(S_0) - (\lambda - \lambda^* \mathcal{A}(S_0) \geq \varphi(S_0).$$

10. - Poichè $f(x, y)$ è assolutamente continua e quindi a variazione limitata sui lati di $T_1(P_1)$, $T_2(P_2), \ldots$, $T_r(P_r)$, la decomposizione di $\overline{E}$ negli insiemi

$$T_1(P_1), \ldots, T_r(P_r), [\overline{E} - \sum_{1}^{r}{}_i T_i(P_i)] + \sum_{1}^{r}{}_i t_i(P_i)$$

si traduce per S_0 in una decomposizione in $r + 1$ parti (di cui le prime r coincidenti con $S_1, \ldots, S_r$), alle quali si può applicare la (6). Di qui e dall' essere $\varphi(S)$ positivo o nullo in $\{S\}$, si deduce

$$\sum_{1}^{r}{}_i \varphi(S_i) \leq \varphi(S_0).$$

Di qui e dalla (13) si trae che, almeno per un valore dell' indice i, risulta

$$\varphi(S_i) \leq \lambda \mathcal{A}(\Sigma_i).$$

Questa è la formula a cui volevamo arrivare.

11. - Si noti che nelle considerazioni precedenti i numeri δ, ε, μ sono sottoposti all' unico vincolo di essere abbastanza piccoli.

Il numero ν è invece del tutto arbitrario.

Il numero ρ è anch' esso arbitrario; ci servirà per imporre un' altra condizione a δ. Eccola.

Si indichi con $\overline{\rho}_i$ la massima distanza di due punti S_i e Σ_i aventi uguali le prime due coordinate. E si imponga che sia $\overline{\rho}_i < \rho$ $(i = 1, \ldots, r)$. Anche questa ipotesi è certamente legittima, per poco che δ sia convenientemente piccolo; sicchè per δ si ritrova un vincolo della stessa natura di quello già impostogli.

Inoltre la scelta di δ segue quella di ε (di μ) e di I. Epperò si può supporre δ tanto piccolo, che i lati di $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ non superino il numero $\frac{1}{2}$, perchè su I le p e q sono limitate.

Il numero λ è invece un numero qualunque, ma fissato una volta per tutte, compreso fra λ^* ed 1, estremi esclusi.

§ 4.

Continua la dimostrazione

12. - Dato il numero λ nel modo anzi detto, si scelgano cinque successioni infinitesime di numeri positivi

$$\delta_1, \delta_2, \ldots;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots;\ \mu_1, \mu_2, \ldots;\ \nu_1, \nu_2, \ldots;\ \rho_1, \rho_2, \ldots;$$

i numeri δ_n, ε_n, μ_n, siano tanto piccoli da poter applicare ad ogni quintupla δ_n, ε_n, μ_n, ν_n, ρ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ le considerazioni del § prec.

In virtù di queste, per ogni n, potremo trovare in E un punto $F_n \equiv (\xi_n, \eta_n)$ ed un quadrato q_n tali che:

I) F_n sia il centro di q_n; la lunghezza l_n del lato q_n non superi δ_n;

che:

II) sia

$$(14) \qquad |f(x, y) - f(\xi_n, \eta_n) - p(\xi_n, \eta_n)(x - \xi_n) - \\ - q(\xi_n, \eta_n)(y - \eta_n)| < \overline{PF_n} \cdot \nu_n,$$

se $P \equiv (x, y)$ si mantiene sul contorno di q_n [la (14) è quindi l'equivalente della (10)], di guisa che $\overline{PF_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} l_n$;

che:

III) $f(x, y)$ subordini funzioni assolutamente continue sui lati di q_n;

che:

IV) dette rispettivamente s_n e σ_n le proiezioni, secondo l'asse z, di q_n su S_0 e sul piano asintoticamente tangente ad S_0 in $(\xi_n, \eta_n, f(\xi_n, \eta_n))$, sia

$$\varphi(s_n) \leq \lambda \mathcal{A}(\sigma_n); \tag{15}$$

e che:

V) la distanza di due punti di s_n e σ_n, aventi uguali la x e la y, non superi ρ_n mentre i lati di σ_n non superino $\frac{1}{2}$.

13. – Costruiamo ora la calotta c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ottenuta spostando s_n parallelamente a sè stessa, nella direzione e nel verso positivo dell'asse z, di una quantità uguale a $l_n \cdot \nu_n$, ed associando alla superficie s'_n, così ottenuta da s_n, i segmenti paralleli all'asse z aventi un estremo sul bordo di s'_n e l'altro sul bordo di σ_n [si noti che, in virtù della (14), i bordi di s'_n e σ_n non hanno punti comuni e che, sempre per la (14), quei segmenti non superano mai in lunghezza il numero $2\, l_n \nu_n$].

Dalla V) segue che c_n appartiene al $(\rho_n + l_n \nu_n)$ - intorno di σ_n.

Dopo di ciò, nel quadrato ([13]) V: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ distribuiamo un certo numero, diciamolo w_n, di parallelogrammi a due a due disgiunti, uguali a σ_n; distribuiamone anzi tanti che la loro superficie complessiva non sia inferiore ad $\frac{1}{4}$ (il che è possibile, perchè i lati di σ_n non superano $\frac{1}{2}$).

([13]) Quest'ultima parte del ragionamento si svolge ormai sulla completa falsariga di quello già usato da ZWIRNER nel lavoro citato.

Su ciascuno di questi parallelogrammi adattiamo opportunamente una calotta uguale a c_n, e sostituiamo il parallelogramma con la calotta.

Si passa da V ad una superficie V_n del $(\rho_n + l_n \nu_n)$ - intorno di V, la quale per la III) è un elemento di $\{S\}$.

Poichè l_n, ν_n e ρ_n sono infinitesimi e $\varphi(S)$ è inferiormente semicontinuo, dovrebbe essere

$$\min \lim \varphi(V_n) \geq 1.$$

Noi proveremo invece, nel n. 14, che questa disuguaglianza è falsa e perverremo così all' assurdo preannunciato nel n. 6.

14. - Infatti, dall' ipotesi che $\varphi(S)$ assuma valori uguali su superficie congruenti segue $1 - \varphi(V_n) = w_n[\varphi(\sigma_n) - \varphi(c_n)] = w_n[\varphi(\sigma_n) - \varphi(s_n) - \varphi(k_n)]$, se con k_n indichiamo la superficie laterale di c_n (il significato dell' espressione è palese).

Valutiamo ora il limite del rapporto $\varphi(k_n)/\varphi(\sigma_n)$ per n tendente all' infinito. Poichè σ_n è un parallelogramma, risulta $\varphi(\sigma_n) = \mathcal{A}(\sigma_n)$; e quindi $\varphi(\sigma_n) \geq \mathcal{A}(q_n) = l_n^2$. D' altra parte è $0 \leq \varphi(k_n) \leq \mathcal{A}(k_n) \leq 8\, l_n^2\, \nu_n$, con ν_n infinitesimo per $n \to +\infty$. Sicchè $\varphi_n(k_n)$ è un infinitesimo d' ordine superiore rispetto a $\varphi(\sigma_n)$.

Indi, tenuto conto della (15), e per n abbastanza grande, si trova:

$$1 - \varphi(V_n) = w_n \varphi(\sigma_n) \left[1 - \frac{\varphi(s_n)}{\varphi(\sigma_n)} - \frac{\varphi(k_n)}{\varphi(\sigma_n)}\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{4}\left[1 - \lambda - \frac{\varphi(k_n)}{\varphi(\sigma_n)}\right] > \frac{1-\lambda}{8} > 0,$$

come appunto volevasi dimostrare.

(Pervenuto in Redazione il 21 Settembre 1945)